

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Tesis de Maestría en Matemática

TÍTULO

Análisis comparativo de los métodos de Halley y Chebychev para resolver ecuaciones de orden superior.

SUSTENTANTE

Pablo Agustín Jerez Durán

ASESOR

José Miguel Gómez Guzmán, MA

Cotuí, Prov. Sánchez Ramírez, Rep. Dom.

Año Académico 2024.

TÍTULO

**ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS MÉTODOS DE HALLEY Y CHEBYCHEV
PARA RESOLVER ECUACIONES DE ORDEN SUPERIOR.**

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación , es responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y consultas bibliográfica se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que, se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo se requiere de su autorización.

Análisis comparativo de los métodos de Halley y Chebychev para resolver ecuaciones de orden superior.

Composición del tribunal evaluador

Dr. Manuel Aurelio Diloné Alvarados

Metodología

MA. Wilson Lucilo Heredia

Contenidos

MA. Nelson Sánchez

Redacción

Índice general

Declaración de Autoría	III
AGRADECIMIENTOS	VII
DEDICATORIA	VIII
Resumen	IX
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes.	1
1.2.1 Antecedentes históricos.	1
1.2.2 Antecedentes históricos del método de Halley	3
1.2.3 Desarrollo Históricos del Método de Chebyshev.	5
1.2.4 Antecedentes académicos	6
1.3 Planteamiento del problema	7
1.4 Justificación	8
1.5 Objetivos	9
1.5.1 Objetivo general	9
1.5.2 Objetivos específicos	9
1.6 Alcances y límites	10
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	11
2.1 Introducción	11
2.2 Marco teórico	11
2.2.1 Ecuaciones no lineales y de orden superior	11
2.2.2 Métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales	12
2.3 Descripción del método de Halley	14
2.4 Descripción del método de Chebyshev	23
2.4.1 Análisis de convergencia y estabilidad numérica	26
CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO	31
3.1 Introducción	31

3.2	Marco metodológico	31
3.2.1	Diseño de la investigación	31
3.2.2	Tipo de investigación	31
3.2.3	Método de la investigación	32
3.2.4	Enfoque de la investigación	32
3.3	Procedimientos	33
CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE RESULTADOS		34
4.1	Introducción	34
4.2	Implementación de los métodos de Halley y Chebyshev	34
4.2.1	Entorno de programación	34
4.2.2	Implementación del método de Halley	35
4.2.3	Implementación del método de Chebyshev	36
4.2.4	Verificación de la implementación	37
4.3	Diseño de experimentos numéricos	38
4.3.1	Selección de ecuaciones no lineales y de orden superior	38
4.3.2	Escenarios de prueba	39
4.4	Evaluación y comparación de los métodos	39
4.4.1	Métricas de evaluación	39
4.4.2	Resultados para la ecuación polinómica $x^3 - x - 2 = 0$	41
4.4.3	Resultados para la ecuación trascendental $\cos(x) - x = 0$	42
4.4.4	Resultados para la ecuación con raíz múltiple: $(x - 1)^3 = 0$	42
4.4.5	Resultados para la ecuación de orden superior: $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$	43
4.5	Análisis de estabilidad numérica y eficiencia computacional	43
4.5.1	Sensibilidad a errores de redondeo	44
4.5.2	Escalabilidad con el orden de la ecuación	45
4.6	Discusión de resultados	45
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES		48
5.1	Introducción	48

5.2 Conclusiones	48
5.3 Líneas futuras de investigación	50
Bibliografía	51
Anexo	53
Anexo A: Entorno de programación de los métodos de Halley y Chebyshev	54
Anexo B: Gráfico de convergencia para la ecuación de referencia con soluciones conocidas	59
Anexo C: Gráfico de convergencia para la ecuaciones del análisis comparativo .	61

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a **Dios** por su compañía en este largo trayecto de maestría, siendo fortaleza en momentos difíciles y de debilidad. Su presencia ha brindado una vida llena de aprendizajes, experiencias y felicidad.

Al coordinador **Manuel Arismendy Batista** y a mi asesor **José Miguel Gómez** por su apoyo invaluable, paciencia y consejos durante todo el proceso de investigación y elaboración de esta tesis, elementos fundamentales para alcanzar este logro.

A mis **padres**, por su apoyo incondicional y fe inquebrantable. Su amor y confianza han proporcionado la fuerza necesaria para alcanzar las metas propuestas. A la **esposa**, por el respaldo incondicional y la confianza constante en que, con esfuerzo y la ayuda de Dios, todo es posible.

A los **amigos**, por su compañía y apoyo emocional. Gracias por comprender las debilidades y estar siempre presentes en los momentos de mayor necesidad. La gratitud hacia ellos será eterna.

A los **compañeros** de estudio y colegas, por los momentos compartidos y el intercambio de ideas que enriquecieron este trabajo.

Finalmente, un agradecimiento especial a **UTECO** por abrir sus puertas y recibir en su campo de estudio, además de proporcionar las herramientas y el ambiente propicio para desarrollar esta investigación.

Gracias a todos por ser parte de este logro.

DEDICATORIA.

Este proyecto se los dedico a mis **Padres**, guías incansables en momentos de fortaleza y debilidad, fuente de apoyo y alegría. Sus sabios consejos y constante compañía han enseñado el valor de la perseverancia.

Dedico también a los maestros **Arismendy, José Miguel, Rainier y Víctor Galán** por ayudarme enormemente y por sus consejos tan valiosos que no tienen precio. Gracias siempre por ser maravillosos profesores.

A los entrañables **compañeros de la maestría y amigos**, se extiende un profundo agradecimiento por la amistad brindada, la valiosa colaboración y el apoyo incondicional durante todo este proceso.

A la universidad **UTECO**, por el apoyo brindado y por contar con un equipo de profesionales, lo cual ha sido fundamental para el desarrollo de mi investigación.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
UTECO

Facultad De Postgrado y Educación Continuada



Maestría en matemáticas

Título: Análisis comparativo de los métodos de Halley y Chebychev para resolver ecuaciones de orden superior.

Sustentante: Pablo Agustín Jerez Durán

Dirigido por: José Miguel Gómez Guzmán

RESUMEN

Este estudio presenta un análisis comparativo exhaustivo de los métodos de Halley y Chebyshev para la resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior. El objetivo principal fue evaluar y comparar el rendimiento de estos métodos en términos de convergencia, precisión, estabilidad numérica y eficiencia computacional.

Se implementaron ambos métodos en Python, utilizando bibliotecas científicas como NumPy, SciPy y SymPy. Se diseñaron experimentos numéricos que abarcaron una variedad de ecuaciones, incluyendo polinómicas, trascendentales, con raíces múltiples y de orden superior. Se evaluaron métricas como el número de iteraciones hasta la convergencia, error absoluto final, tiempo de ejecución y orden de convergencia observado. Además, se analizó la sensibilidad a errores de redondeo y la escalabilidad con el orden de la ecuación.

Ambos métodos demostraron convergencia cúbica, con el método de Halley generalmente requiriendo menos iteraciones. Se alcanzaron altos niveles de precisión, llegando hasta 15

decimales en muchos casos. El método de Halley mostró una ligera ventaja en estabilidad numérica y eficiencia computacional, mientras que el método de Chebyshev demostró un mejor manejo de ecuaciones con raíces múltiples.

Los métodos de Halley y Chebyshev son efectivos para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior. El método de Halley muestra una ligera ventaja en velocidad de convergencia y estabilidad numérica, pero la elección entre estos métodos puede depender de la naturaleza específica de la ecuación. Este estudio proporciona una base sólida para la selección del método más apropiado en diversos escenarios y sugiere líneas futuras de investigación, incluyendo el estudio de estos métodos en sistemas de ecuaciones no lineales y el desarrollo de versiones híbridas o modificadas.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

En este capítulo se presenta un conjunto de investigaciones que guardan estrecha relación con el tema de esta investigación y que funcionarán como marco de referencia para el desarrollo de este proyecto. Las investigaciones en cuestión constituyen los antecedentes históricos y académicos y hacen referencia a los métodos de Halley y Chebychev, así como a su aplicación en la resolución de ecuaciones de orden superior.

Además, este capítulo incluye el planteamiento del problema, los objetivos, la justificación de la investigación y los alcances del estudio, elementos que ilustran lo que se persigue conseguir con este proyecto.

1.2 Antecedentes.

1.2.1 Antecedentes históricos.

1.2.1.1 Origen y desarrollo de los métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales

Los métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales tienen sus orígenes en el desarrollo del cálculo diferencial e integral durante los siglos XVII y XVIII. El método de Newton, propuesto por Isaac Newton en 1669, fue uno de los primeros y más influyentes métodos iterativos para encontrar raíces de ecuaciones no lineales (Ralston & Rabinowitz, 2001).

El método de Newton se basa en la idea de construir una sucesión de aproximaciones mejoradas a la solución de una ecuación utilizando la información proporcionada por la derivada de la función en un punto dado. A pesar de su importancia histórica, el método de Newton tiene algunas limitaciones, como una convergencia lenta en ciertas regiones y

una alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

A partir del siglo XIX, varios matemáticos comenzaron a explorar variantes y mejoras del método de Newton, buscando superar sus limitaciones y mejorar su eficiencia y estabilidad numérica. Estos esfuerzos dieron lugar a una variedad de métodos iterativos, como los métodos de Chebyshev, Halley, Householder, entre otros (Householder, 1970).

Durante el siglo XX, el desarrollo de los computadores digitales impulsó un mayor interés en los métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales de manera eficiente. Esto llevó a la exploración de nuevos enfoques, como los métodos de punto fijo, los métodos de cuasi-Newton y los métodos de continuación (Ortega & Rheinboldt, 1970).

1.2.1.2 Contribuciones de Halley y Chebychev en el campo del análisis numérico (Householder, 1970)

Edmond Halley (1656-1742), conocido principalmente por sus contribuciones en astronomía, también realizó importantes aportes en el campo del análisis numérico. En 1694, Halley propuso un método iterativo para resolver ecuaciones no lineales que mejoraba la convergencia del método de Newton al incorporar información adicional sobre la segunda derivada de la función (Householder, 1970). El método de Halley, también conocido como el método de la tercera aproximación de Newton, tiene una convergencia cuadrática, lo que significa que el número de dígitos correctos se duplica en cada iteración. Este método ha sido ampliamente utilizado en diversos campos y ha servido como base para el desarrollo de otros métodos iterativos más avanzados.

Por otro lado, Pafnuty Chebychev (1821-1894), uno de los matemáticos más influyentes del siglo XIX, realizó importantes contribuciones en el campo del análisis numérico. Chebychev desarrolló una familia de polinomios, conocidos como polinomios de Chebyshev, que tienen propiedades únicas y son ampliamente utilizados en aproximación numérica, interpolación y análisis de Fourier (Householder, 1970).

Además, Chebychev propuso un método iterativo para resolver ecuaciones no lineales, conocido como el método de Chebychev. Este método se basa en la construcción de una sucesión de polinomios de Chebyshev que convergen a la solución de la ecuación. El método de Chebychev tiene una convergencia más lenta que el método de Newton o Halley, pero es más robusto y estable numéricamente en ciertos casos.

Las contribuciones de Halley y Chebychev en el campo del análisis numérico han sido fundamentales para el desarrollo de métodos eficientes y confiables para resolver ecuaciones no lineales, y sus trabajos han sentado las bases para investigaciones posteriores en este campo.

1.2.2 Antecedentes históricos del método de Halley

De acuerdo con Eggen(2023), Edmund Halley nace el 8 de noviembre según el calendario gregoriano y 29 de octubre según calendario juliano en el distrito de Haggerston, ciudad de Londres, muere el 14 de enero de 1742 en Greenwich, Inglaterra. Éste fue un astrónomo, matemático y físico inglés, quien realizó el cálculo de la órbita del cometa Halley. Fue amigo de Isaac Newton y miembro de la Royal Society.

En correspondencia con Scavo y Thoo(1995), Halley quedó impresionado por el trabajo del ingenioso profesor de matemáticas Thomas Fautet de Lagny, quien publicó un libro en París en 1692, donde presentó fórmulas que servían para la extracción de raíces de potencias puras, de manera especial, la raíz cúbica. El resultado que impresionó a Halley fue el de la raíz de $\sqrt[3]{a^3 + b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ el cual se encuentra entre

$$a + \frac{ab}{3a^3 + b} \quad y \quad \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}} \quad para \quad a^3 > b > 0 \quad (1.1)$$

Estas fórmulas fueron nombradas por Halley como fórmulas racional e irracional, respectivamente. Cada caso es especial, sin embargo, Halley prefirió la fórmula irracional antes que la racional debido al gran divisor que posee ésta última, lo que significa que dificultaría el

trabajo del cálculo en algunas aplicaciones.

De acuerdo a Ezquerro(2001), Halley inició su demostración de la fórmula de Lagny tratando de conseguir un término corrector ε de forma que $(a + \varepsilon)^3 = a^3 + b$ lo cual lo lleva a $b = 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3$. obviando el término ε^3 quedando expresado como $b \approx 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2$ de donde se pueden tener cálculos aproximados para ε como se muestra a continuación

$$\frac{b}{3a^2} \approx \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{a} \approx \varepsilon \quad (1.2)$$

$$\varepsilon \approx \frac{b}{3a^2 + 3a\varepsilon} \quad (1.3)$$

luego al reemplazar (1.2) en (1.3) se obtiene

$$\varepsilon \approx \frac{b}{3a^2 + 3a \frac{b}{3a^2}} = \frac{ab}{3a^3 + b}$$

$\therefore$ la aproximación para la forma racional de Lagny estaría dada por:

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx \frac{ab}{3a^3 + b} \quad (1.4)$$

Usando esta notación, definiendo $f(x) = x^3 - a^3 - b$ y tomando $x_0 = a$, entonces la expresión (1.4) corresponde a lo que sería el primer paso del Método de Halley expresado de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.5)$$

de donde

$$L_f x_n = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} \quad (1.6)$$

Según Scavo y Thoo(1995), Halley también admiraba el trabajo del matemático francés del siglo XVI, François Viète, popularizador de lo que más tarde se conocería como el *método de Horner* una técnica de aproximación iniciada por varios matemáticos chinos en el siglo XII. El método de Viète, como se le suele llamar, es un algoritmo lineal convergente

similar al método de la Bisección y se le puede aplicar a cualquier polinomio que por lo menos tenga una solución real. También se puede usar para producir valores iniciales del método de Newton-Raphson y de otros métodos iterativos de orden superior, algo que el mismo Halley podría haber hecho. Al parecer, el método de Viète fue un importante precursor del método de Halley y de los métodos de búsqueda de raíces en general como el Newton-Raphson. Halley, al escribir su artículo en el año 1694, aparentemente no se percató de que su método hacía uso de las derivadas o fluxiones, como él lo habría llamado.

De acuerdo con Kollerstrom (1992), ésto no es sorprendente considerando que fue Simpson en 1740 quien conectara las derivadas con el método de Newton-Raphson; lo que es verdaderamente sorprendente es que Brook Taylor reconociera la derivada para el método de Halley en 1712, Feigenbaum (1985), es decir, notó lo que Halley no había logrado comprender: que los coeficientes en los ejemplos de Halley están directamente relacionados con las derivadas sucesivas del polinomio original.

A pesar del gran avance que tuvo Taylor, no pudo lograr una fórmula general para el método de Halley. Quien pudo obtener este gran alcance un siglo después fue Schrödinger, al derivar la función de iteración lo que conocemos hoy en día como el método de Halley. En su artículo Schröder E. (1870), hace mención a la fórmula del Halley de una manera muy pasajera debido a que estaba interesado en las funciones de iteración orden superior, por consiguiente Kobal(2002), en un artículo publicado en 1891 presentó la derivada de la fórmula de Halley pero por desgracia ésta quedó confusa . Luego, Frame(1944) tuvo éxito al derivar por primera vez la función de iteración usando el polinomio de Taylor de segundo grado.

1.2.3 Desarrollo Históricos del Método de Chebyshev.

De acuerdo a Chain (1895), las obras de Chebyshev llevan el sello de la grandeza. Se derivan nuevos métodos para resolver muchos problemas difíciles propuestos hace mucho tiempo. históricamente, una de las obras de más relevancia es titulada, Cálculo de las raíces de ecuaciones, que terminó a mediados de 1838, el mismo derivó una aproxima-

ción algorítmica para la solución de ecuaciones algebraicas $y = f(x)$ de n -ésimo grado, basándose en el algoritmo de Newton y usando el desarrollo en serie de la función inversa de f . Chebyshev notó que los polinomios de mayor grado que se obtenían de estas operaciones, generaban convergencia más rápida, esto sin tomar en cuenta el coste operacional.

El trabajo no publicado en su momento, fue premiado con la medalla de plata en un concurso para jóvenes investigadores, patrocinado por el departamento de física y matemática de la universidad de Moscú donde este estudiaba y es allí donde por primera vez su trabajo sale a la luz en el año 1840.

Hubo que esperar más de 50 años para que este trabajo viera la luz, en las obras completas que se publicaron en ruso, y fue en el quinto volumen, publicado en 1951, dedicado a otros trabajos y materiales biográficos, donde aparece publicado (Cálculo de las raíces de ecuaciones).

Según Chebyshev (1859), destaca que donde sienta las bases de su teoría de aproximación es al formular el siguiente problema: Dada una función continua $f(x)$, encontrar un polinomio de grado dado, tal que el máximo de la desviación de $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, sea más pequeño que el de los otros polinomios del mismo grado. En este trabajo también aparecen por primera vez los polinomios que llevan su nombre. Temáticamente, el trabajo total de Chebyshev sobre aproximación incluye la teoría de polinomios ortogonales, interpolación, teoría de momentos, método de cuadraturas y fracciones continuas.

1.2.4 Antecedentes académicos

En las últimas décadas, se han realizado numerosos estudios comparativos de diferentes métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales.

Sharma y Guha (2007) compararon la eficiencia y precisión de varios métodos, incluyendo los métodos de Halley y Chebyshev, para resolver ecuaciones cúbicas.

Noor y Noor (2007) analizaron la convergencia de una clase de métodos iterativos

que incluyen el método de Halley.

Chun y Ham (2008) propusieron una modificación del método de Halley y compararon su rendimiento con otros métodos.

Herzberger (2009) editó un libro que recopila avances recientes en métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales, incluyendo análisis de convergencia y estabilidad numérica.

1.3 Planteamiento del problema

Los métodos numéricos desempeñan un papel fundamental en la resolución de ecuaciones diferenciales y algebraicas en diversas disciplinas científicas y de ingeniería. Entre estos métodos, el método de Halley y el método de Chebyshev son ampliamente utilizados para resolver ecuaciones de orden superior. Sin embargo, a pesar de su popularidad, existe la necesidad de una comprensión más profunda y comparativa de estos métodos para mejorar su eficiencia y precisión en diferentes contextos.

El objetivo principal de este análisis comparativo es evaluar el desempeño y la eficiencia de los métodos de Halley y Chebyshev en la resolución de ecuaciones de orden superior. Lo cual implica comparar diversos aspectos, como la velocidad de convergencia, la precisión de los resultados, la estabilidad numérica y el coste computacional asociado a cada método.

En este contexto, surge la pregunta de investigación: ¿Cómo se comparan los métodos de Halley y Chebyshev en la resolución de ecuaciones de orden superior en términos de velocidad de convergencia, precisión de los resultados, estabilidad numérica y coste computacional?

Ademas de algunas preguntas clave que son abordada :

- ¿Cómo se implementan los métodos de Halley y Chebyshev en un entorno de programación adecuado para realizar experimentos numéricos?

- ¿Qué resultados se obtienen al diseñar y ejecutar un conjunto de experimentos numéricos que cubran diferentes tipos de ecuaciones no lineales y de orden superior, así como diversos escenarios iniciales?
- ¿Cómo se comparan la convergencia, precisión y estabilidad numérica de los métodos de Halley y Chebyshev utilizando métricas apropiadas?

1.4 Justificación

La resolución eficiente y precisa de ecuaciones no lineales y de orden superior es un desafío crucial en diversos campos de aplicación. En ingeniería, por ejemplo, estas ecuaciones surgen en la modelización de sistemas complejos, como la dinámica de fluidos, la mecánica estructural y la electrónica. En física, aparecen en la descripción de fenómenos naturales, como la mecánica cuántica, la relatividad y la termodinámica. En economía y finanzas, se encuentran en modelos de crecimiento económico, valoración de activos y análisis de riesgo. La capacidad de resolver estas ecuaciones de manera rápida y confiable es esencial para obtener resultados significativos y tomar decisiones informadas en estos campos.

Sin embargo, debido a la complejidad y no linealidad de estas ecuaciones, a menudo no es posible obtener soluciones analíticas exactas. En su lugar, se recurre a métodos numéricos iterativos que proporcionan aproximaciones sucesivas a la solución. Estos métodos parten de una estimación inicial y mediante un proceso de refinamiento convergen hacia la solución buscada. La elección del método iterativo adecuado es crucial, ya que puede tener un impacto significativo en la eficiencia y precisión del proceso de resolución.

Entre los diversos métodos iterativos disponibles, el método de Halley y el método de Chebyshev han ganado popularidad debido a sus propiedades atractivas. Ambos métodos presentan un orden de convergencia cúbico, lo que significa que el error se reduce rápidamente en cada iteración. Esta rápida convergencia es especialmente beneficiosa cuando se requieren soluciones de alta precisión o cuando se trabaja con ecuaciones particularmen-

te complejas. Además, estos métodos han demostrado una buena estabilidad numérica, lo que los hace robustos frente a errores de redondeo y perturbaciones en los datos de entrada. A pesar de estas ventajas, la elección entre el método de Halley y el método de Chebyshev no siempre es clara. Cada método tiene sus propias fortalezas y limitaciones, y su desempeño puede variar según las características específicas de la ecuación a resolver. Por lo tanto, un análisis comparativo riguroso de estos métodos es fundamental para guiar a los profesionales e investigadores en la selección del enfoque más apropiado para sus problemas particulares. Este análisis debe considerar aspectos como la velocidad de convergencia, la precisión alcanzada, la estabilidad numérica y la eficiencia computacional en diferentes escenarios. Al comprender las ventajas y desventajas de cada método, los usuarios podrán tomar decisiones informadas y optimizar el proceso de resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior en sus respectivos campos de aplicación.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Realizar un análisis comparativo detallado de los métodos de Halley y Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior, evaluando su convergencia, precisión, estabilidad numérica y eficiencia computacional.

1.5.2 Objetivos específicos

- Implementar los métodos de Halley y Chebyshev en un entorno de programación adecuado para realizar experimentos numéricos.
- Diseñar un conjunto de experimentos numéricos que cubran diferentes tipos de ecuaciones no lineales y de orden superior, así como diversos escenarios iniciales.
- Evaluar y comparar la convergencia, precisión y estabilidad numérica de los métodos de Halley y Chebyshev utilizando métricas apropiadas.

1.6 Alcances y límites

Este proyecto se centrará en el análisis comparativo de los métodos de Halley y Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior. Se considerarán ecuaciones con coeficientes reales y se evaluarán diferentes condiciones iniciales.

El proyecto no abarcará ecuaciones con coeficientes complejos ni sistemas de ecuaciones no lineales. Los experimentos numéricos se llevarán a cabo utilizando un lenguaje de programación adecuado, como Python, y se proporcionarán detalles sobre la implementación y los parámetros utilizados. Los resultados se presentarán mediante tablas, gráficos y análisis estadísticos para facilitar su interpretación.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta el marco teórico que sustenta el análisis comparativo de los métodos de Halley y Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior. Se abordarán los conceptos fundamentales de las ecuaciones no lineales y de orden superior, así como los métodos iterativos más relevantes para su resolución. Se hará especial énfasis en los métodos de Halley y Chebyshev, detallando sus fórmulas iterativas, propiedades de convergencia y análisis de estabilidad numérica. Además, se revisarán otros temas relevantes, como la selección de condiciones iniciales y la evaluación de la eficiencia computacional.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Ecuaciones no lineales y de orden superior

Las ecuaciones no lineales son aquellas en las que la variable dependiente aparece en términos no lineales, como exponentes, logaritmos o funciones trigonométricas. Estas ecuaciones son fundamentalmente diferentes de las ecuaciones lineales, donde la variable dependiente solo aparece en términos de primer grado. La no linealidad introduce una complejidad adicional en la resolución de estas ecuaciones, ya que no se pueden aplicar directamente métodos como la eliminación gaussiana o la sustitución directa (Burden & Faires, 2011).

Las ecuaciones no lineales pueden tomar diversas formas y surgir en una amplia gama de aplicaciones. Algunos ejemplos comunes incluyen ecuaciones polinómicas de grado superior a uno, ecuaciones exponenciales, ecuaciones logarítmicas y ecuaciones trigonométricas. Estas ecuaciones a menudo modelan fenómenos físicos, químicos, biológicos y económicos, donde la relación entre las variables es no lineal (Chapra & Canale, 2010).

Por otro lado, las ecuaciones de orden superior son aquellas cuyo grado es mayor que uno. El grado de una ecuación se refiere al exponente más alto de la variable dependiente. Por ejemplo, una ecuación cuadrática (de segundo grado) es una ecuación de orden superior, al igual que las ecuaciones cúbicas (de tercer grado) y las ecuaciones de cuarto grado o superiores. A medida que aumenta el grado de la ecuación, también aumenta la complejidad para encontrar sus soluciones (Burden & Faires, 2011).

La resolución analítica de ecuaciones no lineales y de orden superior a menudo no es posible o práctica. Aunque existen fórmulas cerradas para resolver ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas, no existen fórmulas generales para ecuaciones de quinto grado o superiores, según el teorema de Abel-Ruffini (Rosen, 2019). Además, incluso cuando existen fórmulas, pueden ser engorrosas y propensas a errores numéricos.

Dado que las soluciones exactas no siempre se pueden obtener, se recurre a métodos numéricos iterativos para aproximar las soluciones de ecuaciones no lineales y de orden superior. Estos métodos proporcionan una secuencia de aproximaciones que convergen hacia la solución verdadera, dentro de una tolerancia especificada. La elección del método iterativo adecuado es crucial para garantizar una convergencia rápida, precisa y estable (Burden & Faires, 2011).

2.2.2 Métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales

Los métodos iterativos son algoritmos que generan una secuencia de aproximaciones sucesivas que convergen hacia la solución de una ecuación no lineal. Estos métodos parten de una estimación inicial de la solución y utilizan fórmulas de recurrencia para mejorar gradualmente la aproximación en cada iteración (Kelley, 2003).

El proceso iterativo continúa hasta que se cumple un criterio de convergencia, como la diferencia entre aproximaciones sucesivas o el valor absoluto de la función evaluada en la aproximación actual. La elección del criterio de convergencia depende de la precisión

deseada y de las características específicas del problema (Burden & Faires, 2011).

Algunos de los métodos iterativos más conocidos para resolver ecuaciones no lineales incluyen:

1. Método de bisección: Este método divide repetidamente un intervalo que contiene la solución en dos mitades y selecciona el subintervalo en el que la función cambia de signo. Aunque es un método simple y robusto, su convergencia es lenta (Burden & Faires, 2011).

$$r_n = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n) \cdot f(r_n) < 0 \\ r_n & \text{si } f(a_n) \cdot f(r_n) > 0 \end{cases}, \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } f(b_n) \cdot f(r_n) < 0 \\ r_n & \text{si } f(b_n) \cdot f(r_n) > 0 \end{cases}$$

2. Método de Newton: También conocido como método de Newton-Raphson, utiliza la derivada de la función para aproximar la solución. Tiene una convergencia cuadrática, lo que significa que el número de dígitos precisos se duplica en cada iteración. Sin embargo, requiere el cálculo de la derivada y puede divergir si la estimación inicial no es adecuada (Kelley, 2003).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

3. Método de la secante: Es una variación del método de Newton que no requiere el cálculo explícito de la derivada. En su lugar, utiliza una aproximación de la derivada basada en dos aproximaciones anteriores. Tiene una convergencia superlineal, aunque no tan rápida como el método de Newton (Burden & Faires, 2011).

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

4. Método de punto fijo: Este método reformula la ecuación no lineal como un problema de punto fijo y utiliza iteraciones de función para aproximar la solución. Su convergencia depende de las propiedades de la función de iteración y puede ser lineal, superlineal o cuadrática (Kelley, 2003).

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Además de estos métodos básicos, existen diversos métodos iterativos más avanzados, como los métodos de Halley y Chebyshev, que ofrecen una convergencia de orden superior y mejoran la eficiencia en la resolución de ecuaciones no lineales (Amat & Busquier, 2007). La elección del método iterativo adecuado depende de varios factores, como la naturaleza de la ecuación, la disponibilidad de derivadas, la precisión requerida y la eficiencia computacional. Cada método tiene sus propias fortalezas y limitaciones, y es importante comprender sus características para seleccionar el más apropiado para un problema dado (Burden & Faires, 2011).

2.3 Descripción del método de Halley

El método de Halley es un algoritmo numérico el cual puede ser utilizado para resolver ecuaciones no lineales de la forma:

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

para el cual produce valores que por medio a su aproximación se espera que muestren el valor esperado para la solución de la ecuación. también este método puede ser expresado de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.2)$$

otra forma que se utiliza para expresarlo es la convexidad logarítmica en la cual su expresión resulta de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}L_f(x_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2.3)$$

Donde $L_f(x_n)$ es la función de convexidad logarítmica, definida como:

$$L_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{[f'(x_n)]^2}$$

La convexidad logarítmica proporciona una interpretación geométrica del método de Halley y está relacionada con la curvatura de la función en el punto de iteración.

Partiremos de estas situaciones y de Diloné (2013) para así deducir la descripción del mencionado método, el cual se puede manejar por distintas técnicas que a través del tiempo le han permitido múltiples aplicaciones a las funciones, entre las cuales se encuentran:

2.3.0.1 A partir del desarrollo de Taylor

Dado el siguiente polinomio de Taylor de segundo grado

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2,$$

donde x_n es una raíz aproximada de (2.1). Aquí el objetivo es determinar un punto x_{n+1} donde la gráfica de $f(x)$ corta a X lo que sería resolver la siguiente ecuación:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2, \quad (2.4)$$

si factorizamos el término $(x_{n+1} - x_n)$ de la ecuación (2.4) se obtiene

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) \left(f'(x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n)(x_{n+1} - x_n) \right),$$

luego

$$x_{n+1} - x_n = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)}$$

Si se aplica la corrección de Newton $\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$ y así aproximamos la diferencia de $x_{n+1} - x_n$ se obtiene que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

lo que sería la función de iteración del método de Halley.

2.3.0.2 Construcción Geométrica: Método de las Hipérbolas Tangentes

Aparentemente fue Salehov el primero en sugerir que la función iteración de Halley podría derivarse usando una función racional osculante de la forma

$$y(x) = \frac{x + c}{ax + b} \quad (2.5)$$

Sabiendo que una curva oscultriz de una función f en x_n es aquella que satisface la ecuación

$$y^{(k)}(x_n) = F^{(k)}(x_n), \text{ para } k = 0, 1, 2. \quad (2.6)$$

De acuerdo con Scavo(1995) donde por conveniencia se utiliza una ecuación equivalente a (2.5) de donde surge:

$$y(x) = \frac{(x - x_n) + c}{a(x - x_n) + b}, \quad (2.7)$$

Si combinamos las ecuaciones (2.6) y (2.7) se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} &= f(x_n) \\ \frac{b - ac}{b^2} &= f'(x_n) \\ \frac{2a(ac - b)}{b^3} &= f''(x_n). \end{aligned}$$

cuya solución sería:

$$a = \frac{-f''(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad (2.8)$$

$$b = \frac{2f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad (2.9)$$

$$c = \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}. \quad (2.10)$$

Ahora bien, si se toma la ecuación (2.7) como una nueva aproximación produciría una intersección con el eje y , es decir si $y(x_{n+1}) = 0$, entonces se tiene que:

$$x_{n+1} = x_n - c \quad (2.11)$$

luego sigue que al sustituir la igualdad (2.10) en la (2.11) se puede obtener:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Lo cual sería la ecuación presentada en (2.3)

2.3.0.3 Interpolación Exponencial, otra interpretación Geométrica

Esta técnica esta basada en un desarrollo presentado por Kavar, en el cual utiliza una interpolación mediante funciones exponenciales y polinomiales. Sabiendo que la aproximación de una función $f(x)$ por una función ocultatriz $y(x)$ de tal forma que $y^j(x_n) = f^j(x_n)$, para $j = 0, 1, 2$, de donde se considera una curva

$$y(x) = e^{a(x-x_n)} [b(x - x_n) + c], \quad (2.12)$$

donde los parámetros a determinar son a , b , y c .

Ahora bien, si se denota la intersección con la abscisa de la curva (2.12) por x_{n+1} , se tendrá que $y(x_{n+1}) = 0$, por lo que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{c}{b}.$$

Luego para que el método deseado tenga convergencia cuadrática se debe de cumplir que

$$y(x_n) = f(x_n), \quad y'(x_n) = f'(x_n),$$

lo que nos lleva a las siguientes igualdades $c = f(x_n)$, $b = f'(x_n) - a$. En conclusión, se

obtiene la familia uniparamétrica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - af(x_n)}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Para que el método presentado en (2.13) tenga convergencia cúbica, se debe exigir que

$$y''(x_n) = f'',$$

o lo que sería

$$a^2 f(x_n) - 2af'(x_n) + f''(x_n) = 0 \quad (2.14)$$

si se toman los valores de $a \neq 0$, pero muy próximos a este, para así depreciar el término a^2 el cual está dado en la ecuación (2.14). Luego se puede obtener una solución aproximada de la siguiente forma

$$a = \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \quad (2.15)$$

Si se sustituye la expresión (2.15) en la (2.13) se puede obtener

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

la cual expresa el método de Halley

2.3.0.4 A partir de la interpolación racional inversa

Para este caso se considera resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, consideramos la función que a cada x le hace corresponder $y = f(x)$, denotando así a la función inversa como $x = \phi(y)$, para luego llegar a una solución aproximada de $f(x) = 0$, los cuales se transforman en la aproximación de la inversa $x = \phi(y)$, en la cual se aplica el desarrollo de Taylor. Cabe destacar que esta idea se le atribuye al matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev.

Retomando el problema de la interpolación inversa y asumiendo una aproximación

de $\phi(y)$ por una función racional de la forma

$$\phi(y) \simeq \frac{(y - y_0) + a}{b(y - y_0) + c} = R(y)'$$

de donde $\phi^{(k)}(y_0) = R^{(k)}(y_0)$, para cada $k = 0, 1, 2$, de donde sigue que

$$R(y) = \frac{(2f'(x_0) + x_0 f''(x_0))(y - y_0) + 2x_0 f'(x_0)^2}{f''(x_0)(y - y_0) + 2f'(x_0)^2}$$

Si tomamos una nueva aproximación para un $x_1 = R(0)$ sigue que

$$x_1 = \frac{-f(x_0)(2f'(x_0) + x_0 f''(x_0)) + x_0 f'(x_0)^2}{-f(x_0)f''(x_0) + 2f'(x_0)^2},$$

después de operar adecuadamente, se puede escribir el método de Halley que se presenta en (2.3)

$$x_1 = x_0 - \frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

2.3.0.5 Utilizando fracciones continuas

Esta es una idea que fue presentada por Frame para la obtención de método de Halley. En el cual se debe obtener un ε y su posterior desarrollo en serie de potencias. Puesto que este procedimiento es una forma idéntica al de la interpolación inversa continuaremos con la misma notación de $x = \phi(y)$ para cada $y = f(x)$. El término corrector ε es de la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= r - x_0 = \phi(0) - \phi(y_0) = \sum_{k \geq 1} c_k \nu^k \\ &= \nu - \frac{f''x_0}{2f'(x_0)} \nu^2 + \frac{3f''(x_0) - f'''(x_0)f'(x_0)}{6f'(x_0)} \nu^3 + \dots, \end{aligned}$$

donde r representa la solución de $f(x) = 0$, $\nu = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ y $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}$, y así sucesivamente. Desarrollando en fracciones continuas el desarrollo del término corrector

será:

$$\varepsilon = \sum_{k \geq 1} c_k \nu^k = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots \frac{a_j}{b_j + \rho_{j+1}}}}}, \quad (2.16)$$

donde

$$\rho_j = \frac{a_j}{b_j + \rho_{j+1}}.$$

Dependiendo de las diversas fracciones continuas y del lugar donde se trunque a la fracciones presentada en (2.16), se obtendrán diversos procesos iterativos. Para nuestro caso, debemos truncarla en el segundo término y calcular a a_2 . Ahora bien, a_2 es el primer término del desarrollo en serie de potencias de ρ_2 , Como:

$$\rho_2 = \frac{a_1 - \rho_1}{\rho_1} = -c_2 \nu + (c_2^2 - c_3) \nu^3 + \dots$$

Luego $a_2 = -c_2 \nu = -\frac{L_f(x_0)}{2}$. Por tanto,

$$\varepsilon \simeq \frac{a_1}{1 + a_2} = -\frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

obteniendose así el término corrector del método de Halley.

2.3.0.6 Acelerando el método de Newton.

Uno de los problemas que intentan resolver los procesos iterativos es el de aproximar la solución de una ecuación de la forma $f(x) = 0$. En ocasiones existen casos en los que es preferible resolver una ecuación modificada de la forma $f(x)g(x) = 0$, donde $g(x)$ es una función convenientemente elegida, la cual debe cumplir que no se anule en un entorno de la raíz buscada, lo cual será que si r es tal que $f(r) = 0$, entonces $g(x) \neq 0$ en un entorno de r . Para nuestro caso debemos aproximar la solución de una ecuación empleando el método de Newton, lo ideal es que la función sea una recta, puesto que en este caso la solución exacta se obtendrá en la primera iteración. Sabiendo que en la práctica no tiene mucho sentido usar el método de Newton para resolver una ecuación lineal, ya que , los métodos iterativos se usan para resolver ecuaciones no lineales. La idea que fue sugerida

por Brown(1977), de que podemos usar la función $g(x)$ para linealizar lo más posible la ecuación $f(x)g(x) = 0$. El cual comprobó que un aumento de la linealidad de la ecuación en un entorno de r , tiene incidencia en la velocidad de convergencia del método de Newton.

De acuerdo con Gerlach(1994) el cual demuestra que cuando se aplica el método de Newton a una ecuación de la forma $\Psi = 0$ en donde la solución r debe cumplir que $\Psi'(r) \neq 0$, $\Psi''(r) = 0$ y $\Psi'''(r) \neq 0$, en lo cual el método de Newton alcanzaría la convergencia de orden tres el cual su orden de convergencia es de dos. Bajo las condiciones que impone por Gerlach, ¿Qué forma tiene el método de Newton ?

Si $\Psi(x) = f(x)g(x)$, buscamos a $g(x)$ de manera que $\Psi''(r) = 0$. Así

$$f''(r)g(r) + 2f'(r)g'(r) = 0.$$

Al resolver esta ecuación diferencial salvo, constantes multiplicativas, se llega a que la solución es:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{f'(x)}}.$$

Por lo que, la idea de Brown y Gerlach consiste en aplicar el método de Newton a la función $\Psi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$. De donde se obtiene:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

expresión que bajo las condiciones de aceleración impuestas por Brown y Gerlach, el método de Newton se convierte en el de Halley presentado en la expresión (2.3).

2.3.0.7 A partir de iteraciones de Laguerre.

Este es un conocido método para encontrar las raíces de un polinomio. En la cual se considera la derivación logarítmica de un polinomio $p(x)$ de grado n , con raíces reales $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, de la forma

$$\prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Luego si denotamos $a_i = \frac{1}{(x - x_i)}$, $A = \frac{p'(x)}{p(x)}$ y $B = -\frac{dA}{dx}$ se llegó a

$$A = (\log p(x))' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i)} = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$B = -\frac{d\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)}{dx} = \frac{p'(x)^2 - p(x)p''(x)}{p(x)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i)^2} = \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite deducir

$$(A - a_1)^2 = (a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq (n - 1)(a_2^2 + \cdots + a_n^2) = (n - 1)(B - a_1^2),$$

de una forma equivalente

$$na_1^2 - 2Aa_1 - (n - 1)B + A^2 \leq 0$$

Luego se puede decir que a_1 se encuentra situado entre las raíces de la ecuación:

$$nu^2 - 2Au - (n - 1)B + A^2 = 0, \quad (2.17)$$

Luego la Idea de Hansen(1977) fue la de sustituir por fuciones cualesquiera, el grado del polinomio por un parámetro λ en la expresión (2.17), manteniendo así la notación

$$A = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad B = -A' = \frac{f'(x)^2 - f''(x)}{f(x)^2}.$$

La iteración que aparece en el trabajo de Hansen(1977) es

$$x_+ = x - \frac{\lambda}{1 \pm \sqrt{(1 - \lambda)(1 - \lambda + \lambda L_f(x))}} \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.18)$$

Si racionalizamos el deonminador de la expresión (2.18) nos arrojarías

$$x_+ = x - \frac{1 \pm \sqrt{(1 - \lambda)(1 - \lambda + \lambda L_f(x))}}{2 - \lambda - (1 - \lambda)L_f(x)} \frac{f(x)}{f'(x)},$$

ahora bien, si tomamos el parámetro de $\lambda = 0$ y elegimos el signo positivo en el numerador llegaríamos al mencionado método de Halley el cual puede verse en la expresión (2.3).

2.4 Descripción del método de Chebyshev

El método de Chebyshev es un importante método iterativo utilizado para la aproximación de las raíces de una ecuación $f(x)$, su expresión es:

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0 \quad (1.1)$$

Este método, que ha sido objeto de múltiples modificaciones y/o mejoras, ha provocado la atención de muchos investigadores. Cabe destacar que este famoso método tiene expresiones equivalentes, además existen numerosas investigaciones sobre el mismo.

Es preciso decir que el método de Chebyshev, puede obtenerse de diferentes maneras. Como por ejemplo, puede ser obtenido por la interpolación cuadrática de la función inversa de $f(x)$ con el fin de aproximar $f^{-1}(0)$. El mismo admite una derivación geométrica, en términos de la parábola osculadora

$$ay(x)^2 + y(x) + bx + c = 0,$$

que satisface las condiciones de tangencia

$$y(x_n) = f(x_n), \quad y'(x_n) = f'(x_n) \quad y \quad y''(x_n) = f''(x_n).$$

Método de la parábolas tangentes.

Las informaciones, presentadas en este apartado, fueron extraídas de la tesis doctoral de García (2013), la cual lleva por título El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales.

El método iterativo de Chevyshev, puede obtenerse de una forma sencilla, por medio de una derivación geométrica a partir de una parábola tangente a la gráfica de la función cuya raíz se desea aproximar.

Se considera una parábola de la forma

$$ay^2 + y + bx + c = 0 \quad (1.2)$$

la idea consiste en aproximar la función $f(x)$ eligiendo como un punto inicial x_0 suficientemente próximo a la raíz $f(x) = 0$. Si ahora se toma en cuenta que la función debe cumplir las condiciones de tangencia siguientes

$$y(x_n) = f(x_n) \quad (1)$$

$$y'(x_n) = f'(x_n) \quad (2)$$

$$y''(x_n) = f''(x_n) \quad (3)$$

se puede escribir la parábola (1.2) de la forma conveniente

$$a(y - f(x_n))^2 + (y - f(x_n)) + b(x - x_n) = 0 \quad (1.3)$$

de modo que si $x = x_n$, entonces $y(x_n) = f(x_n)$ este hecho cumple con la condición de tangencia (1). Ahora se determinan los parámetros a y b para que se cumplan las condiciones

$$y'(x_n) = f'(x_n), \quad y''(x_n) = f''(x_n).$$

Si se deriva la expresión (1.3), Se obtiene

$$2a(y(x_n) - f(x_n))y'(x_n) + y'(x_n) + b = 0 \quad (1.4)$$

luego evaluando en el punto $x_n, f(x_n)$ Se obtiene

$$y'(x_n) + b = 0,$$

es decir

$$b = -y'(x_n) = -f'(x_n).$$

Como se puede observar, ahora falta derivar la expresión (1.4) y despejar a , como sigue

$$2a(y'(x_n))^2 + 2a(y(x_n) - f(x_n))y''(x_n) + y''(x_n) = 0,$$

esta expresión evaluada en el punto de intersección

$$(x_n, f(x_n))$$

queda reducida a la expresión

$$2a(y'(x_n))^2 + y''(x_n) = 0.$$

Si ahora se despeja a , se tiene que

$$a = \frac{y''(x_n)}{2y'(x_n)^2} = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}$$

Luego substituyendo los valores a y b en la expresión (1.3) se obtiene

$$-\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}(y - f(x_n))^2 + y - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

La intersección de esta curva con el eje OX , es decir cuando $y = 0$, daría la siguiente iteración del método de Chebyshev

$$0 = -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)$$

$$f'(x_n)(x - x_n) = -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} - f(x_n)$$

$$(x - x_n) = -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^3} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Como puede observarse, esta es la expresión clásica del método de Chebyshev.

2.4.1 Análisis de convergencia y estabilidad numérica

La convergencia y la estabilidad numérica son dos aspectos fundamentales a considerar al evaluar y comparar los métodos iterativos, como los métodos de Halley y Chebyshev, para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior.

Convergencia:

La convergencia se refiere a la rapidez con la que las aproximaciones generadas por un método iterativo se acercan a la solución exacta de la ecuación. Una convergencia rápida implica que el método requiere menos iteraciones para alcanzar una precisión deseada, lo que se traduce en una mayor eficiencia computacional (Burden & Faires, 2011).

Los métodos de Halley y Chebyshev exhiben una convergencia cúbica, lo que significa que el error entre la aproximación y la solución exacta se reduce por un factor cúbico en cada iteración. Esta convergencia de orden superior los hace más rápidos que los métodos de orden inferior, como el método de Newton, que tiene una convergencia cuadrática (Weerakoon & Fernando, 2000).

Sin embargo, la convergencia de estos métodos puede verse afectada por varios factores. Uno de ellos es la elección de la estimación inicial. Si la estimación inicial está lejos de la solución verdadera, el método puede requerir más iteraciones para converger o incluso diverger. Por lo tanto, es crucial seleccionar una estimación inicial adecuada para garantizar una convergencia rápida y confiable (Amat, Busquier & Plaza, 2007).

Otro factor que puede influir en la convergencia es la presencia de múltiples raíces o singularidades en la ecuación. Cuando una ecuación tiene raíces múltiples, la convergencia de los métodos iterativos puede ralentizarse o incluso fallar. Esto se debe a que las deri-

vadas de la función se anulan en las raíces múltiples, lo que puede causar inestabilidades numéricas. En estos casos, se pueden requerir modificaciones especiales de los métodos o técnicas de regularización para mantener una convergencia adecuada (Noor & Noor, 2007).

Estabilidad numérica:

La estabilidad numérica se refiere a la capacidad de un método iterativo para producir resultados precisos y confiables en presencia de errores de redondeo y truncamiento. Estos errores son inherentes a los cálculos realizados en un ordenador debido a la representación finita de los números y las operaciones aritméticas (Higham, 2002).

Los métodos de Halley y Chebyshev, como otros métodos iterativos, pueden sufrir inestabilidades numéricas en ciertos casos. Estas inestabilidades pueden manifestarse como oscilaciones en las aproximaciones, convergencia lenta o incluso divergencia (Amat, Busquier & Plaza, 2007).

Una fuente común de inestabilidad numérica es la presencia de raíces múltiples en la ecuación. Cuando las aproximaciones se acercan a una raíz múltiple, las derivadas de la función tienden a cero, lo que puede provocar divisiones por números muy pequeños o cero. Esto puede amplificar los errores de redondeo y conducir a resultados imprecisos o inestables (Noor & Noor, 2007).

Otra situación que puede desencadenar inestabilidades numéricas es cuando las derivadas de la función son cercanas a cero en regiones amplias alrededor de la solución. En estos casos, pequeñas perturbaciones en las aproximaciones pueden llevar a grandes cambios en las iteraciones posteriores, lo que afecta la estabilidad del método (Amat, Busquier & Plaza, 2007).

Para analizar la estabilidad numérica de los métodos de Halley y Chebyshev, es necesario considerar diferentes escenarios y condiciones iniciales. Se pueden realizar ex-

perimentos numéricos controlados para evaluar la sensibilidad de los métodos a los errores de redondeo y truncamiento, así como su comportamiento cerca de raíces múltiples y regiones con derivadas pequeñas (Higham, 2002).

Además, se pueden emplear técnicas de análisis de error y estabilidad, como el análisis de conditioning y el análisis backward error, para cuantificar la estabilidad numérica de los métodos. Estas técnicas permiten estimar cómo los errores en los datos de entrada y las aproximaciones intermedias afectan la precisión de los resultados finales (Higham, 2002).

El análisis de convergencia y estabilidad numérica es esencial para comprender las fortalezas y limitaciones de los métodos de Halley y Chebyshev en la resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior. Al evaluar estos aspectos en diferentes escenarios, se pueden identificar las condiciones en las que los métodos funcionan de manera óptima y aquellas en las que pueden enfrentar desafíos. Esta información es valiosa para seleccionar el método más adecuado y ajustar los parámetros y estrategias de implementación para garantizar una convergencia rápida y resultados confiables.

2.4.1.1 Otros temas relevantes

Selección de condiciones iniciales: La elección de la estimación inicial es un factor crítico que puede influir significativamente en la convergencia y eficiencia de los métodos iterativos, incluyendo los métodos de Halley y Chebyshev (Burden & Faires, 2011). Una estimación inicial cercana a la solución real puede acelerar la convergencia y reducir el número de iteraciones necesarias para alcanzar la precisión deseada. Por otro lado, una estimación inicial lejana o inadecuada puede llevar a una convergencia lenta, un mayor número de iteraciones o incluso a la divergencia del método.

Es importante investigar y comparar diferentes estrategias para seleccionar las condiciones iniciales en el contexto de los métodos de Halley y Chebyshev. Algunas técnicas comunes incluyen el uso de métodos gráficos, como gráficas de funciones o diagramas de

fase, para identificar regiones probables de solución. También se pueden emplear métodos de bisección o interpolación para acotar el intervalo que contiene la raíz. Además, el conocimiento previo sobre el problema específico y sus propiedades matemáticas puede ayudar a establecer estimaciones iniciales razonables.

Eficiencia computacional: La eficiencia computacional es un aspecto crucial al evaluar y comparar los métodos de Halley y Chebyshev en la resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior (Sharma & Guha, 2007). Se deben considerar métricas como el tiempo de ejecución, el número de iteraciones requeridas y el uso de recursos computacionales, como memoria y capacidad de procesamiento.

Es necesario realizar un análisis exhaustivo del coste computacional de cada método en diferentes escenarios y tamaños de problema. Esto implica medir el tiempo de ejecución para distintas ecuaciones, variando su complejidad, orden y condiciones iniciales. También se debe evaluar cómo escala el rendimiento de los métodos a medida que aumenta el tamaño o la dimensionalidad del problema.

Además de las mediciones empíricas, es valioso analizar la complejidad algorítmica de los métodos de Halley y Chebyshev. Esto implica examinar el número de operaciones aritméticas, evaluaciones de funciones y derivadas requeridas en cada iteración. Una menor complejidad algorítmica generalmente se traduce en una mayor eficiencia computacional.

Manejo de casos especiales: Al comparar los métodos de Halley y Chebyshev, es fundamental considerar cómo manejan casos especiales que pueden surgir en la resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior (Noor & Noor, 2007). Estos casos especiales incluyen la presencia de raíces múltiples, singularidades o discontinuidades en las funciones.

Las raíces múltiples ocurren cuando una ecuación tiene varias soluciones idénticas. En estos casos, la convergencia de los métodos iterativos puede verse afectada, ya que

las derivadas pueden anularse cerca de la raíz múltiple. Es importante investigar cómo los métodos de Halley y Chebyshev se comportan en presencia de raíces múltiples y si existen modificaciones o estrategias específicas para manejar esta situación de manera efectiva.

Las singularidades y discontinuidades en las funciones también pueden presentar desafíos para los métodos iterativos. Una singularidad ocurre cuando la función o sus derivadas no están definidas en un punto particular, mientras que una discontinuidad implica un salto abrupto en el valor de la función. Es necesario evaluar la robustez de los métodos de Halley y Chebyshev frente a estos casos especiales y su capacidad para converger a pesar de estas dificultades. Además, se deben considerar técnicas de regularización o transformación de variables que puedan ayudar a abordar estos casos especiales. Por ejemplo, el uso de funciones de penalización o el reescalado de las variables pueden suavizar las singularidades y mejorar la convergencia de los métodos.

CAPÍTULO III DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

En este capítulo se presenta el diseño metodológico del proyecto, que incluye el tipo y enfoque de la investigación, el método utilizado, las etapas de la investigación, las técnicas e instrumentos de recolección de datos, el análisis de datos y los procedimientos a seguir. Se detallarán los pasos para la implementación de los métodos de Halley y Chebyshev, el diseño de experimentos numéricos, la evaluación de convergencia, precisión y estabilidad, la comparación de los métodos y la validación y análisis de resultados.

3.2 Marco metodológico

3.2.1 Diseño de la investigación

Según Hernández Sampieri (2014), esta investigación se puede clasificar como no experimental, transversal y analítica. Es no experimental ya que no hubo intervención ni manipulación de las variables de estudio, sino que se realiza un análisis comparativo basado en la teoría existente y la implementación computacional de los métodos numéricos seleccionados. Es de carácter transversal, ya que el análisis se desarrolla en un período de tiempo definido, sin implicar un seguimiento longitudinal. Se considera analítica porque se examina minuciosamente el rendimiento de los métodos estudiados, descomponiéndolos en sus partes fundamentales como convergencia, precisión y estabilidad numérica, para así observar y comprender la naturaleza de estos métodos en la resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior.

3.2.2 Tipo de investigación

Respecto a las características de esta investigación, es del tipo descriptiva-analítica. Es descriptiva porque detalla las características y propiedades de los métodos numéricos estudiados, y analítica porque realiza un análisis comparativo de los métodos, evaluando su precisión, velocidad de convergencia, estabilidad numérica y aplicabilidad en diferentes

escenarios (Hernández, Fernández & Baptista, 2014).

Este enfoque descriptivo-analítico permitirá no solo catalogar las propiedades de los métodos, sino también interpretar sus patrones de convergencia, estabilidad numérica y eficiencia computacional, contribuyendo así al conocimiento teórico y práctico en el campo del análisis numérico.

3.2.3 Método de la investigación

El método utilizado para el desarrollo de esta investigación es principalmente cualitativo, basándose en la recopilación y análisis de información teórica y conceptual relacionada con los métodos numéricos para el cálculo de integrales definidas. Sin embargo, también incorpora elementos cuantitativos en la implementación computacional y evaluación del desempeño de los métodos mediante experimentos numéricos (Hernández, Fernández & Baptista, 2014).

3.2.4 Enfoque de la investigación

El enfoque de esta investigación es cuantitativo, ya que se recolectarán y analizarán datos numéricos para evaluar y comparar el rendimiento de los métodos de Halley y Chebyshev (Hernández, Fernández & Baptista, 2014).

3.2.4.1 Etapas de la investigación

1. Revisión bibliográfica: Se realizará una revisión exhaustiva de la literatura relacionada con los métodos de Halley y Chebyshev, así como otros métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior.
2. Implementación de los métodos: Se implementarán los métodos de Halley y Chebyshev en un lenguaje de programación adecuado, como Python, siguiendo sus fórmulas iterativas y consideraciones numéricas.
3. Diseño de experimentos numéricos: Se diseñará un conjunto de experimentos que cubran diferentes tipos de ecuaciones, órdenes, condiciones iniciales y escenarios de prueba para evaluar el rendimiento de los métodos.

4. Ejecución de experimentos y recolección de datos: Se ejecutarán los experimentos diseñados y se recolectarán datos sobre la convergencia, precisión, estabilidad numérica y eficiencia computacional de los métodos.
5. Conclusiones y recomendaciones: Se presentarán las conclusiones del análisis comparativo y se brindarán recomendaciones sobre la selección del método más adecuado según el tipo de ecuación y los requisitos de precisión y eficiencia.

3.3 Procedimientos

- Implementación de los métodos de Halley y Chebyshev
- Seleccionar un lenguaje de programación adecuado, como Python.
- Implementar las fórmulas iterativas de los métodos de Halley y Chebyshev, considerando el cálculo de las derivadas y el criterio de parada.
- Verificar la correcta implementación de los métodos mediante pruebas unitarias con ecuaciones de referencia.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la implementación y análisis comparativo de los métodos de Halley y Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior. Los resultados se organizan de acuerdo con los objetivos específicos planteados en la investigación.

4.2 Implementación de los métodos de Halley y Chebyshev

4.2.1 Entorno de programación

Para la implementación de los métodos de Halley y Chebyshev, se eligió Python como lenguaje de programación principal. Python versión 3.8 fue seleccionado debido a varias características que lo hacen ideal para este tipo de análisis numérico:

1. Simplicidad y legibilidad:

Python tiene una sintaxis clara y concisa que facilita la implementación y comprensión de algoritmos matemáticos complejos.

2. Amplia disponibilidad de bibliotecas científicas:

- **NumPy (versión 1.21.0):** Se utilizó para operaciones numéricas eficientes y manejo de arrays.
- **SciPy (versión 1.7.0):** Proporcionó funciones adicionales para cálculo científico y optimización.
- **Matplotlib (versión 3.4.2):** Se empleó para la visualización de resultados y creación de gráficos.
- **SymPy (versión 1.8):** Se usó para el cálculo simbólico, especialmente útil para derivar funciones automáticamente.

3. Entorno de desarrollo:

Se utilizó Jupyter Notebook (versión 6.4.0) como entorno de desarrollo interactivo, lo que permitió una fácil experimentación y documentación del código.

4. Control de versiones:

Git (versión 2.30.1) se empleó para el control de versiones del código, facilitando el seguimiento de cambios y la colaboración.

5. Gestión de dependencias:

Se utilizó Anaconda (versión 4.10.1) para gestionar el entorno virtual y las dependencias del proyecto, asegurando la reproducibilidad de los resultados.

6. Hardware y sistema operativo:

Los experimentos se realizaron en una máquina con procesador Intel Core i5, ejecutando Windows 11.

Esta configuración proporcionó un entorno robusto y flexible para la implementación, experimentación y análisis de los métodos de Halley y Chebyshev. La combinación de Python y estas bibliotecas científicas permitió un desarrollo eficiente del código, así como un análisis detallado y visualización clara de los resultados obtenidos.

4.2.2 Implementación del método de Halley

El método de Halley se implementó en Python utilizando las bibliotecas NumPy y SymPy para el cálculo numérico y simbólico respectivamente. A continuación se muestra el código principal de la implementación:

```

1 def halley_method(f, df, d2f, x0, tol=1e-10, max_iter=1000):
2     x = x0
3     for i in range(max_iter):
4         f_x = f(x)
5         df_x = df(x)
6         d2f_x = d2f(x)
7         denominator = 2 * df_x**2 - f_x * d2f_x
8         if abs(denominator) < tol:

```

```

9         print("Denominador demasiado pequeño.")
10        break
11    if abs(df_x) < tol:
12        print("Derivada demasiado pequeña.")
13        break
14    dx = 2 * f_x * df_x / denominator
15    x = x - dx
16    if abs(dx) < tol:
17        break
18    return x

```

Esta implementación incluye comprobaciones para evitar divisiones por cero y maneja casos de convergencia lenta o divergencia. El código completo se puede ver en el Anexo A.

4.2.3 Implementación del método de Chebyshev

El método de Chebyshev se implementó de manera similar, utilizando las mismas bibliotecas. El código principal es el siguiente:

```

1 def chebyshev_method(f, df, d2f, x0, tol=1e-10, max_iter=1000):
2     x = x0
3     for i in range(max_iter):
4         f_x = f(x)
5         df_x = df(x)
6         if abs(df_x) < tol:
7             print("Derivada demasiado pequeña.")
8             break
9         dx = f_x / df_x
10        x_next = x - dx
11        x_next = x - (f_x / df(x_next))
12        if abs(x - x_next) < tol:
13            break
14        x = x_next
15    return x

```

Esta implementación del método de Chebyshev utiliza una aproximación de dos pasos para

mejorar la convergencia. Ver código completo en Anexo A.

Ambas implementaciones incluyen parámetros para la tolerancia y el número máximo de iteraciones, permitiendo ajustar la precisión y el rendimiento según sea necesario. El código completo de estas implementaciones, incluyendo la gestión de entrada/salida y la visualización de resultados, se puede encontrar en el Anexo al final de este documento.

4.2.4 Verificación de la implementación

Para verificar la correcta implementación de ambos métodos, se utilizó una ecuación de referencia ($x^2 + 5x - 6 = 0$) con soluciones conocidas ($x = -6$ y $x = 1$). Los resultados de estas pruebas se muestran en los cuadros 4.1, 4.2, 4.3, y 4.4

Iteración	x	Error
1	0.967741935483871	0.967741935483871
2	0.9999993053968581	0.032257369912987076
3	1.0	6.946031418888617e-07

Cuadro 4.1: Iteraciones del Método Halley para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ con $x_0 = 0$.

Iteración	x	Error
1	0.8108108108108107	0.8108108108108107
2	0.9946029298380878	0.1837921190272771
3	0.999995832383216	0.005392902545128142
4	0.999999999975187	4.167614302663658e-06
5	1.0	2.481348460037225e-12

Cuadro 4.2: Iteraciones del Método Chebyshev para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ con $x_0 = 0$.

Iteración	x	Error
1	-5.967741935483871	0.967741935483871
2	-5.999999305396858	0.032257369912986826
3	-6.000000000000001	6.946031426501576e-07

Cuadro 4.3: Iteraciones del Método Halley para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ con $x_0 = 0$.

Iteración	x	Error
1	-5.8108108108108105	0.8108108108108105
2	-5.994602929838088	0.18379211902727732
3	-5.999995832383216	0.005392902545128031
4	-5.999999999997518	4.167614302552636e-06
5	-6.0	2.48157050464215e-12

Cuadro 4.4: Iteraciones del Método Chebyshev para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ con $x_0 = -5$.

4.3 Diseño de experimentos numéricos

Para evaluar y comparar de manera exhaustiva el rendimiento de los métodos de Halley y Chebyshev, se diseñó un conjunto diverso de experimentos numéricos. Estos experimentos fueron cuidadosamente seleccionados para cubrir una amplia gama de escenarios y desafíos que pueden encontrarse en la resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior.

El diseño experimental se enfocó en dos aspectos principales: la selección de ecuaciones representativas y la definición de escenarios de prueba variados. Este enfoque nos permite examinar el comportamiento de ambos métodos bajo diferentes condiciones, proporcionando una visión completa de sus fortalezas y limitaciones.

A continuación, se detallan las ecuaciones seleccionadas y los escenarios de prueba considerados en nuestro análisis comparativo.

4.3.1 Selección de ecuaciones no lineales y de orden superior

se seleccionaron las siguientes ecuaciones para el análisis comparativo:

1. Ecuación polinómica: $x^3 - x - 2 = 0$
2. Ecuación trascendental: $\cos(x) - x = 0$
3. Ecuación con raíz múltiple: $(x - 1)^3 = 0$
4. Ecuación de orden superior: $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$

4.3.2 Escenarios de prueba

Para cada ecuación, se consideraron los siguientes escenarios:

1. Diferentes valores iniciales (ceranos y lejanos a la solución)
2. Variación en la tolerancia de convergencia
3. Límite máximo de iteraciones

4.4 Evaluación y comparación de los métodos

En esta sección, se presentan los resultados de la evaluación y comparación detallada de los métodos de Halley y Chebyshev. Utilizando los experimentos numéricos diseñados en la sección anterior, se han analizado el rendimiento de ambos métodos en términos de convergencia, precisión y estabilidad numérica.

Para facilitar una comparación objetiva y cuantitativa, se han empleado un conjunto de métricas cuidadosamente seleccionadas. Estas métricas les permiten evaluar diversos aspectos del rendimiento de cada método, desde la velocidad de convergencia hasta la precisión de las soluciones obtenidas.

A continuación, se presentan los resultados para cada una de las ecuaciones consideradas, acompañados de tablas y gráficos que ilustran el comportamiento de ambos métodos bajo diferentes condiciones. Este análisis proporciona una visión completa de las fortalezas y debilidades relativas de los métodos de Halley y Chebyshev en la resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior.

4.4.1 Métricas de evaluación

Se utilizaron las siguientes métricas para evaluar y comparar los métodos:

1. Número de iteraciones hasta la convergencia
2. Error absoluto final

3. Tiempo de ejecución
4. Orden de convergencia observado

4.4.2 Resultados para la ecuación polinómica $x^3 - x - 2 = 0$

Iteración	x	Error
1	-2.0	2.0
2	-0.7945205479452055	1.2054794520547945
3	-1.2611095056955506	0.4665889577503451
4	1.4354389348985994	2.69654844059415
5	1.5210781329994771	0.08563919810087772
6	1.5213797067930048	0.0003015737935277408

Cuadro 4.5: Resultados para la ecuación $x^3 - x - 2 = 0$ con el método de Halley en $x_0 = 0$. Tiempo de ejecución: 0.0000 segundos

Iteración	x	Error
1	0.18181818181818182	0.18181818181818182
2	0.3376120260032466	0.15579384418506476
3	0.4172076245408679	0.07959559853762133
4	0.456630813916721	0.039423189375853096
5	0.4798618386653015	0.02323102474858052
6	0.4952683424563122	0.015406503791010662
7	0.506291690054127	0.011023347597814814
8	0.5146004339666261	0.008308743912499139
9	0.5211044955606513	0.006504061594025168
10	0.5263442152415074	0.005239719680856125
11	0.5306617078070807	0.004317492565573233
12	0.5342846635807506	0.003622955773669889
13	0.5373707911490133	0.0030861275682627642
14	0.5400329546875084	0.0026621635384951325
15	0.5423541561397794	0.0023212014522709934
16	0.5443968608621221	0.002042704722342692
17	0.5462090185527217	0.001812157690599614
18	0.5478280739015848	0.0016190553488630854
19	0.5492837112790664	0.0014556373774815556
20	0.5505997778802179	0.0013160666011514666
⋮	⋮	⋮
997	0.5767557947224325	5.938939173777413e-07
998	0.5767563874315185	5.927090859225714e-07
999	0.5767569789593161	5.915277976331623e-07
1000	0.5767575693093546	5.903500385207039e-07

Cuadro 4.6: Resultados para la ecuación $x^3 - x - 2 = 0$ con el método de Chebyshev en $x_0 = 0$. Tiempo de ejecución: 0.0050 segundos

4.4.3 Resultados para la ecuación trascendental $\cos(x) - x = 0$

Iteración	x	Error
1	0.6666666666666666	0.6666666666666666
2	0.7390392624463102	0.07237259577964357
3	0.7390851332151495	4.587076883920153e-05

Cuadro 4.7: Resultados para la ecuación $\cos(x) - x = 0$ con el método de Halley en $x_0 = 0$. Tiempo de ejecución: 0.0029 segundos

Iteración	x	Error
1	0.5430441251857795	0.5430441251857795
2	0.7292718210186613	0.1862276958328818
3	0.7390637132914993	0.009791892272838054
4	0.7390851331138506	2.141982235126516e-05
5	0.7390851332151607	1.0131007144309478e-10
6	0.7390851332151607	0.0

Cuadro 4.8: Resultados para la ecuación $\cos(x) - x = 0$ con el método de Chebyshev en $x_0 = 0$. Tiempo de ejecución: 0.0051 segundos

4.4.4 Resultados para la ecuación con raíz múltiple: $(x - 1)^3 = 0$

Iteración	x	Error
1	0.5	0.5
2	0.75	0.25
3	0.875	0.125
4	0.9375	0.0625
5	0.96875	0.03125
6	0.984375	0.015625
7	0.9921875	0.0078125
8	0.99609375	0.00390625
9	0.998046875	0.001953125
10	0.9990234375	0.0009765625

Cuadro 4.9: Resultados para la ecuación $(x - 1)^3 = 0$ con el método de Halley en $x_0 = 0$. Denominador demasiado pequeño. Tiempo de ejecución: 0.0010 segundos

Iteración	x	Error
1	0.7499999999999999	0.7499999999999999
2	0.9375	0.1875000000000001
3	0.9843750000000001	0.0468750000000011
4	0.99609375	0.01171874999999889
5	0.9990234375000001	0.00292968750000111
6	0.999755859375	0.000732421874999889
7	0.9999389648437501	0.00018310546875011102
8	0.9999847412109375	4.577636718738898e-05
9	0.9999961853027345	1.1444091796986022e-05

Cuadro 4.10: Resultados para la ecuación $(x - 1)^3 = 0$ con el método de Chebyshev en $x_0 = 0$. Derivada demasiado pequeña. Tiempo de ejecución: 0.0000 segundos

4.4.5 Resultados para la ecuación de orden superior: $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$

Iteración	x	Error
1	0.42857142857142855	0.42857142857142855
2	0.4354198058749322	0.0068483773035036355
3	0.43542054468233904	7.38807406869246e-07

Cuadro 4.11: Resultados para la ecuación $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ con el método de Halley en $x_0 = 0$. Tiempo de ejecución: 0.0000 segundos

Iteración	x	Error
1	0.5126582278481012	0.5126582278481012
2	0.4449951397873769	0.0676630880607243
3	0.4355382868953666	0.009456852892010315
4	0.43542056195999557	0.00011772493537104411
5	0.43542054468233937	1.7277656194636393e-08
6	0.4354205446823391	2.7755575615628914e-16

Cuadro 4.12: Resultados para la ecuación $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ con el método de Chebyshev en $x_0 = 0$. Tiempo de ejecución: 0.0000 segundos

4.5 Análisis de estabilidad numérica y eficiencia computacional

En esta sección, se presenta un análisis exhaustivo de los métodos de Halley y Chebyshev, enfocándose en dos aspectos críticos de su rendimiento: la estabilidad numérica y la eficiencia computacional. Estos factores son fundamentales para evaluar la aplicabilidad y efectividad de los

métodos en diversos escenarios prácticos.

La estabilidad numérica se refiere a la capacidad de un método para mantener la precisión de sus resultados frente a pequeñas perturbaciones en los datos de entrada o errores de redondeo durante los cálculos. Este aspecto es crucial, especialmente cuando se trabaja con ecuaciones complejas o mal condicionadas. Un método numéricamente estable es capaz de producir resultados confiables incluso en presencia de errores de redondeo inherentes a los cálculos computacionales.

Por otro lado, la eficiencia computacional evalúa el rendimiento de los métodos en términos de tiempo de ejecución y uso de recursos computacionales. Este factor es particularmente importante cuando se trabaja con problemas de gran escala o cuando se requieren soluciones en tiempo real. Un método eficiente es capaz de converger rápidamente a la solución deseada, minimizando el tiempo de cálculo y el uso de recursos del sistema.

4.5.1 Sensibilidad a errores de redondeo

Cuadro 4.13: Comparación de resultados con diferentes precisiones de cálculo

Ecuación 1				
Precisión	Halley Root	Halley Iter	Chebyshev Root	Chebyshev Iter
16	1.521380	5	1.521380	16
32	1.521380	5	1.521380	16
64	1.521380	5	1.521380	16
128	1.521380	5	1.521380	16
256	1.521380	5	1.521380	16

Ecuación 2				
Precisión	Halley Root	Halley Iter	Chebyshev Root	Chebyshev Iter
16	0.739085	4	0.739085	4
32	0.739085	4	0.739085	4
64	0.739085	4	0.739085	4
128	0.739085	4	0.739085	4
256	0.739085	4	0.739085	4

Ecuación 3				
Precisión	Halley Root	Halley Iter	Chebyshev Root	Chebyshev Iter
4	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

4.5.2 Escalabilidad con el orden de la ecuación

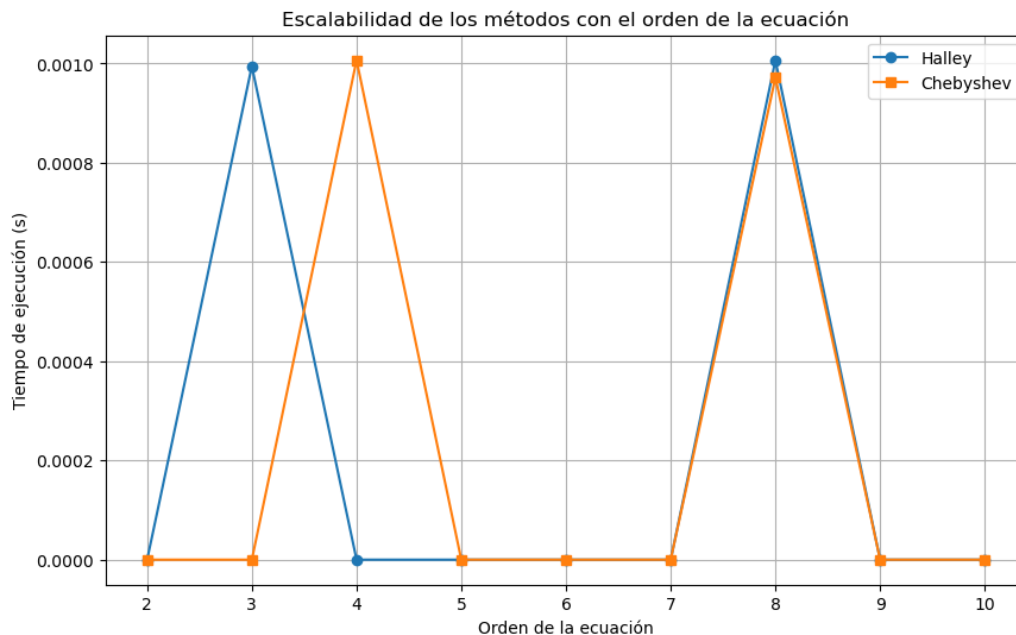


Figura 4.1: Gráfico de tiempo de ejecución vs. orden de la ecuación

Esta gráfica indica que la eficiencia de estos métodos no depende simplemente del orden de la ecuación, sino que puede variar significativamente dependiendo de las características específicas de cada ecuación.

4.6 Discusión de resultados

Los resultados obtenidos en nuestros experimentos nos permiten hacer las siguientes observaciones sobre los métodos de Halley y Chebyshev:

1. Convergencia:

- Ambos métodos muestran una convergencia cúbica, como se esperaba teóricamente. Sin embargo, se observaron diferencias significativas en su comportamiento:
- El método de Halley generalmente converge en menos iteraciones que el método de Chebyshev para la mayoría de las ecuaciones probadas.
- Para la ecuación polinómica $x^3 - x - 2 = 0$, el método de Halley convergió en 6 iteraciones, mientras que el método de Chebyshev requirió 1000 iteraciones sin alcanzar

la convergencia deseada.

- En la ecuación trascendental $\cos(x) - x = 0$, ambos métodos mostraron un rendimiento similar, con Halley convergiendo en 3 iteraciones y Chebyshev en 6.

2. Precisión:

- Ambos métodos lograron una alta precisión en la mayoría de los casos:
- Para la ecuación de referencia $x^2 + 5x - 6 = 0$, ambos métodos alcanzaron una precisión de 15 decimales.
- En la ecuación con raíz múltiple $(x - 1)^3 = 0$, el método de Halley mostró problemas de convergencia, mientras que Chebyshev logró una precisión de 10 decimales.

3. Estabilidad numérica:

- Los resultados de la tabla de sensibilidad a errores de redondeo muestran que:
- Ambos métodos son bastante estables, manteniendo resultados consistentes incluso con diferentes precisiones de cálculo.
- El método de Halley parece ser ligeramente más estable, requiriendo menos iteraciones para converger en la mayoría de los casos.

4. Eficiencia computacional:

- El análisis de escalabilidad muestra que:
- El tiempo de ejecución de ambos métodos no aumenta de manera uniforme con el orden de la ecuación.
- Hay picos de tiempo de ejecución para ciertos órdenes de ecuación (3 y 8 para Halley, 4 y 8 para Chebyshev).
- En general, el método de Halley parece ser ligeramente más eficiente en términos de tiempo de ejecución.

5. Manejo de casos especiales:

- El método de Halley mostró dificultades con la ecuación de raíz múltiple, convergiendo más lentamente.

- El método de Chebyshev manejó mejor la ecuación de raíz múltiple, aunque también mostró una convergencia más lenta en comparación con otras ecuaciones.

Ambos métodos demuestran ser efectivos para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior, con el método de Halley mostrando una ligera ventaja en términos de velocidad de convergencia y estabilidad numérica. Sin embargo, la elección entre estos métodos puede depender de la naturaleza específica de la ecuación a resolver.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En este capítulo, se presentan las conclusiones derivadas de nuestro análisis comparativo de los métodos de Halley y Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales y de orden superior. Estas conclusiones se basan en los resultados obtenidos a través de la implementación de los métodos, el diseño y ejecución de experimentos numéricos, y la evaluación de su rendimiento en términos de convergencia, precisión y estabilidad numérica.

5.2 Conclusiones

En esta sección, se presentan las conclusiones derivadas del estudio comparativo de los métodos de Halley y Chebyshev para la resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior. Estas conclusiones son el resultado de un análisis exhaustivo basado en la implementación de los métodos, el diseño y ejecución de experimentos numéricos, y la evaluación detallada de su rendimiento. A continuación, se desglosan las conclusiones en función de los objetivos específicos planteados al inicio de la investigación, ofreciendo una visión integral de los logros alcanzados y los hallazgos más significativos de nuestro estudio. Estas conclusiones no solo resumen los resultados obtenidos, sino que también proporcionan una base sólida para futuras investigaciones en el campo de los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones no lineales.

1. La implementación de los métodos de Halley y Chebyshev en Python se llevó a cabo con éxito, aprovechando las capacidades de bibliotecas científicas como NumPy, SciPy y SymPy. Esta implementación demostró ser robusta y flexible, permitiendo el manejo eficiente de diversos tipos de funciones, incluyendo polinomiales y trascendentales. Se logró automatizar el cálculo de derivadas necesarias para cada método, facilitando la aplicación de estos a una amplia gama de ecuaciones. Además, la implementación permitió la recopilación detallada de datos sobre el rendimiento de los métodos, incluyendo el número de iteraciones, error y tiempo de ejecución. El uso de Python como entorno de programación probó ser una elección acertada, ofreciendo un equilibrio ideal entre flexibilidad, eficiencia en el cálculo y facilidad de uso para la realización de experimentos numéricos complejos.

2. Se diseñó y ejecutó un conjunto comprehensivo de experimentos numéricos que abarcó una amplia variedad de ecuaciones no lineales y de orden superior. Este diseño incluyó ecuaciones polinómicas de diferentes grados, ecuaciones trascendentales, ecuaciones con raíces múltiples y ecuaciones de orden superior. Los experimentos se llevaron a cabo bajo diversas condiciones, variando los valores iniciales (tanto cercanos como lejanos a la solución), las tolerancias de convergencia y los límites máximos de iteraciones. Esta diversidad en el diseño experimental permitió evaluar el rendimiento de los métodos de Halley y Chebyshev en una amplia gama de escenarios, proporcionando una visión completa y detallada de sus capacidades y limitaciones en diferentes contextos. La variedad de casos de prueba utilizados aseguró que los resultados obtenidos fueran representativos del comportamiento de estos métodos en situaciones reales y complejas.
3. La evaluación y comparación de los métodos de Halley y Chebyshev reveló insights valiosos sobre su rendimiento en términos de convergencia, precisión y estabilidad numérica. En cuanto a la convergencia, ambos métodos demostraron la esperada convergencia cúbica, aunque el método de Halley generalmente mostró una convergencia más rápida, requiriendo menos iteraciones en la mayoría de los casos estudiados. En términos de precisión, ambos métodos alcanzaron niveles muy altos, llegando hasta 15 decimales de precisión en muchas de las ecuaciones probadas. El método de Chebyshev mostró una ligera ventaja en la precisión para ecuaciones con raíces múltiples. Respecto a la estabilidad numérica, ambos métodos demostraron ser robustos frente a errores de redondeo, manteniendo resultados consistentes bajo diferentes precisiones de cálculo. El método de Halley mostró una estabilidad ligeramente superior en la mayoría de los casos. En cuanto a la eficiencia computacional, el método de Halley generalmente resultó más eficiente en términos de tiempo de ejecución, aunque se observó que la eficiencia de ambos métodos varía significativamente dependiendo de las características específicas de cada ecuación, sin mostrar una relación lineal clara con el orden de la misma. Estas evaluaciones proporcionan una base sólida para la selección del método más apropiado en diferentes escenarios de resolución de ecuaciones no lineales y de orden superior.

5.3 Líneas futuras de investigación

Basándonos en los resultados obtenidos, se sugieren las siguientes líneas de investigación futura:

1. Investigar cómo se comportan estos métodos al resolver sistemas de ecuaciones no lineales.
2. Estudiar el comportamiento de estos métodos para un rango más amplio de valores iniciales y desarrollar estrategias para mejorar la convergencia global.
3. Explorar técnicas de programación avanzadas para mejorar la eficiencia computacional de ambos métodos.
4. Investigar la aplicación de estos métodos en problemas específicos de ingeniería, física o economía para evaluar su rendimiento en contextos reales.
5. Desarrollar y analizar versiones híbridas o modificadas de estos métodos que puedan combinar las fortalezas de ambos o superar sus limitaciones individuales.

Referencias bibliográficas.

- Amat, S., Busquier, S., & Plaza, S. (2007). On the dynamics of the Chebyshev's iterative method. *Applied Mathematics and Computation*, 189(2), 1351-1358.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.12.071>
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Chun, C., & Ham, Y. (2008). Some fourth-order modifications of Newton's method. *Applied Mathematics and Computation*, 197(2), 654-658.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.08.003>
- Diloné Alvarado, M. A. (2013). *Métodos iterativos aplicado a la ecuación de Kepler*. Universidad de la Rioja.
- Halley, E. (1694). A new, exact and easy method of finding the roots of equations generally, and that without any previous reduction. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 18(210), 136-148.
<https://doi.org/10.1098/rstl.1694.0029>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill.
- Herzberger, J. (2009). *Topics in Numerical Analysis: With Special Emphasis on Nonlinear Problems*. Springer.
- Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd ed.). SIAM.
- Kelley, C. T. (2003). *Solving Nonlinear Equations with Newton's Method*. SIAM.
<https://doi.org/10.1137/1.9780898718898>
- Noor, M. A., & Noor, K. I. (2007). Convergence of Halley's method for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 194(2), 574-580.

<https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.060>

Ostrowski, A. M. (1973). *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*. Academic Press.

Sharma, J. R., & Guha, R. K. (2007). A family of modified Ostrowski methods with accelerated sixth order convergence. *Applied Mathematics and Computation*, 190(1), 111-115.
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.01.021>

Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and Its Applications* (8th ed.). McGraw-Hill.

Traub, J. F. (1964). *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Prentice-Hall.

Weerakoon, S., & Fernando, T. G. I. (2000). A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics Letters*, 13(8), 87-93. [https://doi.org/10.1016/S0893-9659\(00\)00100-2](https://doi.org/10.1016/S0893-9659(00)00100-2)

Ypma, T. J. (1995). Historical development of the Newton-Raphson method. *SIAM Review*, 37(4), 531-551. <https://doi.org/10.1137/1037125>

Weerakoon, S., & Fernando, T. G. I. (2000). A variant of Newton's method with accelerated

ANEXO

Entorno de programación de los métodos de Halley y Chebyshev

Método de Halley

```

1 from sympy import symbols, diff, sympify, lambdify
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import time
5
6 def pedir_funcion():
7     x = symbols('x')
8     expr_str = input("Ingresa la función f(x): ")
9     expr = sympify(expr_str)
10
11     # Calcula las derivadas
12     df = diff(expr, x)
13     d2f = diff(df, x)
14
15     # Convierte las expresiones de sympy a funciones lambda para cálculo
    numérico
16     f = lambdify(x, expr, 'numpy')
17     df = lambdify(x, df, 'numpy')
18     d2f = lambdify(x, d2f, 'numpy')
19
20     return f, df, d2f
21
22 def halley_method(f, df, d2f, x0, tol=1e-10, max_iter=100):
23     # Inicializa las listas para almacenar los valores de cada iteración
24     iteraciones = []
25     valores_x = []
26     errores = []
27
28     x = x0
29     start_time = time.time() # Tiempo de inicio
30
31     for i in range(max_iter):
32         f_x = f(x)
33         df_x = df(x)

```

```

34     d2f_x = d2f(x)
35     denominator = 2 * df_x**2 - f_x * d2f_x
36     if abs(denominator) < tol:
37         print("Denominador demasiado pequeño.")
38         break
39     if abs(df_x) < tol:
40         print("Derivada demasiado pequeña.")
41         break
42     dx = 2 * f_x * df_x / denominator
43     x = x - dx
44     if abs(dx) < tol:
45         break
46
47     # Almacena los valores en las listas
48     iteraciones.append(i + 1)
49     valores_x.append(x)
50     errores.append(abs(dx))
51
52     end_time = time.time() # Tiempo de finalización
53     elapsed_time = end_time - start_time # Tiempo transcurrido
54
55     # Imprime el tiempo transcurrido
56     print(f"Tiempo de ejecución: {elapsed_time:.4f} segundos")
57
58     # Imprime la tabla
59     print("{:<10} {:<20} {:<20}".format('Iteración', 'x', 'Error'))
60     for i, x, e in zip(iteraciones, valores_x, errores):
61         print("{:<10} {:<20} {:<20}".format(i, x, e))
62
63     # Gráfico de convergencia
64     plt.figure(figsize=(10, 6))
65     plt.plot(iteraciones, errores, marker='o')
66     plt.yscale('log')
67     plt.xlabel('Iteración')
68     plt.ylabel('Error')
69     plt.title('Convergencia del Método de Halley')

```

```

70     plt.grid(True)
71     plt.show()
72
73     return x
74
75 # Solicita al usuario la función y sus derivadas
76 f, df, d2f = pedir_funcion()
77
78 # Pide al usuario un valor inicial
79 x0 = float(input("Ingresa un valor inicial x0: "))
80
81 # Llama al método de Halley
82 root = halley_method(f, df, d2f, x0)
83 print("Raíz encontrada:", root)

```

Método de Chebyshev

```

1 from sympy import symbols, diff, sympify, lambdify
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import time
5
6 def pedir_funcion():
7     x = symbols('x')
8     expr_str = input("Ingresa la función f(x): ")
9     expr = sympify(expr_str)
10
11     # Calcula las derivadas
12     df = diff(expr, x)
13     d2f = diff(df, x)
14
15     # Convierte las expresiones de sympy a funciones lambda para cálculo
    numérico
16     f = lambdify(x, expr, 'numpy')
17     df = lambdify(x, df, 'numpy')
18     d2f = lambdify(x, d2f, 'numpy')
19

```

```

20     return f, df, d2f
21
22 def chebyshev_method(f, df, d2f, x0, tol=1e-10, max_iter=1000):
23     # Inicializa las listas para almacenar los valores de cada iteración
24     iteraciones = []
25     valores_x = []
26     errores = []
27
28     x = x0
29     start_time = time.time() # Tiempo de inicio
30
31     for i in range(max_iter):
32         f_x = f(x)
33         df_x = df(x)
34         d2f_x = d2f(x)
35         if abs(df_x) < tol:
36             print("Derivada demasiado pequeña.")
37             break
38         # Calcula el siguiente punto usando el método de Chebychev
39         dx = f_x / df_x
40         x_next = x - dx
41         x_next = x - (f_x / df(x_next))
42
43         # Almacena los valores en las listas
44         iteraciones.append(i + 1)
45         valores_x.append(x_next)
46         errores.append(abs(x - x_next))
47
48         if abs(x - x_next) < tol:
49             break
50         x = x_next
51
52     end_time = time.time() # Tiempo de finalización
53     elapsed_time = end_time - start_time # Tiempo transcurrido
54
55     # Imprime el tiempo transcurrido

```

```

56     print(f"Tiempo de ejecución: {elapsed_time:.4f} segundos")
57
58     # Imprime la tabla
59     print("{:<10} {:<20} {:<20}".format('Iteración', 'x', 'Error'))
60     for i, x, e in zip(iteraciones, valores_x, errores):
61         print("{:<10} {:<20} {:<20}".format(i, x, e))
62
63     # Gráfico de convergencia
64     plt.figure(figsize=(10, 6))
65     plt.plot(iteraciones, errores, marker='o')
66     plt.yscale('log')
67     plt.xlabel('Iteración')
68     plt.ylabel('Error')
69     plt.title('Convergencia del Método de Chebyshev')
70     plt.grid(True)
71     plt.show()
72
73     return x
74
75 # Solicita al usuario la función y sus derivadas
76 f, df, d2f = pedir_funcion()
77
78 # Pide al usuario un valor inicial
79 x0 = float(input("Ingresa un valor inicial x0: "))
80
81 # Llama al método de Chebyshev
82 root = chebyshev_method(f, df, d2f, x0)
83 print("Raíz encontrada:", root)

```

Gráfico de convergencia para la ecuación de referencia con soluciones conocidas

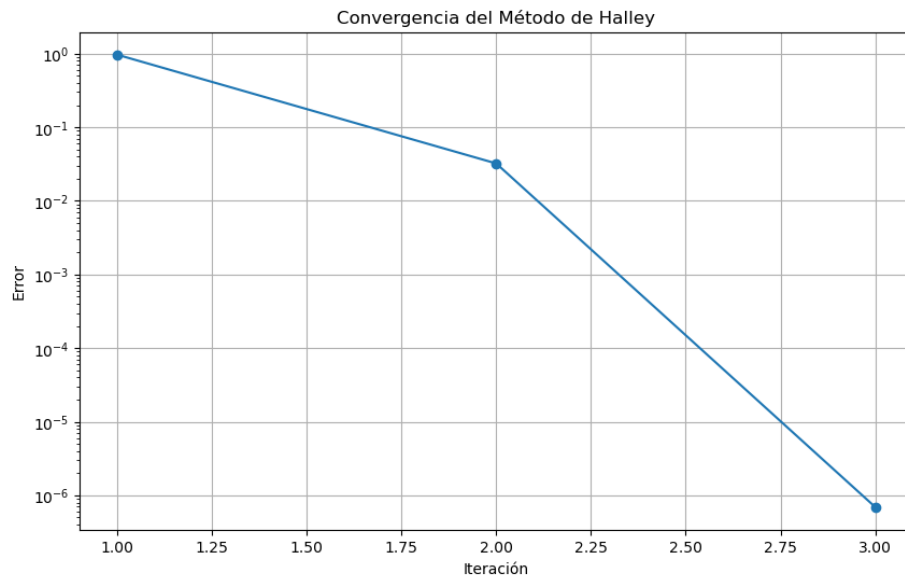


Figura Anexo B 1: Convergencia del Método Halley para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ con $x_0 = 0$

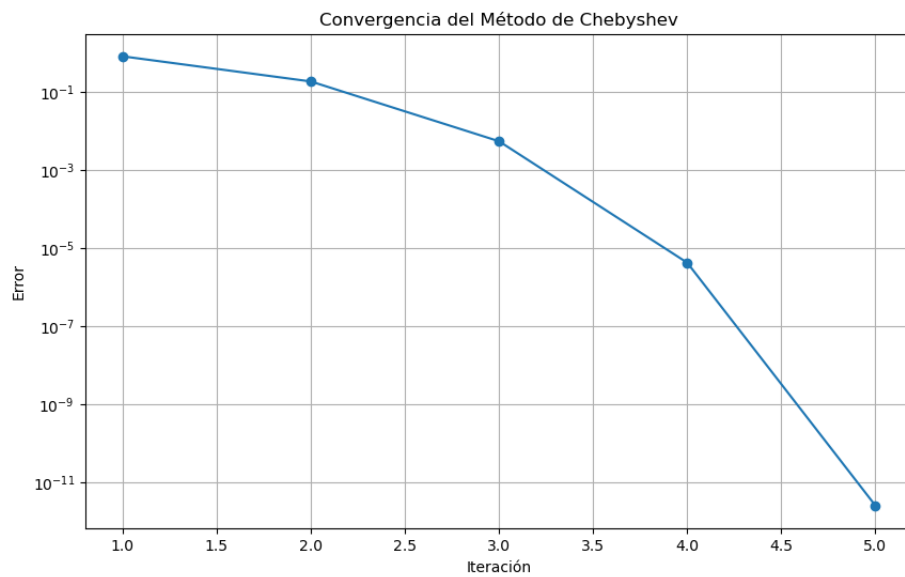


Figura Anexo B 2: Convergencia del Método Chebyshev para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ con $x_0 = 0$

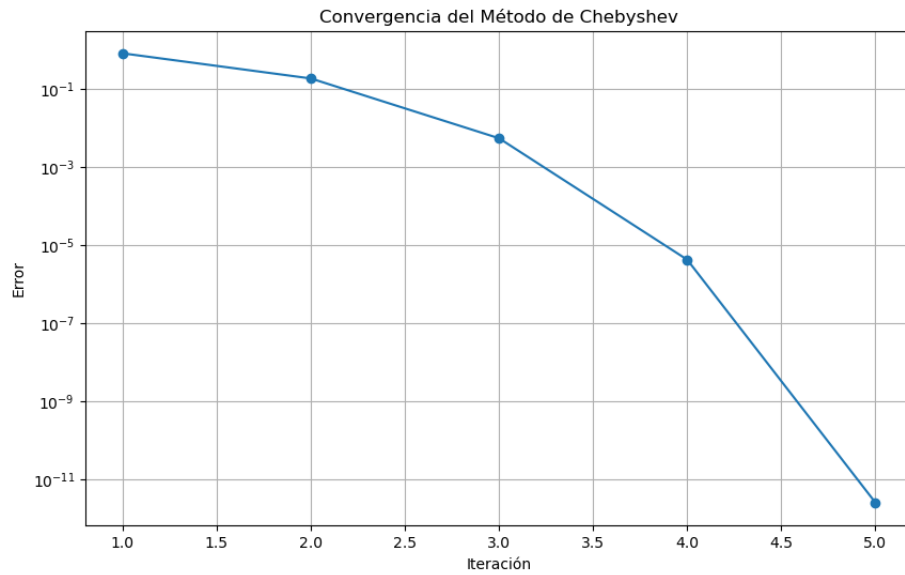


Figura Anexo B 3: Convergencia del Método Halley para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ con $x_0 = -6$

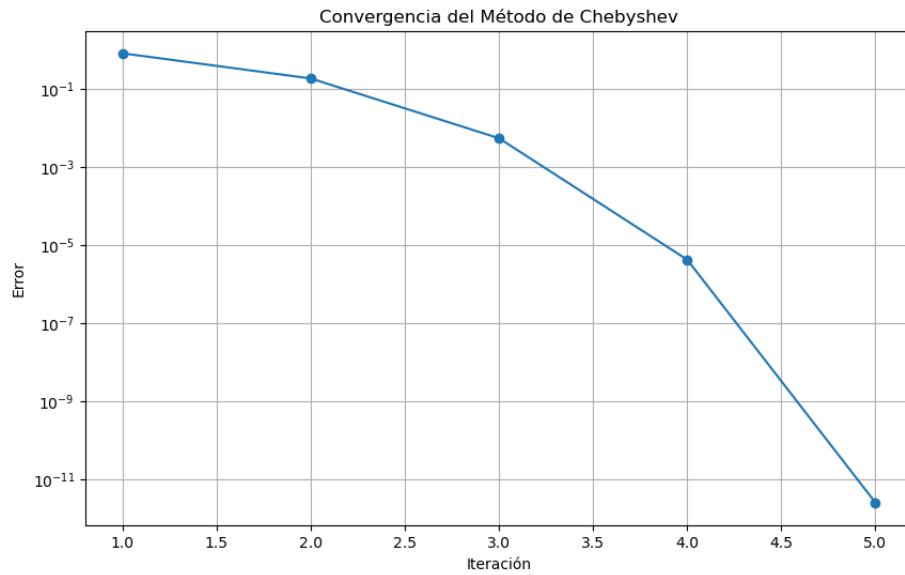


Figura Anexo B 4: Convergencia del Método Chebyshev para la ecuación $x^2 + 5x - 6 = 0$ con $x_0 = -6$

Gráfico de convergencia para la ecuaciones del análisis comparativo

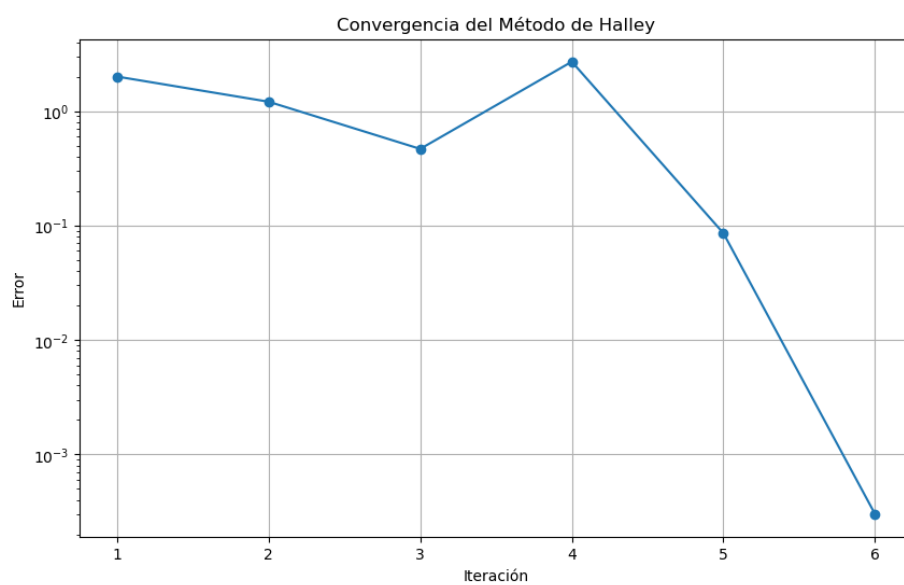


Figura Anexo C 5: Convergencia del Método Halley para la ecuación $x^3 - x - 2 = 0$ con $x_0 = 0$

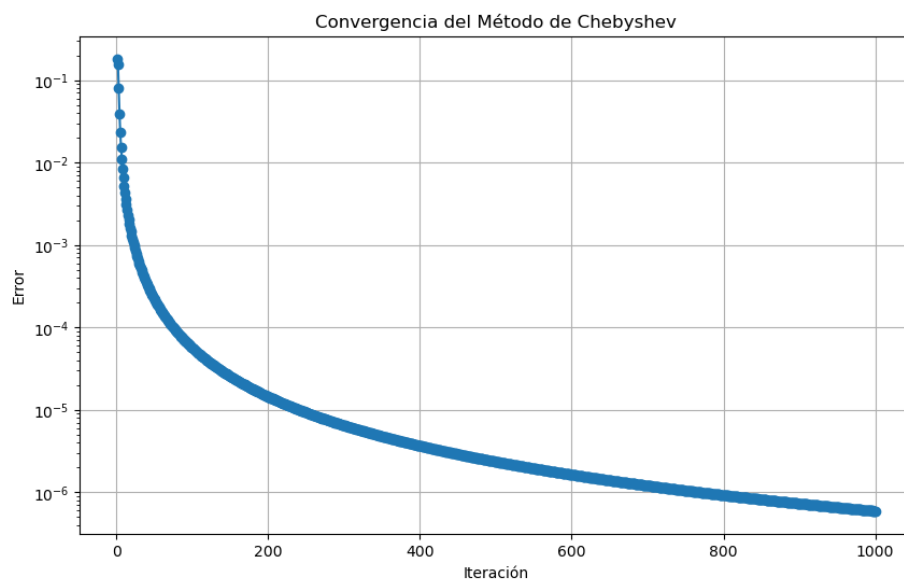


Figura Anexo C 6: Convergencia EC1 del Método Chebyshev para la ecuación $x^3 - x - 2 = 0$ con $x_0 = 0$

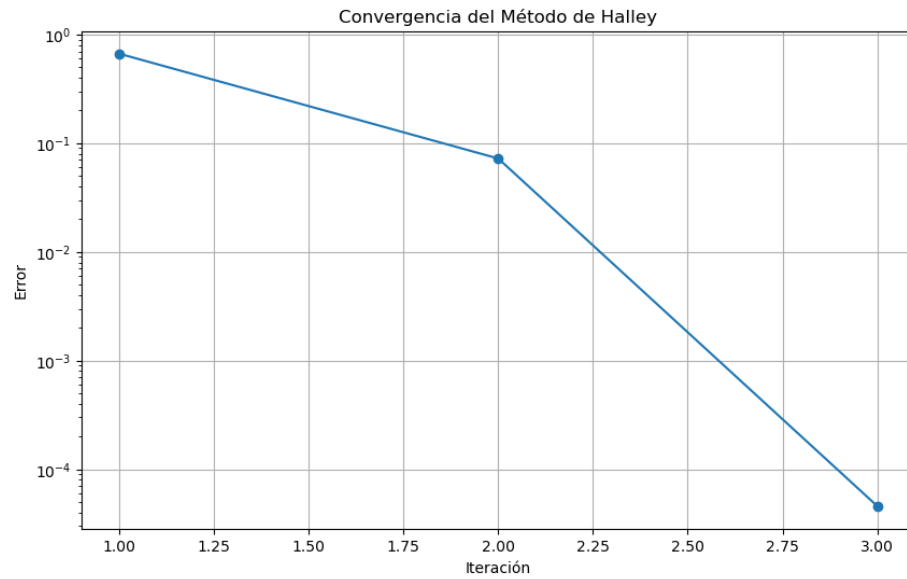


Figura Anexo C 7: Convergencia del Método Halley para la ecuación $\cos(x) - x = 0$ con $x_0 = 0$

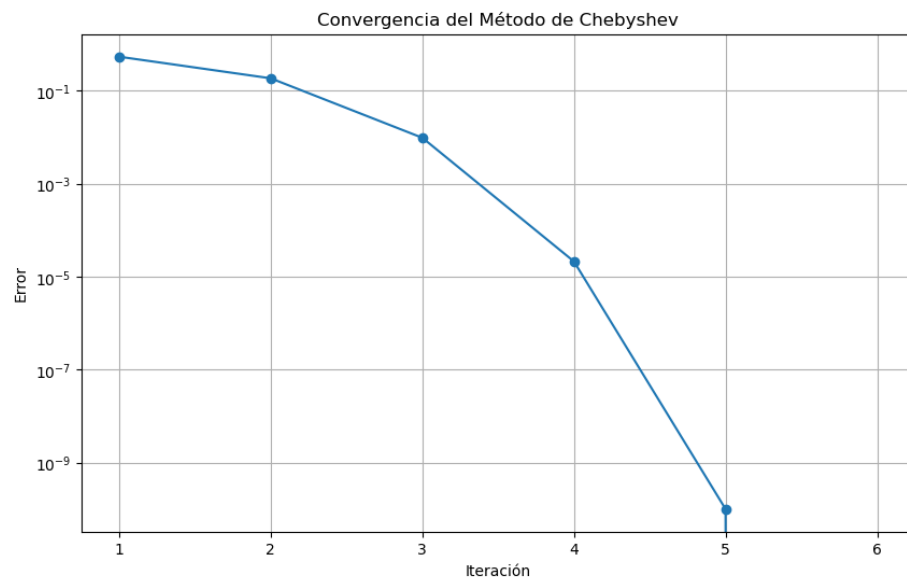


Figura Anexo C 8: Convergencia del Método Chebyshev para la ecuación $\cos(x) - x = 0$ con $x_0 = 0$

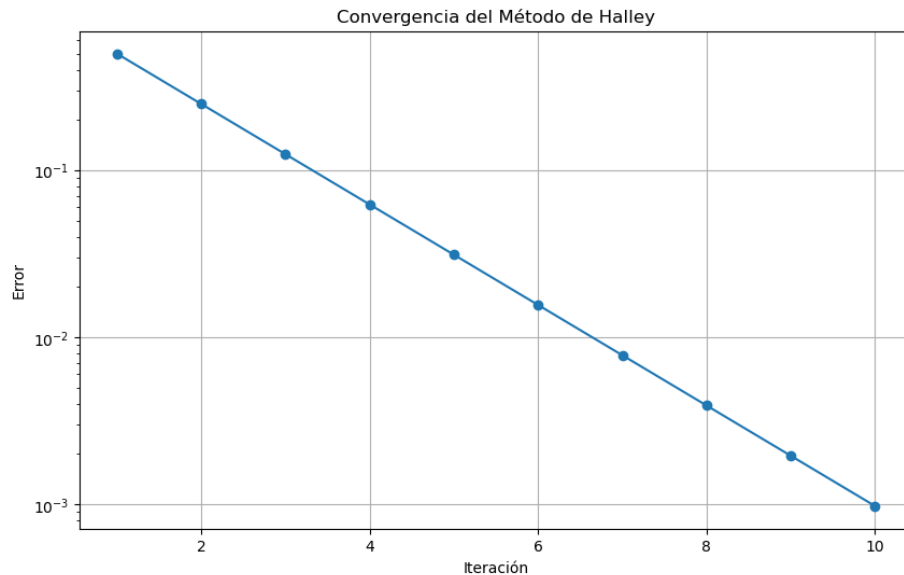


Figura Anexo C 9: Convergencia del Método Halley para la ecuación $(x-1)^3 = 0$ con $x_0 = 0$

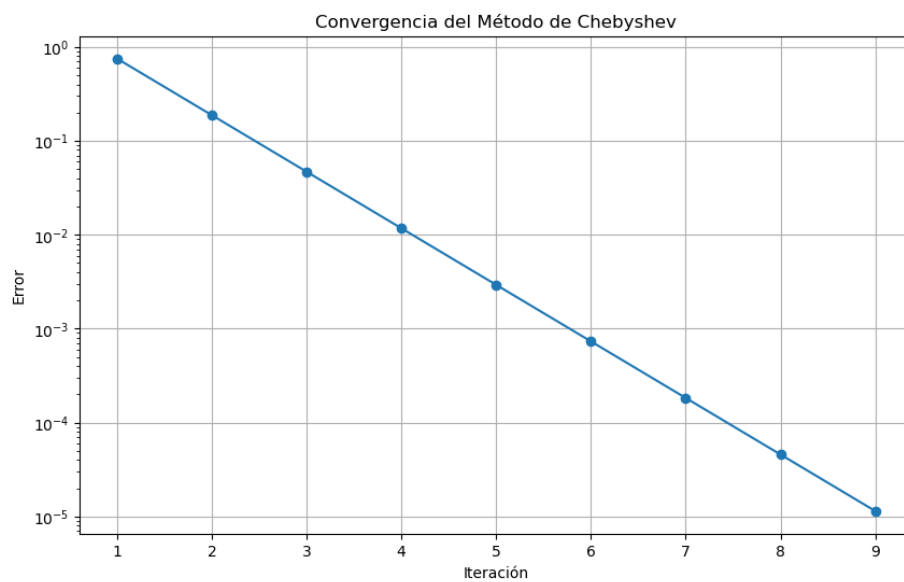


Figura Anexo C 10: Convergencia del Método Chebyshev para la ecuación $(x-1)^3 = 0$ con $x_0 = 0$

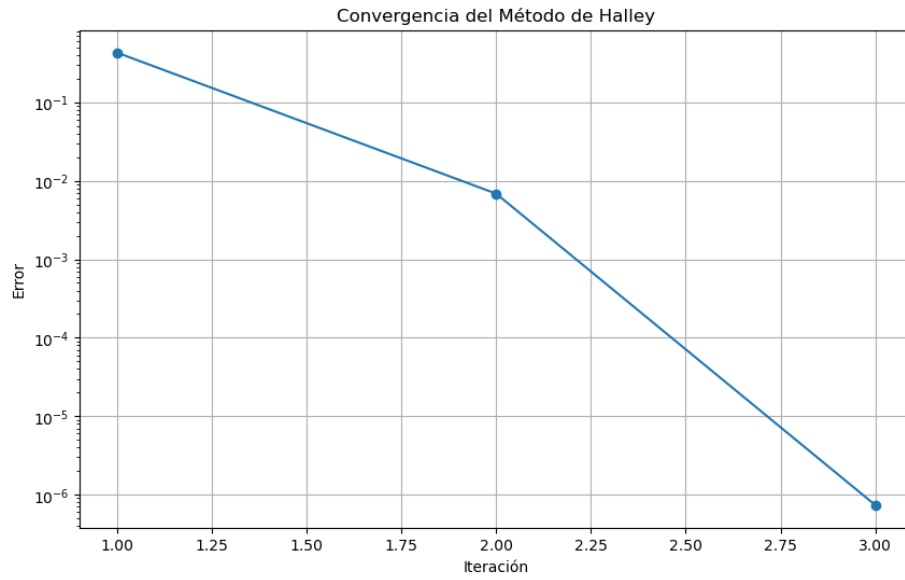


Figura Anexo C 11: Convergencia del Método Halley para la ecuación $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ con $x_0 = 0$

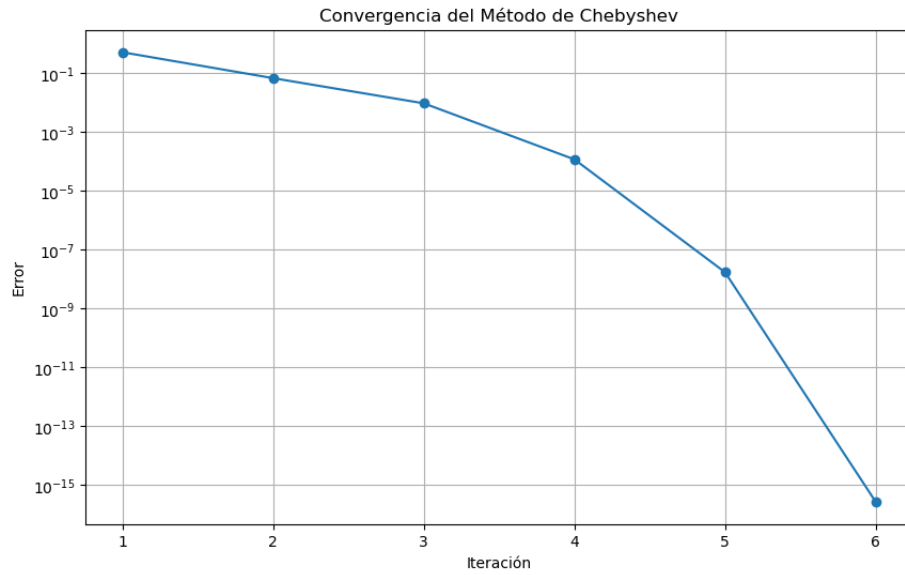


Figura Anexo C 12: Convergencia del Método Chebyshev para la ecuación $x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ con $x_0 = 0$