

República Dominicana

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Magister en Matemática

Título

Análisis de las propiedades de la inversa de Moore-Penrose aplicadas al estudio de
sistemas de ecuaciones

Sustentante

Yulenny Altagracia Santos Valdez

Asesor

Dr. Francisco Ramírez Contreras

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año Académico, 2023.

TÍTULO

ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES DE LA INVERSA DE MOORE-PENROSE
APLICADAS AL ESTUDIO DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en la presente investigación, son responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han incluido respetando el derecho del autor; por tanto, se libera a la universidad UTECO de su responsabilidad, sin embargo, para la reproducción total o parcial se requiere de su autorización.

Título

Análisis de las propiedades de la inversa de Moore-Penrose aplicadas al estudio de sistemas de ecuaciones

Tesis presentada por **Yulenny Altagracia Santos Valdez** para la obtención del grado de Magíster en Matemática.

Composición del tribunal evaluador

Danny Manzueta.

Metodología.

José Miguel Gómez.

Contenidos

María Eufemia Fernández .

Redacción

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de Autoría	III
Agradecimientos	VI
Dedicatorias	VII
Resumen	IX
 CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	 1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes.	1
1.2.1 Antecedentes históricos.	1
1.2.2 Antecedentes académicos.	5
1.3 Planteamiento del problema	6
1.4 Justificación	6
1.5 Objetivos	7
1.5.1 Objetivo general	7
1.5.2 Objetivos específicos	7
1.6 Alcances y límites	7
 CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	 8
2.1 Introducción.	8
2.2 Marco conceptual.	8
2.3 Tipos de matrices.	9
2.4 Inversa generalizada.	10
2.4.1 C -inversa de una matriz	11
2.4.2 S -inversa de una matriz	15
2.4.3 Inversa de Moore-Penrose	17
 CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO	 23
3.1 Introducción.	23
3.1.1 Aspectos metodológicos	23

3.1.2	Diseño de la investigación.	23
3.1.3	Tipo de investigación.	23
3.1.4	Método de investigación.	24
3.1.5	Enfoque de la investigación.	24
CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE RESULTADOS		25
4.1	Introducción.	25
4.2	Resultados	25
4.3	Ejemplo Numérico	32
CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS		36
5.1	Conclusiones.	36
5.2	Líneas futuras de investigación.	37
Referencias		38

AGRADECIMIENTOS

A Dios: Por haberme dado la vida, por ser fuente de toda sabiduría y fortaleza. Por haberme guiado en cada camino recorrido.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO): Por permitirme formar parte de este programa de maestría en matemática y por brindarme un entorno académico propicio para la adquisición de conocimientos y el crecimiento intelectual.

A mi asesor: Dr. Francisco J. Ramírez C. Cuyo liderazgo y conocimiento experto han sido cruciales en el avance de esta tesis. Agradezco su orientación científica, su capacidad para desafiar y enriquecer mis ideas, y su dedicación en la supervisión de mi investigación. Su apoyo ha sido invaluable para mí, en todo el proceso.

A mis profesores: Por compartir sus conocimientos y experiencias, les agradezco por su dedicación y pasión por la enseñanza. Han dejado huella imborrable en mi formación académica y personal.

DEDICATORIAS.

A Dios: Por su insondable sabiduría y por proveerme con la fuerza y la determinación necesarias para enfrentar los desafíos de esta investigación. Su amor y bendición han sido fundamentales para alcanzar este logro.

A mis padres: Eusebio Santos y Martina Valdez. Por su amor incondicional y apoyo constante en cada una de mis decisiones. Su inquebrantable compromiso con mi educación ha sido el cimiento sobre el cual he construido mis conocimientos y logros.

A mis hermanos: José Antonio García, Johan Santos y Yulianny Santos. Por su apoyo incondicional, palabras de aliento y compañía en este camino académico. Su confianza en mí y su presencia han sido un gran estímulo para seguir adelante.

A mi esposo: Yoel Guzmán Brito. Por estar a mi lado en cada momento, por comprender mi ausencias y apoyarme incondicionalmente. Tu amor, paciencia y comprensión han sido fundamentales para mantenerme motivada y enfocada.

A mi hijo: Yael Guzmán Santos. Por ser mi mayor inspiración. Tu amor y admiración han sido un estímulo inigualable en mi búsqueda del conocimiento. Tu presencia en mi vida ha fortalecido mi determinación y ha dado un propósito más profundo a mi trabajo de investigación.

A mi equipo de estudio: Carola Gómez, Yeraldys Reinoso, Carla Merejo y Maribel Núñez. Por acompañarme en este viaje de aprendizaje y desafíos. Nuestro intercambio de ideas y compromiso como equipo ha enriquecido este proceso. Su colaboración, motivación y apoyo mutuo nos han ayudado a superar obstáculos y alcanzar nuestras metas juntos.

A Las tías de Yael. Bianca Herrera, Yuleysi Sarante, Yiraidy Rodríguez, Yunelbi

Sarante y Nelsy González. Por ser mi red de contención, su amistad sincera y palabra de aliento han sido un bálsamo para el alma. Gracias por estar ahí en los buenos y malos momentos.

A Las flores del Olinda. Darlyna Vázquez y Emelina Santos. Por estar siempre a mi lado, animándome y recordándome mis metas cuando estaba a punto de rendirme. Su apoyo incondicional ha sido un pilar fundamental para mantenerme motivada y perseverante en los momentos difíciles. Gracias por estar siempre ahí, brindándome fuerza y confianza.

A mis compañeros de trabajo: Sandrelis, José Miguel Sánchez y Frank Leandro. Por su apoyo mutuo, colaboración y compañerismo. Sin ustedes este camino de aprendizaje no hubiese sido tan enriquecedor y significativo.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Facultad de Postgrado y Educación Continuada



MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

Análisis de las propiedades de la inversa de Moore-Penrose aplicadas al estudio de sistemas de ecuaciones.

Yulenny Alt. Santos Valdez

Sutentante

Dr. Francisco J. Ramírez C.

Asesor

RESUMEN.

La inversa de Moore-Penrose es una herramienta poderosa para resolver problemas lineales con matrices no cuadrada o singulares, proporcionando soluciones aproximadas y estables en diferentes aplicaciones. En tal sentido, esta investigación tuvo como objetivo general: Analizar las propiedades de la inversa de Moore-Penrose y su aplicación en el estudio de sistemas de ecuaciones. Y cuyos objetivos específicos fueron: Describir las propiedades que garantizan la existencia de la inversa de Moore-Penrose. Y Aplicar las propiedades de la inversa de Moore-Penrose para determinar la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales.

En lo que concierne a los aspectos metodológicos, se utilizó el diseño no experimental, con un enfoque cualitativo y con el tipo de investigación: exploratoria, descriptiva

y explicativa. En cuanto a las conclusiones alcanzadas en esta investigación se encuentran las siguientes:

1. Dentro de las distintas generalizaciones del concepto de matriz inversa, las que más se relacionan con el análisis y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales tanto compatibles como incompatibles son las c -inversas, las s -inversas y la g -inversa o inversa de Moore-Penrose de una matriz. Tanto las matrices c -inversas como las s -inversas siempre existen y no son únicas. La g -inversa existe siempre y es única.
2. La compatibilidad de un sistema lineal de la forma $Ax = b$ está caracterizada por una c -inversa de la matriz A , es decir, si el sistema $Ax = b$ es compatible entonces $AA_c b = b$ y si $AA_c b = b$ entonces el sistema es compatible ya que $x_0 = A_c b$ es solución del mismo.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

Este capítulo está compuesto por los antecedentes tanto históricos como académicos, en el cual se encuentran contenidos una serie de evidencias acerca del origen y desarrollo de la inversa de Moore-Penrose y los sistemas de ecuaciones. Además, contiene el planteamiento del problema donde se describe y se estructura de manera formal la idea de la presente investigación y sus interrogantes. En el mismo orden de ideas, se presentan y delinean los objetivos tanto el general como los específicos, la justificación; que explica su relevancia, importancia e utilidad como también se encuentran los alcances y límites donde se describe hasta dónde llega y el área o campo de donde está centrada dicho estudio.

1.2 Antecedentes.

1.2.1 Antecedentes históricos.

1.2.1.1 El principio de las ecuaciones lineales

En las primeras civilizaciones que tuvo el planeta se le reconoce a los griegos algunos de los avances más importantes en la matemática pues ellos fueron una civilización enfocada en los cálculos matemáticos ya que los ayudaba a solucionar problemas de la vida diaria, a todos estos avances matemáticos le dieron el nombre de álgebra y la definieron como el arte de reducir y resolver ecuaciones las cuales son igualdades en las que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas incógnitas y que solo se pueden verificar o ser verdaderas para determinados valores. (Burgo, 2018)

Por otro lado los egipcios hicieron un gran aporte al mundo mediante sus papiros pues en ellos dejaron una gran cantidad de problemas matemáticos resueltos mediante ecuaciones, la mayoría de ellos eran de tipo aritmético, es decir, problemas relacionados específicamente con operaciones de suma, resta, multiplicación y división, además la mayoría

de los problemas que se encontraban en los papiros respondían a situaciones concretas a las que se enfrentaban mientras construían sus estructuras y monumentos. (Burgo, 2018)

1.2.1.2 Primeros sistemas de ecuaciones lineales

Los primeros sistemas de ecuaciones lineales fueron formulados y resueltos por los babilonios, los cuales llamaban a las incógnitas con palabras tales como longitud, anchura, área, o volumen, sin que tuvieran relación con problemas de medida. (Burgo, 2018)

Los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Uno de los personajes más destacado en esta civilización fue Diophante quien resolvía problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero los transformaba en una ecuación lineal. A este personaje se le atribuye el término de ecuación diofántica que es cualquier ecuación algebraica, de dos o más incógnitas, cuyos coeficientes recorren el conjunto de los números enteros, y se buscan soluciones enteras. (López y Ruíz , 2005)

En el siglo XVI se presentaron grandes avances en cuanto al álgebra se refiere más específicamente en Francia surgió un matemático llamado François Viète quien fue el primero en representar una ecuación mediante letras asignando variables respectivamente. (Lorenzo, 2010)

En el siglo XVIII se hizo presente Johann Friedrich Gauss y Wilhelm Jordán, quienes fueron los creadores del método de eliminación de Gauss-Jordan el cual consiste en una técnica algebraica desarrollada en un algoritmo que sirve para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y que inicialmente se usó para resolver el problema de mínimos cuadrados. (Burgo, 2018)

En esa misma época resaltó Gabriel Cramer quien fue un matemático suizo que formuló lo que llaman La regla de Cramer el cual es un teorema del álgebra lineal que da solución a un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes los cuales

sirven para estudiar el número de soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, para sistemas de ecuaciones lineales de más de tres ecuaciones su aplicación para la resolución del mismo resulta demasiado difícil.(Burgo, 2018)

1.2.1.3 Inversa generalizada de Moore-Penrose

El concepto de una inversa generalizada fue mencionado primero por Fredholm en 1903, donde dio una inversa generalizada particular llamada por el pseudo inversa de un operador integral. La clase de todas las pseudo inversas fue caracterizada por Hurwitz en 1912. (López, 2019)

Los inversos generalizados de operadores diferenciales e integrales antecedieron a las inversas generalizadas de matrices, cuya existencia fue notada primero por E. H. Moore alrededor de 1906, quien definió una inversa única llamada por él la recíproca general para cada matriz finita cuadrada o rectangular. Sin embargo, el trabajo de Moore fue cayendo en el olvido durante algunos años debido, entre otras cosas, a que usaba notación muy engorrosa, lo cual hacía su trabajo ininteligible a la mayoría.(López, 2019)

En el año 1955 Penrose, quien aparentemente desconocía el trabajo de Moore, dio una nueva definición de la misma inversa generalizada, pero cambiando el enfoque. En esta ocasión se tenía el concepto a partir de cuatro ecuaciones matriciales, una forma más sencilla de clasificar ese tipo de matrices. (García, 2011)

A partir de ese momento la inversa generalizada comenzó a conocerse con el nombre de inversa de Moore-Penrose. Esta inversa, que denotaremos $A^\dagger$, siempre existe y es única. Su aplicación más notable es la de dar solución al problema de mínimos cuadrados. (García, 2011).

1.2.1.4 Eliakim Hastings Moore

Eliakim Hastings Moore fue un matemático estadounidense nacido el 26 de enero de 1862 en Marietta, dedicó parte de su vida al trabajo matemático siendo su primer aporte en álgebra abstracta probando en 1893 la clasificación de la estructura de campos finitos también llamados campos de Galois.(Parshall y Rowe, 1994)

Hacia 1900 comienza a trabajar en los fundamentos de la geometría. Reformuló los axiomas de Hilbert para la geometría de modo que los puntos fueran la única noción primitiva, convirtiendo así las líneas y planos primitivos de David Hilbert en nociones definidas. En 1902, demostró además que uno de los axiomas de Hilbert para la geometría era redundante. Su trabajo sobre sistemas de axiomas se considera uno de los puntos de partida de la matemática y la teoría de modelos. (Parshall y Rowe, 1994)

Después de 1906 se dirigió a los fundamentos del análisis. El concepto de operador de cierre apareció por primera vez en su Introducción de 1910 a una forma de análisis general. También escribió sobre geometría algebraica, teoría de números y ecuaciones integrales.(Parshall y Rowe, 1994)

1.2.1.5 Roger Penrose

Roger Penrose, OM, FRS (nacido el 8 de agosto de 1931) es un físico matemático oriundo de Inglaterra y Profesor Emérito de Matemáticas de la Universidad de Oxford. Es reconocido por su trabajo en física matemática, en particular por sus contribuciones a la teoría de la relatividad general y a la cosmología. También ha orientado sus esfuerzos en el ámbito de las matemáticas recreativas y es un polémico filósofo. (Moreno y Ramírez, 2020) 9

1.2.2 Antecedentes académicos.

Ciriaco (2019), para optar por el título de magister se empeñó en analizar las propiedades de la inversa de grupo y su aplicación en la determinación de estados límites en una cadena de Markov donde verificó que una matriz $A = I - T$ es de índice 1 y por tanto tiene inversa de grupo, siendo I la matriz identidad y T la matriz de transición.

López (2019), en su tesis de maestría estudió la representación de una aplicación lineal a través de la inversa generalizada de Moore-Penrose y determinó que teóricamente es posible resolver un sistema de ecuaciones usando la inversa de Moore-Penrose.

Según Durán (2020), en su trabajo de maestría se planteó aplicar la inversa de Drazin en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de índice k donde concluyó que se puede expresar una solución particular de un sistema lineal compatible indeterminado de la forma $Ax = b$ en función de la inversa de Drazin, siempre que $b \in I_m, A^k, k = ind(A)$. Se ha establecido que esta solución está dada por $x = A^D b$.

Hernández (2020), en su investigación de maestría se propuso aplicar la inversa de Moore-Penrose en la determinación de estimadores mínimos cuadráticos de modelo de regresión lineal generalizados de rango no completo y determinó que la solución aproximada mínimo cuadrática siempre está garantizada dado que la inversa de Moore-Penrose de una matriz siempre existe.

Milán y Pab (2021), en su trabajo de grado pseudoinversa de Moore-Penrose: Propiedad, aplicaciones y generalización a espacios vectoriales de dimensiones infinita determinaron que la inversa de Moore-Penrose es una matriz única que se puede aplicar a diferentes algoritmos y el resultado es el mismo.

1.3 Planteamiento del problema

La inversa de una matriz es de suma importancia para resolver diversos problemas prácticos. Sin embargo, no siempre se puede asegurar que la matriz del problema que se pretende analizar sea invertible. Esto hace plantearse otras alternativas para obtener la solución y es entonces, cuando el uso de la pseudoinversa de Morre-Penrose es de utilidad, ya que no requiere condiciones de no singularidad, así como tampoco tener restricciones en el orden de la matriz.

En la actualidad, es necesario saber que este tópico, ha sido utilizado con éxito en investigaciones de diferentes ramas de las matemáticas debido a que posee propiedades únicas que dan sentido a su existencia, permitiendo que el procedimiento para el cálculo de la inversa de una matriz no cuadrada o de rango no completo sea comprensible y fiable.

Dentro de su aplicación, específicamente en álgebra lineal esta se encarga de analizar los sistemas de ecuaciones lineales ofreciendo dos ventajas: la primera es que si el sistema de ecuación lineal no homogéneo admite al menos una solución proporcionará una expresión general de dicha solución y la segunda es que si no admite solución, permitirá caracterizar una solución aproximada en sentido concreto. Por tal razón en esta investigación se pretende dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles propiedades garantizan la existencia de la inversa de Moore-Penrose?
2. ¿Cómo aplicar las propiedades de la inversa de Moore-Penrose para determinar la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales?

1.4 Justificación

En matemática, y en particular en el Álgebra lineal uno de los contenidos más relevantes es la inversa de Moore-Penrose, porque ofrece un excelente procedimiento para la resolución de sistemas de ecuaciones no homogéneos proporcionando la obtención de

un resultado aproximado o general según sea la solución. Ante lo expuesto anteriormente, la presente investigación tiene la intención de promover la inversa generalizada de Moore-Penrose como también su uso y aplicación. Del mismo modo, servirá de fuente de consulta para otro estudio relacionado con este contenido.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Analizar las propiedades de la inversa de Moore-Penrose y su aplicación en el estudio de sistemas de ecuaciones.

1.5.2 Objetivos específicos

1. Describir las propiedades que garantizan la existencia de la inversa de Moore-Penrose.
2. Aplicar las propiedades de la inversa de Moore-Penrose para determinar la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales.

1.6 Alcances y límites

Esta investigación corresponde al campo de la matemática aplicada, en específico, al área de Álgebra lineal. Se limita al estudio de las propiedades de la inversa de Moore-Penrose y su aplicación a los sistemas de ecuaciones lineales compatibles.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción.

A continuación, se definen algunos conceptos que dieron soporte al trabajo de investigación al cual se hace referencia, considerándose de utilidad para el enfoque del mismo. Esto fue mediante definiciones, proposiciones y teoremas que sustentaron el estudio.

2.2 Marco conceptual.

Matriz. Es una tabla cuadrada o rectangular de datos (llamados elementos) ordenados en filas y columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz m -por- n (escrito $m \times n$), y a m y n dimensiones de la matriz. (Barnett, 2014)

Vector. Es todo segmento de recta dirigido en el espacio.

Rango de una matriz. Dada una matriz cualquiera A de orden m se denomina rango de la matriz A y se denota por $\text{rg}(A)$ $m \times n$, al máximo número de vectores columna de A linealmente independientes. (Rosa y Sanz, 1998)

Traza de matriz. Dada una matriz cuadrada A de orden n , se define la traza de A que se denota por $\text{tr}(A)$, como el valor de la suma de todos los elementos de la diagonal principal de A . (Rosa y Sanz, 1998)

Proyección ortogonal. Si, $A^2 = A$ y $A = A^t$, entonces A es una proyección ortogonal (es decir si su inversa coincide con su traspuesta) y se denota por $P_{R(A)}$.

Ecuación. Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas (Pancorbo; Ruiz, 2015)

Sistema. Se define como una unión de partes o componentes, conectados en una forma organizada. (Gich, 1978)

Sistema de ecuación. Es un conjunto de ecuaciones que poseen incógnitas. (Bece-rra, 2016)

Sistema de ecuación lineal. Es un conjunto de ecuaciones de primer grado de las que se quiere analizar las posibles soluciones comunes. (SM Grupo, 2018)

Solución de un sistema de ecuación. Es un conjunto de valores de las incógnitas que verifica todas las ecuaciones del sistema. (SM Grupo, 2018)

Norma euclídea. Si $x \in n$, la norma euclídea del vector x se puede expresar como

$$\langle x, x \rangle = x'x = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2$$

2.3 Tipos de matrices.

Matriz identidad. Si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina matriz unidad o identidad. Se suelen representar por I_n . (Barnett, 2014)

Matriz traspuesta. Dada una matriz cualquiera A , se llama matriz traspuesta de A , y se representa por A^t a la matriz que resulta de intercambiar las filas y las columnas de A . (Barnett, 2014)

Propiedades de la matriz traspuesta:

- $(A^t)^t = A$ es decir, la traspuesta es la matriz inicial.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$

- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

Matriz traspuesta conjugada. La matriz A es traspuesta conjugada de otra si es el resultado de tomar el complejo conjugado de cada elemento de A y transponer, es decir, permutar filas por columnas, se denota por A^* . (Milán y Pab, 2021)

Matriz simétrica. Es una matriz de orden n con el mismo número de filas y columnas, donde su matriz traspuesta es igual a la matriz original. $A^t = A$. (Rosa y Sanz, 1998)

Matriz hermitiana. Es una matriz cuadrada de elementos complejos que tiene la característica de ser igual a su propia traspuesta conjugada. $A = A^*$. (Milán y Pab, 2021)

Matriz idempotente. Una matriz idempotente es aquella matriz que multiplicada por ella misma da como resultado la misma matriz. (Milán y Pab, 2021)

Matriz unitaria. Una matriz $U \in \mathbb{C}_{m \times n}$ es unitaria si sus columnas forman una base ortonormal de vectores en $\mathbb{C}_{m \times n}$.

2.4 Inversa generalizada.

Definición 2.4.1 (Matriz inversa). Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n;\mathbb{C}}$ es no singular si existe una matriz $B \in \mathcal{M}_{n;\mathbb{C}}$ que verifique:

$$AB = BA = I_n$$

Dicha matriz B se denota por A^{-1} , esta matriz recibe el nombre de inversa. (Milán y Pab, 2021)

Teorema 2.1 (Inversa). Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- A es invertible

- $\text{Det}(A) \neq 0$
- $Ax = 0$ tiene solo la solución $x = 0$

2.4.1 C –inversa de una matriz

Definición 2.4.2 (C –inversa). Dada $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, se dice que una matriz A_c de donde $n \times m$ es c –inversa, o inversa condicionada de A si y sólo si se verifica:

$$AA_cA = A \quad (2.1)$$

Ejemplo 2.4.1 La matriz

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es c –inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que $AA_cA = A$. Por la misma razón también lo es la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposición 2.4.1 Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $m \leq n$, tal que $\text{rg}(A) = r \leq m$. Se verifica que

1. Existe $A_c \in \mathcal{M}_{n \times m}$, c –inversa de A
2. Si A_c^* es una c –inversa de A , entonces para cualquier matriz B de orden $n \times m$, se tiene que la matriz

$$C = A_c^* + B - A_c^*ABAA_c^* \quad (2.2)$$

también es c –inversa de A . Además si S es una c –inversa de A , entonces S es de la forma indicada en la ecuación (2.2) con $B = S - A_c^*$

3. La c -inversa de una matriz no es única.

2.4.1.1 Propiedades

Proposición 2.4.2 Dada A y B matrices de órdenes $m \times n$ y $r \times s$ repectivamente y sus c -inversas A_c y B_c se verifica que

1. $(A_c)^t = (A^t)_c$

2. Si

$$S = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

entonces

$$S_c = \begin{pmatrix} A_c & O \\ O & B_c \end{pmatrix}$$

3. Si

$$S = \begin{pmatrix} W & X \\ A & Z \end{pmatrix}$$

con W y Z cuadradas de ordenes n y m y $X \in M_{n \times m}$ es tal que

$$\text{rg}(W|X) = \text{rg}(W) \quad \text{ó} \quad \text{rg} \left(\begin{pmatrix} W \\ A \end{pmatrix} \right) = \text{rg}(W)$$

entonces

$$|S| = |W||Z - AW_cX|$$

donde W_c es una c - inversa de W .

4. $\text{rg}(AA_c) = \text{rg}(A_cA) = \text{rg}(A)$

5. Las matrices AA_c , A_cA , $I_m - AA_c$ e $I_n - A_cA$ son idempotentes.

Proposición 2.4.3 Sea X una matriz de orden $n \times k$ con $k < n$ y $rg(X) = r < k$. Si $A = X^t X$ y A^c es una de sus c -inversas, se verifica que

- A_c^t es también c -inversa de A .
- $A_c X^t$ es una c -inversa de X .
- para cualquier c -inversa S de A , $XSX^t = XA_c X^t$.
- La matriz $XA_c X^t$ es siempre simétrica.

2.4.1.2 Cálculo de una C -inversa de una matriz

En el apartado (1) de la Proposición (2.4.1) se mostró que toda matriz tiene c -inversa a partir de la construcción de dicha c -inversa que, en general, no es única. El método allí empleado es el siguiente:

Dada A de orden $m \times n$ con $rg(A) = r \leq \min \{m, n\}$

- Si la submatriz A_{11} de A formada por sus r primeras filas y columnas es no singular, entonces es posible efectuar la partición

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Verificándose que

$$A_c = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

es c -inversa de A

- Cuando $|A_{11}| = 0$, dado que $rg(A) = r$, mediante matrices de permutaciones R y S , es posible obtener

$$RAS = B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

tal que $|B_{11}| \neq 0$, siendo

$$B_c = \begin{pmatrix} B^{-1} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}$$

una c -inversa de B .

Una c -inversa de A es

$$A_c = SB_cR$$

ya que, por la ortogornalidad de las matrices R y S

$$A = R^tBS^t$$

y como B_c es una c -inversa de B resulta

$$AA_cA = R^tBS^tSB_cRR^tBS^t = R^tBB_cBS^t = R^tBS^t = A$$

Para cualquier A_c sin necesidad de hallar matrices S y R correspondiente, bastaría efectuar las siguientes operaciones:

1. Encontrar en A una submatriz M de orden r no singular.
2. Hallar M^{-1} y trasponer dicha matriz.
3. En A reemplazar cada elemento de M por el correspondiente de $(M^{-1})^t$ y los restantes elementos por cero.
4. Trasponer la matriz obtenida en la ecuación (3),
ya que

$$A_c = SB_cR = (R^tB_c^tR)^t = \left(R^t \begin{pmatrix} (B_{11}^{-1}) & O \\ O & O \end{pmatrix} S^t \right)^t$$

y el producto de B_c^t por R^t y S^t recolecta los elementos de B_c^t en las posiciones correspondientes a los de la matriz A de partida.

Ejemplo 2.4.2 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 y una submatriz de orden dos de A con determinante no nulo es

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuya inversa esta dada por

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } (M^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta el algoritmo anterior, una c -inversa de A es

$$A_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4.2 S -inversa de una matriz

Definición 2.4.3 Dada una matriz A de orden $m \times n$ se dice que una matriz A_s de orden $m \times n$ es s -inversa de A o inversa mínimo-cuadrática si y sólo si verifica que

$$AA_sA = A, \text{ y } AA_s \text{ es simétrica}$$

Ejemplo 2.4.3 Dada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matriz

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es s -inversa de A , ya que

$$AA_sA = A, \text{ y } AA_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es simétrica.}$$

2.4.2.1 Propiedades

1. Toda s -inversa de A es también c -inversa de A .
2. Las s -inversa de una matriz A verificas las propiedades de las c -inversas excepto 1 y 2.

Proposición 2.4.4 Dada una matriz A de orden $m \times n$ se verifica que

$$A_s = (A^t A)_c A^t \quad (2.3)$$

es una s -inversa de A

1. Sea A la matriz dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

como

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

es no singular , entonces es una c -inversa y por la proposición anterior se concluye que

$$A_s = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \text{ es } s\text{-inversa de } A.$$

2. Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A^t A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{rg}(A^t A) = 2$$

Por tanto, si se considera

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

de acuerdo con el método de cálculo de c –inversas indicado en el apartado anterior resulta

$$(A^t A)_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues, de la ecuación (2.3), se obtiene que:

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una s –inversa de A

2.4.3 Inversa de Moore-Penrose

Definición 2.4.4 (Inversa de Moore). Según Milán y Pab (2021) Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ entonces la inversa generalizada de A es la única matriz A_g tal que:

$$\blacksquare AA_g = P_{R(A)}$$

$$\blacksquare A_g A = P_{R(A_g)}$$

Años más tardes, en 1955, Penrose ofreció una nueva definición de inversa generalizada.

Definición 2.4.5 (Inversa de Moore-Penrose). Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, la inversa de Moore-Penrose de A es la matriz que se denota por A_g y es la única matriz en $\mathcal{M}_{n \times m}$ que verifica:

$$\blacksquare AA_g A = A$$

$$\blacksquare AA_g \text{ es simétrica}$$

$$\blacksquare A_g A \text{ es simétrica}$$

$$\blacksquare A_g A A_g = A_g$$

Esta última definición es la que se conoce como la pseudoinversa de Moore-Penrose.

Teorema 2.2 Las definiciones de inversa generalizada dadas por Moore y Penrose son equivalentes.

2.4.3.1 Propiedades de la inversa de Moore-Penrose

Definición 2.4.6 Una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es una matriz compleja cuadrada que satisface:

$$U^* U = U U^* = I_n.$$

Teorema 2.3 Dada una matriz A de orden $m \times n$ y su matriz g -inversa A_g se verifica que:

1. Para cualquiera que sea $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, la matriz $(1/k)A_g$ es la inversa de kA .
2. $(A_g)_g = A$.
3. $(A^t)_g = (A_g)^t$.
4. Si $m = n$ y A es no singular entonces $A^{-1} = A_g$.

5. $\text{rg}(A) = \text{rg}(A_g).$

6. $(A^t A)_g = A_g A_g^t, (AA_g)_g = AA_g$ y $A_g = (A^t A)_g A^t.$

7. Para cualquier $B \in \mathcal{M}_{r \times s}$, si B_g en su g -inversa se tiene que

$$(A \otimes B)_g = A_g \otimes B_g.$$

8. Las matrices $A_g A, AA_g, I_n - A_g A$ e $I_m - AA_g$ son idempotentes. Además, $I_n - A_g A$ e $I_m - AA_g$ son simétricas.

9. Se cumplen las siguientes igualdades

$$(I_m - AA_g)A = O$$

$$A_g(I_m - AA_g) = O$$

$$(I_m - AA_g)AA_g = AA_g(I_m - AA_g) = O$$

$$(I_n - A_g A)A_g A = A_g A(I_n - A_g A) = O$$

10. Si A es simétrica entonces la g -inversa de A^2 es $(A_g)^2$.

11. Si A es simétrica e idempotente entonces $A_g = A$.

12. Si la matriz A puede particionarse en la forma

$$\left(\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline O & C \end{array} \right)$$

y B_g y C_g son las g -inversas de las submatrices B y C se tiene que

$$A_g = \left(\begin{array}{c|c} B_g & O \\ \hline O & C_g \end{array} \right)$$

13. Si es posible particionar la matriz A en la forma

$$A = \left(\begin{array}{c} B \\ \hline C \end{array} \right)$$

con $BC^t = O$ entonces

$$A_g = (B_g | C_g)$$

siendo B_g y C_g las inversas de B y C respectivamente.

14. Si $A = DE$, siendo D y E dos matrices diagonales cuyas g -inversas son D_g y E_g , respectivamente, se verifica que $A_g = E_g D_g$.
15. Si P y Q son matrices ortogonales de ordenes m y n , respectivamente, entonces $(PAQ)_g = Q^t A_g P^t$

2.4.3.2 Cálculo de la inversa de Moore-Penrose

En este apartado se recoge en primer lugar un resultado que proporciona un método para hallar la A_g de una matriz cualquiera A de orden $m \times n$ con independencia de que A sea de rango no completo o no.

Proposición 2.4.5 Sea A una matriz simétrica de orden n con $rg(A) = r \leq n$. Sean D_r una matriz diagonal de orden r cuyos elementos no nulos son los autovalores de A diferentes de cero y P_r una matriz de orden $n \times r$ cuyas columnas son los autovectores unitarios y ortogonales dos a dos de A correspondientes a sus autovalores no nulos. Se verifica entonces que la matriz

$$A_g = P_r D_r^{-1} P_r^t$$

es la A_g -inversa de A

Ejemplo 2.4.4

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $rg(A) = 2$, como

$$AA^t = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } (AA^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

$$A_g = A^t(AA^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/9 & -2/9 \\ 1/9 & 4/9 \\ -1/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

es A_g —inversa de A y

$$AA_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/9 & -2/9 \\ 1/9 & 4/9 \\ -1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

2. La matriz A definida como

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

no tiene rango completo. Ahora bien, existen matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

como $A = BC$, entonces B_g donde C_g es la A_g —inversa de C , ya calculada en el apartado (1)

$$C_g = \begin{pmatrix} 4/9 & -2/9 \\ 1/9 & 4/9 \\ -1/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

y B_g la A_g —inversa de B dada por

$$B_g = (B^t B)^{-1} B^t$$

esto es,

$$B_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$A_g = C_g B_g = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 2 & -8 & 10 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & 11 & -7 \end{pmatrix}$$

3. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene como autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$, y su rango es 2.

Teniendo en cuenta el resultado de la proposición 2.4.5, como $v_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ y $v_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ son autovectores de A ortonormales asociados a los autovalores $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$, respectivamente, si se toma

$$P_r = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$D_r = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces se verifica que

$$A_g = P_r D_r^{-1} P_r^t = \begin{pmatrix} 3/8 & -1/8 & 0 \\ -1/8 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es A_g -inversa de la matriz A

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción.

En este capítulo se detalla una serie de elementos que enmarcan los componentes metodológicos relacionados con el desarrollo de la investigación, los cuales hacen referencia al diseño, tipo, método y enfoque de la misma.

3.1.1 Aspectos metodológicos

3.1.2 Diseño de la investigación.

Según Hernández , Fernández y Baptista (2001), la investigación no experimental es aquella que se realiza sin manipular deliberadamente variables. Es decir, es la investigación donde no se hace variar intencionalmente las variables independientes. Lo que se hace en la investigación no experimental es observar fenómenos tal y como se dan en su contexto natural, para después analizarlos

Desde el punto de vista científico el diseño de intervención utilizado en esta investigación es el no experimental porque solo se enfocó en la observación de las informaciones sin influir en las variables. Con relación a la duración del estudio, el diseño fue el transversal, ya que se desarrolló en un lapso definido. De acuerdo con la búsqueda de las causas, el diseño fue descriptivo-analítico; descriptivo debido a que se interesó en recolectar información de manera independiente sin cambiar el entorno y analítico porque las informaciones recolectadas sirvieron de base para analizar la solución de sistemas lineales aplicando las propiedades de la inversa de Moore-Penrose.

3.1.3 Tipo de investigación.

Según Arias (2012), la investigación exploratoria es aquella que se efectúa sobre un tema u objeto desconocido o poco estudiado, por lo que sus resultados constituyen una

visión aproximada de dicho objeto, es decir un nivel superficial de conocimiento.

El presente estudio se fundamentó en el tipo de investigación exploratoria porque se basó en la búsqueda minuciosa de informaciones referente a dicho tema, a su vez poco estudiado. De igual forma fue de tipo descriptiva puesto que se mencionaron las propiedades y características que hicieron que la inversa de Morre-Perose fuera única. En el mismo orden de ideas, correspondió al tipo de investigación explicativa dado que se describió de forma sintética todo lo concerniente a la misma para que el análisis de los resultados obtenidos fuera entendido de manera fácil y sencilla.

3.1.4 Método de investigación.

El método de investigación que se empleó en esta tesis fue el cualitativo-deductivo; cualitativo debido a que solo se persiguió describir y profundizar el tema objeto de estudio y deductivo porque se partió de aspectos generales para llegar a conclusiones particulares.(Inacio, 2019).

3.1.5 Enfoque de la investigación.

Los autores Blasco y Pérez (2007,P.25), señalan que la investigación cualitativa estudia la realidad en su contexto natural y cómo sucede, sacando e interpretando fenómenos de acuerdo con las personas implicadas.

En esta investigación el enfoque utilizado fue de tipo cualitativo debido a que su desarrollo estuvo basado en descripciones, explicaciones y análisis sobre las definiciones, proposiciones, teoremas y sus demostraciones ya generalmente aceptados previamente.

CAPÍTULO IV PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Introducción.

En este capítulo se analizó el papel que desempeñó la inversa de Moore-Penrose en el estudio y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales compatibles. Dado que las soluciones de estos sistemas existen, se establece, en el contexto de esta inversa, una caracterización de las mismas.

4.2 Resultados

En los resultados que se presentan a continuación se establece la existencia y unicidad de la inversa de Moore-Penrose de una matriz cualquiera A de orden $m \times n$ y un método para calcularla.

Teorema 4.1 Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ se verifica que:

1. Siempre existe A_g .
2. A_g es única.

Demostración

1. Si A es la matriz nula de orden $m \times n$ es claro que la g -inversa de A es la matriz nula de orden $n \times m$.

Si se supone que $rg(A) = r > 0$, entonces por la propiedad de producto de matrices se tiene que existen C_1 y C_2 de orden $m \times r$ y $r \times n$, respectivamente, ambas con rango r tales que

$$A = C_1 C_2$$

Entonces la matriz dada por

$$A_g = C_2^t(C_2C_2^t)^{-1}(C_1^tC_1)^{-1}C_1^t$$

es una g -inversa de A , pues basta sustituir para obtener que

$$AA_gA = C_1C_2C_2^t(C_2C_2^t)^{-1}(C_1^tC_1)^{-1}C_1^tC_1C_2 = C_1C_2 = A$$

$$AA_g = C_1(C_1^tC_1)^{-1}C_1^t \quad \text{es simétrica.}$$

$$A_gA = C_2^t(C_2C_2^t)^{-1}C_2 \quad \text{es simétrica.}$$

$$A_gAA_g = C_2^t(C_2C_2^t)^{-1}(C_1^tC_1)^{-1}C_1^t = A_g$$

Así pues, siempre existe una g -inversa de una matriz A .

2. para probar la unicidad se procede por reducción al absurdo y se supone que existen dos matrices A_g y B_g de orden $n \times m$ que son inversas generalizadas de A .

Por ser A g -inversa se tiene

$$AA_gA = A$$

de donde Postmultiplicando por B_g .

$$AA_gAB_g = AB_g$$

y, dada la simetría de AB_g y AA_g resulta

$$AB_g = (AB_g)^t = AB_gAA_g = AA_g \quad (4.1)$$

De forma análoga premultiplicando por B_g en $AA_gA = A$ se obtiene:

$$B_gA = A_gA \quad (4.2)$$

Por último, de premultiplicar en la ecuación (4.1) por B_g se tiene

$$B_gAB_g = B_gAA_g$$

y de acuerdo con la ecuación (4.2) y la definición de g -inversa resulta

$$B_g = B_g A B_g = B_g A A_g = A_g A A_g = A_g$$

Es decir, la g -inversa de una matriz es única. ■

Teorema 4.2 Dada una matriz A de orden $m \times n$ se verifica que

1. Si $m \geq n$ y $\text{rg}(A) = n$ entonces

$$A_g = (A^t A)^{-1} A^t$$

es la g -inversa de A . Además se tiene que $A_g A = I_n$

2. Si $m \leq n$ y $\text{rg}(A) = m$ entonces

$$A_g = A^t (A A^t)^{-1}$$

es la g -inversa de A y además $A A_g = I_m$

3. Si $\text{rg}(A) = r \leq \min \{m, n\}$ entonces la g -inversa de A es

$$A_g = C_g B_g$$

siendo B_g y C_g las g -inversas, repectivamente, de las matrices $B \in \mathcal{M}_{m \times r}$ y $C \in \mathcal{M}_{r \times n}$ de rango r tales que $A = BC$.

Demostración

1. Dado que $\text{rg}(A) = n$, por la propiedad de la traspuesta de una matriz la matriz $A^t A$ es no singular y por tanto existe $(A^t A)^{-1}$.

La matriz A_g cumple con las condiciones indicadas en la definición (2.4.5) ya que:

$$A A_g A = A (A^t A)^{-1} A^t A = A$$

$$A A_g = A (A^t A)^{-1} A^t \text{ que es simétrica}$$

$$A_g A = (A^t A)^{-1} A^t A = I_n \text{ que es simétrica}$$

$$A_g A A_g = (A^t A)^{-1} A^t A (A^t A)^{-1} A^t = A_g$$

y, por tanto, A_g es g -inversa de A . Además, dada la expresión de A_g , es claro que $A_g A = I_n$.

2. La comprobación es análoga.

3. Si se supone que $rg(A) = r > 0$, entonces por la propiedad de producto de matrices y las condiciones de la definición (2.4.5) se tiene que

Para calcular la g -inversa de B , denotada como B_g . Como B_g es una matriz de tamaño $r \times m$ y cumple las propiedades de la g -inversa de B :

$$\begin{aligned} B_g B B_g &= B_g \\ (B_g B)^t &= B_g B \end{aligned}$$

Aplicando el mismo procedimiento para calcular la g -inversa de C , se procede a demostrar que $A_g = C_g B_g$:

$$A A_g A = (BC)(C_g B_g)(BC) = B(CC_g C)B_g = B(C_g C)B_g$$

como $CC_g C = C_g$ se puede simplificar la expresión anterior:

$$\begin{aligned} B(C_g C)B_g &= B(C_g)B_g = B_g \\ A A_g A &= B_g = A \end{aligned}$$

$$A_g A A_g = (C_g B_g)(BC)(C_g B_g) = C_g(B B_g C)_g B_g = C_g(B B_g)_g B_g$$

como $B B_g$ es una matriz cuadrada de tamaño $r \times r$. Por lo tanto podemos simplificar la expresión anterior:

$$\begin{aligned} C_g(B B_g)_g B_g &= C_g B_g \\ A_g A A_g &= C_g B_g = A_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A A_g)^t &= (BC)(C_g B_g)^t = (BC)(B_g^t)(C_g^t) = B(C B_g^t)(C_g^t) = B(C B_g^t) \\ (A A_g)^t &= B(C B_g^t) = A A_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A_g A)^t &= (C_g B_g)(BC)^t = (C_g B_g)(C^t)(B^t) = (C_g B)(gC^t)(B^t) = (C_g B)(B^t) \\ (A_g A)^t &= (C_g B)(B^t) = A_g A\end{aligned}$$

y, por tanto, la g -inversa de A es $A_g = C_g B_g$. ■

En el resultado que se presenta a continuación se caracteriza la compatibilidad de un sistema de ecuación lineal haciendo uso de la c -inversa de la matriz de coeficiente, ya que esta comparte una de las propiedades de la inversa de Moore-Penrose.

Teorema 4.3 Dado un sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b \tag{4.3}$$

con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Este sistema es compatible si y sólo si se verifica que

$$AA_c b = b$$

siendo A_c una c -inversa de la matriz A .

Demostración

Si para A_c , es c -inversa de A , se cumple que

$$AA_c b = b$$

es obvio que el sistema (4.3) es compatible, puesto que al menos $x^* = A_c b$ es solución del mismo. Recíprocamente, la condición es necesaria pues si el sistema es compatible, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax_0 = b$$

Ahora bien, dado que la c -inversa de A siempre existe. Premultiplicando la expresión anterior por AA_c se obtiene

$$AA_cAx_0 = AA_cb$$

de donde por definición de c -inversa y ser x_0 solución del sistema se tiene

$$Ax_0 = b = AA_cb$$

lo cual comprueba el resultado. ■

Ahora se establece la forma de las soluciones de un sistema compatible.

Teorema 4.4 Dado el sistema compatible

$$Ax = b$$

con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ se verifica que

1. Para todo $d \in \mathbb{R}^n$

$$x_0 = A_cb + (I_n - A_cA)d \tag{4.4}$$

es una solución del sistema.

2. Si x^* es una solución cualquiera del sistema, existe $d \in \mathbb{R}^n$ tal que x^* puede expresarse en la forma indicada en (4.4).

Demostración

1. Si x_0 es solución del sistema debe verificarse que

$$Ax_0 = b.$$

En efecto, esto es así, pues en virtud del teorema (4.4) y la definición de c -inversa

$$Ax_0 = AA_cb + A(I_n - A_cA)d = b + Ad - Ad = b$$

2. Por ser x^* una solución cualquiera del sistema se verifica que

$$b - Ax^* = 0$$

Si se premultiplica por A_c y se suma x^* en ambos miembros se obtiene

$$A_c b - A_c A x^* + x^* = x^*$$

de donde, tomando $d = x^*$ se tiene

$$x^* = A_c b + (I_n - A_c A) d$$

■

Un sistema compatible puede ser determinado o indeterminado según sea o no única solución. Para establecer la unicidad de la solución, puede utilizarse el teorema de Rouché-Fröbenio. Ahora bien, en el contexto de la generalización del concepto matriz inversa, la g -inversa de la matriz A de coeficientes del sistema permite determinar una condición necesaria y suficiente de unicidad de la solución como se establece en el siguiente resultado.

Teorema 4.5 Dado el sistema compatible

$$Ax = b$$

con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ se verifica que existe solución única x^* si y sólo si $A_g A = I_n$ siendo A_g la g -inversa de la matriz A

Demostración

La condición es necesaria.

Por ser el sistema compatible determinado se tiene que $m \geq n$ y $rg(A) = n$. Por tanto, por el teorema (4.2) apartado (1)

$$A_g = (A^t A)^- A^t$$

y

$$A_g A = I_n$$

La condición es suficiente.

Como el sistema es compatible, en virtud del teorema (4.4), para todo $d \in \mathbb{R}^n$

$$x = A_c b + (I_n - A_c A) d$$

es una solución del mismo, y obviamente también lo será

$$x = A_g b + (I_n - A_g A) d$$

Ahora bien, como A_g es única y por hipótesis $A_g A = I_n$, la solución del sistema es

$$x^* = A_g b$$



4.3 Ejemplo Numérico

Dado el sistema de ecuación

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 & = & -4 \end{array} \right\}$$

1. Calcular una c -inversa de la matriz de coeficientes.

La matriz de coeficiente es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

El rango es 3.

La submatriz M de orden r no singular es

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La inversa de la matriz anterior está dada por

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad (M^{-1})^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Remplazando en A cada elemento de M por el correspondiente de $(M^{-1})^t$ y los restantes elementos por cero y trasponer la matriz obtenida.

$$A_c = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3/2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3/2 & -1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Comprobar que el sistema es compatible haciendo uso de la matriz calculada en el apartado anterior.

Según el teorema (4.3) el sistema es compatible si y sólo si $AA_c b = b$, de donde A_c es una c -inversa de A

$$AA_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3/2 & -1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 35/2 & -7 & -11/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, como

$$AA_c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{el sistema es compatible.}$$

3. Encontrar sus soluciones con ayuda de la c -inversa de la matriz coeficientes.

Sus soluciones según el teorema (4.4) se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$x_0 = A_c b + (I_n - A_c A) d = A_c b + (I_3 - I_3) d = A_c b$$

$$A_c b = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 3/2 & -1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{siendo } d \text{ cualquier vector de } \mathbb{R}^3. \text{ Así pues } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¿ Tiene solución única ?

Para definir si tiene solución única o no se debe de calcular la A_g -inversa.

Dado el teorema (4.5) en el apartado (1) se tiene que si $rg(A) = n$ la $A_g = (A^t A)^{-1} A^t$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 3 \\ 9 & 28 & -15 \\ 3 & -15 & 17 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$(A^t A)^{-1} = \begin{pmatrix} 251/322 & -99/161 & -219/322 \\ -99/161 & 89/161 & 96/161 \\ -219/322 & 96/161 & 227/322 \end{pmatrix}$$

$$A_g = (A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 53/322 & 120/161 & 117/322 & -41/161 \\ -10/161 & -103/161 & -16/161 & 58/161 \\ -27/322 & -131/161 & -11/322 & 30/161 \end{pmatrix}$$

Luego de calcular la A_g -inversa debemos comprobar la ecuación $A_g A = I_3$ que establece el teorema (4.5) para verificar si el sistema tiene solución única.

$$\begin{aligned} A_g A &= (A^t A)^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 53/322 & 120/161 & 117/322 & -41/161 \\ -10/161 & -103/161 & -16/161 & 58/161 \\ -27/322 & -131/161 & -11/322 & 30/161 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema de ecuación tiene solución única.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

5.1 Conclusiones.

En esta investigación se ha realizado un análisis de sistemas de ecuaciones lineales a partir de inversas generalizadas de la matriz de coeficiente del sistema. En tal sentido se ha llegado a las siguientes conclusiones:

1. Dentro de las distintas generalizaciones del concepto de matriz inversa, las que más se relacionan con el análisis y resolución de los sistemas de ecuaciones lineales tanto compatibles como incompatibles son las c -inversas, las s -inversas y la g -inversa o inversa de Moore-Penrose de una matriz. Tanto las matrices c -inversas como las s -inversas siempre existen y no son únicas. La g -inversa existe siempre y es única.
2. La compatibilidad de un sistema lineal de la forma $Ax = b$ está caracterizada por una c -inversa de la matriz A , es decir, si el sistema $Ax = b$ es compatible entonces $AA_c b = b$ y si $AA_c b = b$ entonces el sistema es compatible ya que $x_0 = A_c b$ es solución del mismo.
3. También las soluciones de los sistemas compatibles pueden expresarse en función de una c -inversa de la matriz de coeficientes del sistema, es decir, todo sistema compatible tiene solución de la forma $x_0 = A_c b + (I_n - A_c A)d = b$, donde d es un vector arbitrario en $\mathbb{R}^n$.
4. Los sistemas compatibles determinados están caracterizados por la g -inversa de la matriz de coeficientes del sistema. Si el sistema $Ax = b$ es compatible determinado entonces $A_g A = I_n$ y, recíprocamente, si $A_g A = I_n$ entonces el sistema $Ax = b$ es compatible determinado.

5.2 Líneas futuras de investigación.

1. Considerar sistemas de ecuaciones donde la matriz de coeficientes tenga una estructura de bloques para realizar las caracterizaciones en función de los bloques.
2. Considerar otras inversas generalizadas para el análisis de los sistemas de ecuaciones lineales.

Referencias

- Arias, F. G. (2012). El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica. 6ta. Fideas G. Arias Odón.
- Blasco, J. y Pérez, J. (2007). Metodologías de investigación en educación física y de deporte: Ampliando horizontes. Alicante, España. Editorial Club Universitario. Imprenta Gamma
- Barbolla, R. y Sanz, P. (1998). Álgebra lineal y teoría de matrices. Madrid: PRENTICE HALL.
- Barnett, Z. B. (2014). Álgebra. México : McGrawHill.
- Becerra, J. M. (2016). Sistemas de ecuaciones. México.
- Burgo, E. (2018). Historia de los sistemas de ecuaciones lineales. StuDocu.
- Ciriaco, Y. O. (2019). Propiedades de la Inversa de Grupo y su Aplicación en la Determinación de Estados Limites en una Cadena de Markov. República Dominicana.
- Durán, P. M. (2020). Aplicación de la inversa de Drazin en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de índices k . República Dominicana.
- García, B. S. (2011). Las inversas generalizadas de las matrices. Puebla Pue.
- Gich, V. (1978). Teoría general de sistemas aplicada. México.
- Guzmán, M. L. (2020). Análisis de sistemas singulares de ecuaciones lineales a partir de la

generalización del concepto de matriz inversa. República Dominicana.

Hernandez, Fernandez y Baptista. Metodología de la Investigación. Editorial Mc Graw Hill. Mexico. 2001

Hernández, R. H. (2020). Aplicación de la inversa de Moore-Pensore en la Determinación de Estimadores Mínimo Cuadrático de Regresión Lineal Generalizados de rango no completo. República Dominicana.

Inacio, E. J. H. (2019). Método de investigación.

López , I. y Ruiz, C. (2005). Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Cap-Madrid, Consejería de educación.

López, O. r. (2019). Representación matricial de una aplicación lineal a través de la inversa generalizada de Moore-Penrose Aplicaciones. Lima, Perú.

Lorenzo, M. (2010). Historia de las ecuaciones. Slideshare.

Milán, I.y Pab, F. (2021). Pseudoinversa de Moore-Pensore:Propiedades, aplicaciones y generalización a espacios vectoriales de dimension infinitas. Salamanca.

Moreno, V. y Ramírez, M. (2020). Biografía de Roger Penrose.

Pancorbo, L. y Ruíz , G. (2015). Matemáticas 1.2. Barcelona.

Parshall, K. y Rowe, D. (1994). El surgimiento de la comunidad estadounidense de investigación matemática.

Rosa, B. y Sanz, P. (1998). Álgebra lineal y Teoría de matrices. Madrid.

SM Grupo. (2018). Sistemas de ecuaciones e inecuaciones. Centro de recurso chileno.

Thome, N. (2019). La inversa generalizada de Moore-Penrose y aplicaciones. México.