

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de
Maestría en Matemática.

TÍTULO:

Aplicación del Método Iterativo de Halley para Analizar Fractales.

SUSTENTANTE:

José Fernando Hernández Santana

ASESOR:

Dr. Manuel Aurelio Diloné.

Cotuí, Provincia Juan Sánchez Ramírez
Rep. Dom. Año Académico 2023

TÍTULO:

Aplicación del Método Iterativo de Halley para Analizar Fractales.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y consultas bibliográfica se han realizado respetando el derecho de autor, por lo se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo se requiere de su autorización.

Tesis presentada por **José Fernando Hernández Santana**, para la obtención del grado de Maestría en Matemáticas.

TÍTULO:

Aplicación del Método Iterativo de Halley para Analizar Fractales.

PROYECTO DE TESIS: MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

Aplicación del Método Iterativo de Halley para Analizar Fractales.

Proyecto de tesis presentado por el maestrante: **José Fernando Hernández Santana** para la obtención del grado de Magister en Matemática.

Composición del tribunal evaluador.

Metodología: _____

Contenidos: _____

Redacción: _____

Índice general

Declaración de Autoría	III
----------------------------------	-----

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes.	1
1.2.1 Antecedentes históricos de la teoría de fractales.	1
1.2.2 Desarrollo histórico del método de Halley.	2
1.2.3 Antecedentes académicos de la teoría de fractales aplicando métodos iterativos.	5
1.3 Planteamiento del problema.	6
1.4 Objetivos	8
1.4.1 Objetivos general.	8
1.4.2 Objetivos específicos.	8
1.5 Justificación.	9
1.6 Alcances y límites.	9

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.	10
2.1 Introducción.	10
2.2 Marco teórico.	10
2.2.1 Geometría Dinámica.	10
2.2.2 Iterando n-ésimo.	10
2.2.3 Grado de $\Re(z)$	10
2.2.4 Órbita de z	10
2.2.5 Punto fijo.	10
2.2.6 Punto periódico.	11
2.2.7 Órbita de un punto periódico.	11
2.2.8 Clasificación de los puntos fijos.	11
2.2.9 Cuenca de atracción.	11
2.2.10 Fractal.	12
2.2.11 Fractales lineales.	12

2.2.12	Fractales no lineales.	12
2.2.13	Caos.	12
2.2.14	Sistemas caóticos.	12
2.2.15	Conjunto de mandelbrot.	12
2.2.16	Funciones holomorfas.	12
2.2.17	Conjunto de Julia.	13
2.2.18	Convergencia de una sucesión.	13
2.2.19	Orden de convergencia.	13
2.3	Descripción del método de Halley	13
2.4	Convergencia del método de Halley	19
2.4.1	Convergencia Local	20
2.4.2	Convergencia Semilocal	20
2.4.3	Convergencia Global	22

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO.	23
3.1 Introducción.	23
3.2 Tipo de Investigación	23
3.3 Método de la investigación.	23
3.4 Diseño de la investigación.	23
3.5 Enfoque de la investigación.	23

CAPÍTULO IV

Presentación de los Resultados.	24
4.1 Introducción.	24
4.2 Imágenes generadas.	24
4.3 Análisis Fractal.	28

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

5.1	Introducción.	29
5.2	Conclusiones.	29
5.3	Futuras líneas de investigación.	29
	Anexos.	32

Índice de figuras

.1	Imagen generada por el polinomio $z^2 - 5z + 6$ con el uso del Método de Halley.	24
.2	Imagen generada por el polinomio $z^2 - 1$ con el uso del Método de Halley.	24
.3	Imagen generada por el polinomio $z^3 + 3z^2 - 4z - 12$ con el uso del Método de Halley.	25
.4	Imagen generada por el polinomio $z^3 + 4z^2 + 6z + 4$ con el uso del Método de Halley.	25
.5	Imagen generada por el polinomio $z^3 + 9z^2 + 27z + 27$ con el uso del Método de Halley.	25
.6	Imagen generada por el polinomio $z^3 - z^2 - 4$ con el uso del Método de Halley.	26
.7	Imagen generada por el polinomio $z^4 - 1$ con el uso del Método de Halley.	26
.8	Imagen generada por el polinomio $z^4 - 2z^3 + 2$ con el uso del Método de Halley.	26
.9	Imagen generada por el polinomio $z^4 + 2z^3 - 8z^2 - 18z - 9$ con el uso del Método de Halley.	27
.10	Imagen generada por el polinomio $z^4 + 16z^3 + 96z^2 + 256z + 256$ con el uso del Método de Halley.	27
.11	Imagen generada por el polinomio $z^4 + 7z^3 + 5z^2 - 31z - 30$ con el uso del Método de Halley.	27
.12	Imagen generada por el polinomio $z^4 + 7z^3 + 5z^2 - 31z - 30$ con el uso del Método de Chebyshev.	28

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción.

En este capítulo veremos los antecedentes históricos sobre los fractales y el método de Halley, así como también los antecedentes de la teoría de fractales aplicando métodos iterativos, también veremos el planteamiento del problema, objetivos tanto general como específicos, la justificación y alcances y límites.

1.2. Antecedentes.

1.2.1. Antecedentes históricos de la teoría de fractales.

Según Rodríguez R. (1995, como se citó en Ventura, 2022), La teoría de los fractales no surge como una teoría ajena a las demás disciplinas matemáticas, ya existentes, por el contrario, es el resultado de las matemáticas existente en el siglo pasado. El concepto más relevante que ayudó al desarrollo de esta teoría fue el de dimensión fractal, el cual era crucial para el estudio de conjuntos de puntos, superficies, y volúmenes. Con el desarrollo de este concepto tan importante se logró, la creación de conjuntos de puntos o curvas que contradecían las definiciones expuestas por George. Cantor, Waclaw Sierpiński, Helge von Koc, Giuseppe Peano, David Hilbert. Estos grandes escritores matemáticos contribuyeron, desarrollando del concepto de dimensión en el plano euclidiano, sin darse cuenta sentaron los cimientos para la creación de esta nueva teoría, que hoy conocemos como “Teoría de los fractales”.

Rodríguez R.(1995, como se citó en Rosario 2019), plantea que Mandelbrot es considerado como el padre de la geometría fractal. Sin embargo, se piensa que varios de los fractales y su descripción vienen de las matemáticas clásicas. Además, varios matemáticos del siglo pasado inventaron algoritmos especiales para su creación, tales como: Cantor (1872), Peano (1890), Sierpiński (1916), solo por nombrar

unos pocos. Es verdad que aquella matemática jugó un papel importante en los conceptos de Mandelbrot para la creación de la nueva geometría.

Según Peitgen (1992, como se citó en Rosario 2019), los orígenes de la teoría fractal se remontan al siglo XIX, con las ideas de Henri Poincaré, quien inició el estudio formal de los sistemas dinámicos. Posteriormente, diversos científicos matemáticos como G. Cantor, W. Sierpiński, H. Von Koch, G. Peano y D. Hilbert trabajaron con distintos aspectos de esta teoría. La teoría de los fractales no se desarrolló independiente de otras disciplinas, dicha teoría nace de secuencias matemáticas que datan a finales del siglo pasado. El problema de dimensión era crucial para la caracterización de conjuntos de puntos, curvas, superficies y volúmenes. A medida que se definía este importante concepto, se creaban por los mismos matemáticos conjuntos de puntos o curvas que contradecían dichas definiciones. Estos matemáticos contribuyeron notablemente a elucidar el concepto de dimensión y el nacimiento de una nueva herramienta de investigación: la teoría de fractales, aunque ellos nunca lo supieron.

De acuerdo a Mandelbrot (1982) en su libro "La geometría fractal de la naturaleza", el desarrollo cronológico de los conceptos y técnicas que constituyen la teoría de fractales ocurrió desde diferentes vertientes. El desarrollo histórico de dicha teoría no presenta una estructura estrictamente lineal, ya que se ha nutrido de matemáticos como N. Wiener, B. Mandelbrot, L. F. Richardson, y de otras disciplinas muy diversas.

1.2.2. Desarrollo histórico del método de Halley.

El Método Iterativo de Halley es un método numérico para la solución de ecuaciones no lineales que fue propuesto por el matemático y astrónomo británico Edmund Halley en el siglo XVII.

En correspondencia con Scavo T. y Thoo J. (1995), Halley quedó impresionado por el trabajo del ingenioso profesor de matemáticas Thomas Fautet de Lagny, quien publicó un libro en París en 1692, donde presentó fórmulas que servían para la extracción de raíces de potencias puras, de manera especial, la raíz cúbica. El resultado que impresionó a Halley fue el de la raíz de $\sqrt[3]{a^3 + b}$ con

$a, b \in \mathbb{Z}$ el cual se encuentra entre

$$a + \frac{ab}{3a^3 + b} \quad y \quad \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}} \quad \text{para} \quad a^3 > b > 0 \quad (.1)$$

Estas fórmulas fueron nombradas por Halley como fórmulas racional e irracional, respectivamente. Cada caso es especial, sin embargo, Halley prefirió la fórmula irracional antes que la racional debido al gran divisor que posee ésta última, lo que significa que dificultaría el trabajo del cálculo en algunas aplicaciones.

De acuerdo a Ezquerro J. (2001) Halley inició su demostración de la fórmula de Lagny tratando de conseguir un término corrector ε de forma que $(a + \varepsilon)^3 = a^3 + b$ lo cual nos lleva a $b = 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3$. obviando el término ε^3 quedando expresado como $b \approx 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2$ de donde se pueden tener cálculos aproximados para ε como se muestra a continuación

$$\frac{b}{3a^2} \approx \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{a} \approx \varepsilon \quad (.2)$$

$$\varepsilon \approx \frac{b}{3a^2 + 3a\varepsilon} \quad (.3)$$

luego al reemplazar (.2) en (.3) se obtiene

$$\varepsilon \approx \frac{b}{3a^2 + 3a\frac{b}{3a^2}} = \frac{ab}{3a^3 + b}$$

$\therefore$ la aproximación para la forma racional de Lagny estaría dada por:

$$\sqrt[3]{a^3 + b} \approx \frac{ab}{3a^3 + b} \quad (.4)$$

Usando esta notación, definiendo $f(x) = x^3 - a^3 - b$ y tomando $x_0 = a$, entonces la expresión (.4) corresponde a lo que sería el primer paso del Método de Halley expresado de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (.5)$$

de donde

$$L_f x_n = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} \quad (.6)$$

Según Scavo T. y Thoo J. (1995) Halley también admiraba el trabajo del ma-

temático francés del siglo XVI, François Viète, popularizador de lo que más tarde se conocería como el *método de Horner* una técnica de aproximación iniciada por varios matemáticos chinos en el siglo XII. El método de Viète, como se le suele llamar, es un algoritmo lineal convergente similar al método de la Bisección y se le puede aplicar a cualquier polinomio que por lo menos tenga una solución real. También se puede usar para producir valores iniciales del método de Newton-Raphson y de otros métodos iterativos de orden superior, algo que el mismo Halley podría haber hecho.

Al parecer, el método de Viète fue un importante precursor del método de Halley y de los métodos de búsqueda de raíces en general como el Newton-Raphson. Halley, al escribir su artículo en el año 1694, aparentemente no se percató de que su método hacía uso de las derivadas o fluxiones, como él lo habría llamado. De acuerdo con Kollerstrom N. (1992) ésto no es sorprendente considerando que fue Simpson en 1740 quien conectara las derivadas con el método de Newton-Raphson; lo que es verdaderamente sorprendente es que Brook Taylor reconociera la derivada para el método de Halley en 1712, Feigenbaum L. es decir, notó lo que Halley no había logrado comprender: que los coeficientes en los ejemplos de Halley están directamente relacionados con las derivadas sucesivas del polinomio original.

A pesar del gran avance que tuvo Taylor, no pudo lograr una fórmula general para el método de Halley. Quien pudo obtener este gran alcance un siglo después fue Schrödinger, al derivar la función de iteración lo que conocemos hoy en día como el método de Halley. En su artículo Schröder E. hace mención a la fórmula del Halley de una manera muy pasajera debido a que estaba interesado en las funciones de interacción orden superior, por consiguiente Kobal E. en un artículo publicado en 1891 presentó la derivada de la fórmula de Halley pero por desgracia ésta quedó confusa. Luego, Frame J. (1944, se citó en Gómez 2019) tuvo éxito al derivar por primera vez la función de interacción usando el polinomio de Taylor de segundo grado.

1.2.3. Antecedentes académicos de la teoría de fractales aplicando métodos iterativos.

A través de los años, distintos autores han escrito grandes aportes sobre lo que respecta a los métodos interactivos para el cálculo y la representación de soluciones de ecuaciones no lineales, es por ello que a continuación presentaremos algunos de los resultados realizados en estas investigaciones.

Bermúdez (2009, se citó en Ventura (2022)), estudia los métodos interactivos de alto orden para poder lograr aproximar las raíces de ecuaciones no lineales. Es preciso destacar que, en esta investigación, expresó el uso de algunos métodos clásicos como Chebyshev, Halley, Super-Halley, entre otros, hace una comparación con respecto a la eficiencia de los mismos.

García (2013), presenta los aspectos generales de este método, además del funcionamiento y la utilidad del mismo. De igual modo, se presentan la matemática aplicada, y se comprueba el uso de métodos interactivos para la resolución de ecuaciones no lineales. Para el cual se utilizaron los polinomios en el campo de los complejos, los cuales de acuerdo con las conclusiones arrojadas por este estudio permiten generar fractales.

Penkova (2011), estudió los métodos interactivos que permiten obtener las soluciones a ecuaciones no lineales, y consiguió una familia de variantes del método de Newton mediante cualquier cuadratura de Gauss. De igual modo, resalta que estos métodos son multipasos y que el orden de convergencia puede variar desde el orden seis hasta el diecisiete.

Rosario (2019), señala que el método iterativo de Chebyshev, en el campo de los complejos, es más caótico que otros métodos, como por ejemplo el de Newton, puesto a que este último presenta menos apariciones de fractales.

1.3. Planteamiento del problema.

Un fractal es un objeto matemático caracterizado por presentar una estructura que se repite a diferentes escalas, es decir, conserva la misma apariencia y siempre existe una similitud clara entre Partes muy distantes de una misma figura fractal.

Los fractales son herramientas matemáticas versátiles y poderosas que encuentran aplicaciones en diversas áreas del conocimiento. Su capacidad para capturar y representar la complejidad y los patrones autosemejantes en fenómenos naturales, estructuras y sistemas complejos los convierte en una herramienta invaluable para comprender, modelar y analizar el mundo que nos rodea. Los fractales nos permiten estudiar y simular desde la forma de una costa, el crecimiento de una planta o un sistema vascular, hasta el comportamiento de los mercados financieros o la propagación de enfermedades. Además, los fractales tienen aplicaciones en la generación de gráficos, diseño de algoritmos de compresión de datos, optimización de procesos, diseño de antenas y en la creación de efectos visuales en películas y videojuegos.

Los fractales tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas. Su capacidad para representar patrones complejos y autosemejantes a diferentes escalas los hace valiosos en muchas áreas. En el campo de la informática y los gráficos por computadora, los fractales se utilizan para generar paisajes, texturas y efectos visuales realistas en películas, videojuegos y animaciones. En la física y la biología, los fractales se aplican para modelar fenómenos naturales, como la formación de nubes, el crecimiento de estructuras biológicas y la distribución de sistemas complejos. En la economía y las finanzas, los fractales se utilizan para analizar y predecir el comportamiento de los mercados financieros y los precios de los activos. Además, los fractales encuentran aplicaciones en la compresión de datos, la optimización de procesos, el diseño de antenas, el análisis de redes y en el campo de la medicina, donde se utilizan para estudiar y entender patrones en imágenes médicas y señales biomédicas.

La estructura fractal ha sido reconocida desde hace mucho tiempo, aunque por el hecho de que se presenta de forma abstracta en la naturaleza, con una dimensión no necesariamente entera y su generación matemática nace en el campo de los números complejos, éstas hasta solo recientemente ha sido posible sacarle partido.

Uno de los métodos que utilizamos para generar fractales es el método de Halley, éste es una técnica numérica que desempeña un papel crucial en la resolución de ecuaciones no lineales y en la aproximación de raíces. Su importancia radica en su eficiencia y rapidez para encontrar soluciones aproximadas, lo que lo convierte en una herramienta invaluable en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. El método de Halley permite abordar problemas complejos y no lineales que no pueden resolverse analíticamente, proporcionando soluciones numéricas confiables y precisas. Además, su convergencia rápida y robusta lo hace especialmente útil en situaciones donde se requiere una respuesta rápida y eficiente.

Gracias al método de Halley, los investigadores y profesionales pueden resolver ecuaciones no lineales con mayor facilidad, lo que les permite avanzar en sus investigaciones, tomar decisiones informadas y obtener resultados precisos en diversos campos, como la física, la ingeniería, la economía y muchas otras disciplinas que requieren el análisis y la aproximación de raíces de ecuaciones.

La capacidad de caracterizar las zonas de convergencia es de suma importancia en el estudio de métodos numéricos y análisis de algoritmos. Comprender y delimitar las regiones donde un método converge de manera efectiva nos brinda información crítica sobre su rendimiento y confiabilidad. Al conocer las zonas de convergencia, podemos determinar qué regiones del espacio de solución son accesibles mediante el método y qué condiciones iniciales o parámetros pueden conducir a resultados convergentes. Esto nos permite optimizar y adaptar los métodos a problemas específicos, evitando regiones de divergencia y mejorando la eficiencia computacional. Además, la caracterización de las zonas de convergencia nos ayuda a evaluar la estabilidad y robustez de los métodos numéricos, lo que es

esencial para garantizar la precisión y confiabilidad de los resultados obtenidos. Saber caracterizar las zonas de convergencia nos proporciona una comprensión más profunda de los métodos numéricos y nos permite utilizarlos de manera más efectiva en diversas aplicaciones científicas, ingenieriles y matemáticas.

Con las situaciones planteadas anteriormente es necesario destacar que en los casos donde las soluciones pertenecen al campo de los números complejos con estos métodos iterativos podemos generar fractales. Estos fractales se ilustran con la gráfica del proceso de convergencia de los métodos iterativos a la solución de la ecuación. Es por esta razón que surgen las siguientes interrogantes:

1. ¿Se podrán generar Fractales, mediante la aplicación del método de Halley, utilizando polinomios?
2. ¿Cuáles caracterizaciones a partir de las zonas de convergencia se podrán realizar usando los fractales generados?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivos general.

Analizar los fractales generados por el Método de Halley.

1.4.2. Objetivos específicos.

1. Generar fractales mediante la aplicación del Método de Halley, utilizando polinomios cuadráticos.
2. Generar fractales mediante la aplicación del Método de Halley, utilizando polinomios cúbicos.
3. Generar fractales mediante la aplicación del Método de Halley, utilizando polinomios de cuarto grado.
4. Caracterizar los fractales obtenidos mediante un análisis gráfico.

1.5. Justificación.

Esta tesis se justifica por la necesidad de estudiar un método iterativo y generar fractales. Al explorar y desarrollar este enfoque, se espera contribuir al avance del conocimiento en el campo de los fractales, permitiendo una comprensión más precisa de los fenómenos complejos y brindando herramientas más eficaces para su modelización y simulación. Asimismo, esta investigación pretende abrir nuevas vías de estudio y fomentar el desarrollo de aplicaciones prácticas en diversas áreas, como la física, la biología, la economía y la informática, entre otras, donde los fractales juegan un papel fundamental.

Esta investigación radica su importancia ya que contribuye a la comprensión más profunda de la interacción entre este método iterativo y las estructuras fractales, así como también que sirva de motivación para futuras investigaciones.

1.6. Alcances y límites.

La presente investigación pertenece al campo de las matemáticas aplicadas, específicamente a la Geometría Dinámica y Análisis Funcional. En esta investigación simplemente se limitará a analizar las imágenes generadas por el método de Halley, a partir de la generación de las superficies de soluciones de polinomios cuadráticos, cúbicos y de cuarto grado.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1. Introducción.

En este capítulo se presentan una serie de conceptos imprescindibles para la demostración y desarrollo de los objetivos de la presente investigación, que tiene como título: Aplicación del Método Iterativo de Halley para Analizar Fractales.

2.2. Marco teórico.

2.2.1. Geometría Dinámica.

La expresión Geometría Dinámica se refiere a construcciones de objetos matemáticos empleando herramientas digitales que permiten el arrastre y la deformación, conservando invariantes ciertas propiedades geométricas que se les ha asignado en el proceso de construcción, (Costa y Sombra, 2019).

2.2.2. Iterando n-ésimo.

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z \in \mathbb{C}$, la raíz de dicha función. Se define el iterando n-ésimo f^n de f mediante $f^0 = Id$, donde Id es la función identidad en $\mathbb{C}$, y $f^{n+1} = f \circ f^n$. En la expresión previa, $f \circ f^n$ indica una composición de función, que tiene el valor, $f \circ f^n(z) = f(f^n(z))$, (García, 2013).

2.2.3. Grado de $\mathfrak{R}(z)$.

El grado de un polinomio racional $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ es la diferencia entre el grado del numerador $P(z)$ y el grado del denominador $Q(z)$. Representa el máximo exponente de la variable z que aparece en el polinomio racional. Si el grado del denominador es mayor que el grado del numerador, el grado del polinomio racional es negativo, indicando que es un polinomio constante o igual a cero. El grado de un polinomio racional es una propiedad fundamental que ayuda a comprender el comportamiento y las propiedades de las funciones racionales. (García, 2013).

2.2.4. Órbita de z .

Para $z \in \mathbb{C}$ definimos su Órbita como el conjunto

$$orb(z) = z, R(z), R^2(z), \dots, R^k(z), \dots,$$

donde R^k indica la composición de R consigo misma k veces, (García, 2013).

2.2.5. Punto fijo.

Se dice que $z^* \in \mathbb{C}$, es un punto fijo de $R(z)$ si $R(z^*) = z^*$ (García, 2013).

2.2.6. Punto periódico.

Un punto periódico de la función R de período $n > 1$ es un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $R^n(z_0) = z_0$ y $R^j(z_0) \neq z_0$ para $0 < j < n$. Obsérvese que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto periódico de período $n \geq 1$, entonces z_0 es un punto fijo de R^n (García, 2013).

2.2.7. Órbita de un punto periódico.

La órbita de un punto periódico está constituida por los n diferentes puntos $z, R(z), R^2(z), \dots, R^{n-1}(z)$ y al conjunto de estos n puntos se le llama órbita periódica de período n (o n – ciclo) (García, 2013).

2.2.8. Clasificación de los puntos fijos.

Sea $z^* \in \mathbb{C}$ un punto fijo de una función racional R . Se dice que z^* es

- Superatractor si $R'(z^*) = 0$.
- Atractor si $|R'(z^*)| < 1$.
- Indiferente si $|R'(z^*)| = 1$.
- Repulsor si $|R'(z^*)| > 1$ (García, 2013).

2.2.9. Cuenca de atracción.

Sea ς un punto fijo atractor de $R(z)$. La cuenca de atracción de ς es el conjunto:

$$B(\varsigma) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : R^n(z) \rightarrow \varsigma\}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. La cuenca de atracción de un punto fijo atractor ς de $R(z)$, denotado por $B^*(\varsigma)$, es la componente conexa de $B(\varsigma)$ que contiene a ς . Si z_0 es un punto periódico atractor de período n de $R(z)$, la cuenca de atracción de la órbita, $orb(z)$ es el conjunto

$$B(orb(z_0)) = \bigcup_{j=0}^{n-1} R^j(B(z_0))$$

Donde $B(z_0)$ es la cuenca de atracción de z_0 que es el punto fijo de R^n , y su cuenca inmediata de atracción es el conjunto.

$$B(orb(z)) = \bigcup_{j=0}^{n-1} R^j(B^*(z))$$

(García, 2013).

2.2.10. Fractal.

Un fractal es un conjunto matemático que puede gozar de auto similitud a cualquier escala, su dimensión no es entera o si lo es, no es un entero normal. El hecho de que goce de auto similitud significa que el objeto fractal no depende del observador para ser en sí (Mandelbrot, 1982).

2.2.11. Fractales lineales.

Son aquellos que se construyen con un simple cambio de escala, como lo son los conjuntos fractales creados por el hombre con figuras sencillas (rectas, triángulos, etc.) y la mezcla de ellas. Los ejemplos clásicos de fractales lineales son el Conjunto de Cantor, Curva de Von Koch, Triángulo de Sierpinski, entre otras (Ver Anexo 1) (Váldez, 2016).

2.2.12. Fractales no lineales.

Son aquellos que están formados por los números complejos, debido a esto se les designa el término de caóticos. Estos fractales son generados por computadoras y creados por el hombre, como lo son el Conjunto de Mandelbrot y el Conjunto de Julia, entre otros (Ver Anexo 1) (Váldez, 2016).

2.2.13. Caos.

El caos es un fenómeno en el que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de un sistema pueden conducir a resultados completamente diferentes a largo plazo (Edward Lorenz, 1963).

2.2.14. Sistemas caóticos.

Los sistemas caóticos son aquellos en los que pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales pueden llevar a resultados impredecibles y altamente sensibles a largo plazo (Robert May, 1976).

2.2.15. Conjunto de mandelbrot.

Es una sucesión numérica contenida entre el intervalo $(0, 2)$, la cual es obtenida tras evaluar la función $f_z = z^2 + c$. con z y c complejos (Mandelbrot, 1982).

2.2.16. Funciones holomorfas.

Son funciones que se definen sobre un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$, que además son complejo-diferenciales en cada punto (García, 2013).

2.2.17. Conjunto de Julia.

El conjunto de Julia de una función holomorfa f está constituido por aquellos puntos que bajo la iteración de f tienen un comportamiento caótico. El conjunto se denota $J(f)$ (García, 2013).

2.2.18. Convergencia de una sucesión.

Una sucesión x_n es convergente cuando existe y es finito $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Si dicho límite es infinito, la sucesión es divergente, y si no existe, la sucesión es oscilante (Martínez, 2016).

2.2.19. Orden de convergencia.

Sea una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge a x^* con $x_n \neq x^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sean $p > 0$ y $c > 0$. Si,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = c,$$

entonces se dice que la sucesión x_n converge a x^* con orden de convergencia p , y una constante de error asintótica c . Si $p = 1, 2, 3, 4, 5$, se dice que es de orden lineal, cuadrático, cúbico, cuartico y quintico respectivamente (Diloné, 2013).

2.3. Descripción del método de Halley

El método de Halley es un algoritmo numérico el cual puede ser utilizado para resolver ecuaciones no lineales de la forma:

$$f(x) = 0 \tag{.1}$$

para el cual produce valores que por medio a su aproximación se espera que muestren el valor esperado para la solución de la ecuación. también este método puede ser expresado de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \tag{.2}$$

otra forma que se utiliza para expresarlo es la conexidad logarítmica en la cual su expresión resulta de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}L_f(x_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \tag{.3}$$

Partiremos de estas situaciones y de Diloné M. (2013) para así deducir la descripción del mencionado método, el cual se puede manejar por distintas técnicas que a través del tiempo le han permitido múltiples aplicaciones a las funciones, entre los cuales se encuentran:

A partir del desarrollo de Taylor

Dado el siguiente polinomio de Taylor de segundo grado

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2,$$

donde x_n es una raíz aproximada de (.1). Aquí el objetivo es determinar un punto x_{n+1} donde la gráfica de $f(x)$ corta a X lo que sería resolver la siguiente ecuación:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2, \quad (.4)$$

si factorizamos el término $(x_{n+1} - x_n)$ de la ecuación (.4) se obtiene

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) \left(f'(x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n)(x_{n+1} - x_n) \right),$$

luego

$$x_{n+1} - x_n = - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2} f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)}$$

Si se aplica la corrección de Newton $\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$ y así aproximamos la diferencia de $x_{n+1} - x_n$ se obtiene que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

lo que sería la función de iteración del método de Halley.

Construcción Geométrica: Método de las Hipérbolas Tangentes

Aparentemente fue Salehov el primero en sugerir que la función iteración de Halley podría derivarse usando una función racional osculante de la forma

$$y(x) = \frac{x + c}{ax + b} \quad (.5)$$

Sabiendo que una curva oscultriz de una función f en x_n es aquélla que satisface la ecuación

$$y^{(k)}(x_n) = F^{(k)}(x_n), \text{ para } k = 0, 1, 2. \quad (.6)$$

De acuerdo con Scavo T. y Thoo J. (1995) donde por conveniencia se utiliza una ecuación equivalente a (.5) de donde surge:

$$y(x) = \frac{(x - x_n) + c}{a(x - x_n) + b}, \quad (.7)$$

Si combinamos las ecuaciones (.6) y (.7) se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{c}{b} &= f(x_n) \\ \frac{b-ac}{b^2} &= f'(x_n) \\ \frac{2a(ac-b)}{b^3} &= f''(x_n).\end{aligned}$$

cuya solución sería:

$$a = \frac{-f''(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad (.8)$$

$$b = \frac{2f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad (.9)$$

$$c = \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}. \quad (.10)$$

Ahora bien, si tomamos la ecuación (.7) como una nueva aproximación produciría una intersección con el eje y , es decir si $y(x_{n+1}) = 0$, entonces se tiene que:

$$x_{n+1} = x_n - c \quad (.11)$$

luego sigue que si sustituimos la igualdad (.10) en la (.11) se puede obtener:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Lo cual sería la ecuación presentada en (.3)

Interpolación Exponencial, otra interpretación Geométrica

Esta técnica esta basada en un desarrollo presentado por Kawar, en el cual utiliza una interpolación mediante funciones exponenciales y polinomiales. Sabiendo que la aproximación de una función $f(x)$ por una función oculariz $y(x)$ de tal forma que $y^j(x_n) = f^j(x_n)$, para $j = 0, 1, 2$, de donde se considera una curva

$$y(x) = e^{a(x-x_n)} [b(x-x_n) + c], \quad (.12)$$

donde los parámetros a determinar son a , b , y c .

Ahora bien, si se denota la intersección con la abscisa de la curva (.12) por x_{n+1} , se tendrá que $y(x_{n+1}) = 0$, por lo que:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{c}{b}.$$

Luego para que el método deseado tenga convergencia cuadrática se debe de cumplir que

$$y(x_n) = f(x_n), \quad y'(x_n) = f'(x_n),$$

lo que nos lleva a las siguientes igualdades $c = f(x_n)$, $b = f'(x_n) - a$. En conclusión, se obtiene la familia uniparamétrica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - af(x_n)}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (.13)$$

Para que el método presentado en (.13) tenga convergencia cúbica, se debe exigir que

$$y''(x_n) = f'',$$

o lo que sería

$$a^2 f(x_n) - 2af'(x_n) + f''(x_n) = 0 \quad (.14)$$

si tomamos valores de $a \neq 0$, pero muy próximos a este, para así deprecia el término a^2 el cual está dado en la ecuación (.14). Luego se puede obtener una solución aproximada de la siguiente forma

$$a = \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \quad (.15)$$

Si se sustituye la expresión (.15) en la (.13) se puede obtener

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

la cual expresa el método de Halley

A partir de la interpolación racional inversa

Para este caso se considera resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, consideramos la función que a cada x le hace corresponder $y = f(x)$, denotando así a la función inversa como $x = \phi(y)$, para luego llegar a una solución aproximada de $f(x) = 0$, los cuales se transforman en la aproximación de la inversa $x = \phi(y)$, en la cual se aplica el desarrollo de Taylor. Cabe destacar que esta idea se le atribuye matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev. Retomando el problema de la interpolación inversa y asumiendo una aproximación de $\phi(y)$ por una función racional de la forma

$$\phi(y) \simeq \frac{(y - y_0) + a}{b(y - y_0) + c} = R(y)'$$

de donde $\phi^{(k)}(y_0) = R^{(k)}(y_0)$, para cada $k = 0, 1, 2$, de donde sigue que

$$R(y) = \frac{(2f'(x_0) + x_0 f''(x_0))(y - y_0) + 2x_0 f'(x_0)^2}{f''(x_0)(y - y_0) + 2f'(x_0)^2}$$

Si tomamos una nueva aproximación para un $x_1 = R(0)$ sigue que

$$x_1 = \frac{-f(x_0)(2f'(x_0) + x_0 f''(x_0)) + x_0 f'(x_0)^2}{-f(x_0)f''(x_0) + 2f'(x_0)^2},$$

después de operar adecuadamente, se puede escribir el método de Halley que se presenta en (.3)

$$x_1 = x_0 - \frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Utilizando fracciones continuas

Esta es una idea que fue presentada por Frame para la obtención de método de Halley. En el cual se debe obtener un ε y su posterior desarrollo en serie de potencias. Puesto que este procedimiento es una forma idéntica al de la interpolación inversa continuaremos con la misma notación de $x = \phi(y)$ para cada $y = f(x)$. El término corrector ε es de la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= r - x_0 = \phi(0) - \phi(y_0) = \sum_{k \geq 1} c_k \nu^k \\ &= \nu - \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)} \nu^2 + \frac{3f''(x_0) - f'''(x_0)f'(x_0)}{6f'(x_0)} \nu^3 + \dots, \end{aligned}$$

donde r representa la solución de $f(x) = 0$, $\nu = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ y $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}$, y así sucesivamente. Desarrollando en fracciones continuas el desarrollo del término corrector será:

$$\varepsilon = \sum_{k \geq 1} c_k \nu^k = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots \frac{a_j}{b_j + \rho_{j+1}}}}}, \quad (.16)$$

donde

$$\rho_j = \frac{a_j}{b_j + \rho_{j+1}}.$$

Dependiendo de las diversas fracciones continuas y del lugar donde se trunque a la fracciones presentada en (.16), se obtendrán diversos procesos iterativos. Para nuestro caso, debemos truncarla en el segundo término y calcular a a_2 . Ahora bien, a_2 es el primer término del desarrollo en serie de potencias de ρ_2 , Como:

$$\rho_2 = \frac{a_1 - \rho_1}{\rho_1} = -c_2 \nu + (c_2^2 - c_3) \nu^3 + \dots$$

Luego $a_2 = -c_2 \nu = -\frac{L_f(x_0)}{2}$. Por tanto,

$$\varepsilon \simeq \frac{a_1}{1 + a_2} = -\frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

obteniéndose así el término corrector del método de Halley.

Acelerando el método de Newton.

Uno de los problemas que intentan resolver los procesos iterativos es el de aproximar la solución de una ecuación de la forma $f(x) = 0$. En ocasiones existen casos en los que es preferible resolver una ecuación modificada de la forma

$f(x)g(x) = 0$, donde $g(x)$ es una función convenientemente elegida, la cual debe cumplir que no se anule en un entorno de la raíz buscada, lo cual será que si r es tal que $f(r) = 0$, entonces $g(x) \neq 0$ en un entorno de r . Para nuestro caso debemos aproximar la solución de una ecuación empleando el método de Newton, lo ideal es que la función sea una recta, puesto que en este caso la solución exacta se obtendrá en la primera iteración.

Sabiendo que en la práctica no tiene mucho sentido usar el método de Newton para resolver una ecuación lineal, ya que, los métodos iterativos se usan para resolver ecuaciones no lineales. La idea que fue sugerida por Brown G. (1977), de que podemos usar la función $g(x)$ para linealizar lo más posible la ecuación $f(x)g(x) = 0$. El cual comprobó que un aumento de la linealidad de la ecuación en un entorno de r , tiene incidencia en la velocidad de convergencia del método de Newton.

De acuerdo con Gerlach J. (1994) el cual demuestra que cuando se aplica el método de Newton a una ecuación de la forma $\Psi = 0$ en donde la solución r debe cumplir que $\Psi'(r) \neq 0$, $\Psi''(r) = 0$ y $\Psi'''(r) \neq 0$, en lo cual el método de Newton alcanzaría la convergencia de orden tres el cual su orden de convergencia es de dos. Bajo las condiciones que impone por Gerlach, ¿Qué forma tiene el método de Newton ?

Si $\Psi(x) = f(x)g(x)$, buscamos a $g(x)$ de manera que $\Psi''(r) = 0$. Así

$$f''(r)g(r) + 2f'(r)g'(r) = 0.$$

Al resolver esta ecuación diferencial salvo, constantes multiplicativas, se llega a que la solución es:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{f'(x)}}.$$

Por lo que, la idea de Brown y Gerlach consiste en aplicar el método de Newton a la función $\Psi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$. De donde se obtiene:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

expresión que bajo las condiciones de aceleración impuestas por Brown y Gerlach, el método de Newton se convierte en el de Halley presentado en la expresión (.3).

A partir de iteraciones de Laguerre.

Este es un conocido método para encontrar las raíces de un polinomio. En la cual se considera la derivación logarítmica de un polinomio $p(x)$ de grado n , con raíces reales $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, de la forma

$$\prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Luego si denotamos $a_i = \frac{1}{(x - x_i)}$, $A = \frac{p'(x)}{p(x)}$ y $B = -\frac{dA}{dx}$ se llegó a

$$A = (\log p(x))' = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i)} = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$B = -\frac{d\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)}{dx} = \frac{p'(x)^2 - p(x)p''(x)}{p(x)^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x - x_i)^2} = \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite deducir

$$(A - a_1)^2 = (a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq (n - 1)(a_2^2 + \cdots + a_n^2) = (n - 1)(B - a_1^2),$$

de una forma equivalente

$$na_1^2 - 2Aa_1 - (n - 1)B + A^2 \leq 0$$

Luego se puede decir que a_1 se encuentra situado entre las raíces de la ecuación:

$$nu^2 - 2Au - (n - 1)B + A^2 = 0, \quad (.17)$$

Luego la Idea de Hansen E. y Patrick M. (1977) fue la de sustituir por funciones cualesquiera, el grado del polinomio por un parámetro λ en la expresión (.17), manteniendo así la notación

$$A = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad B = -A' = \frac{f'(x)^2 - f''(x)}{f(x)^2}.$$

La iteración que aparece en el trabajo de Hansen E. y Patrick M. [?] es

$$x_+ = x - \frac{\lambda}{1 \pm \sqrt{(1 - \lambda)(1 - \lambda + \lambda L_f(x))}} \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (.18)$$

Si racionalizamos el denominador de la expresión (.18) nos arrojarías

$$x_+ = x - \frac{1 \pm \sqrt{(1 - \lambda)(1 - \lambda + \lambda L_f(x))}}{2 - \lambda - (1 - \lambda)L_f(x)} \frac{f(x)}{f'(x)},$$

ahora bien, si tomamos el parámetro de $\lambda = 0$ y elegimos el signo positivo en el numerador llegaríamos al mencionado método de Halley el cual puede verse en la expresión (.3).

2.4. Convergencia del método de Halley

Existen diferentes convergencias para un método iterativo, las cuáles las podemos clasificar en local, semilocal y global.

2.4.1. Convergencia Local

Según Henrici P. (1997) sea f una función continuamente diferenciable en un intervalo abierto I que contiene a la raíz r . Supongamos que $f(r) = 0$ y que $f'(r) \neq 0$.

Consideremos el método de Halley definido por la siguiente iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

Si x_0 es lo suficientemente cercano a r , entonces la secuencia (x_n) generada por el método de Halley converge a r .

La construcción del Teorema de Convergencia Local en el método de Halley implica los siguientes pasos:

1. **Hipótesis del método de Halley:** Definir la iteración del método de Halley como se muestra arriba y establecer las condiciones iniciales.
2. **Demostración de convergencia puntual:** Mostrar que para cada n , x_n está definido y $x_n \in I$.
3. **Estimación del límite:** Dado un número positivo ϵ , encontrar un número positivo δ tal que si $|x_0 - r| < \delta$, entonces $|x_n - r| < \epsilon$ para todo n lo suficientemente grande.

La construcción del Teorema de Convergencia Local en el método de Halley se basa en la iteración del método, la convergencia puntual de la secuencia (x_n) y la estimación del límite en un entorno cercano a la raíz r .

2.4.2. Convergencia Semilocal

Los siguientes teoremas se presentan a modo de ilustración en los reales, ya que esto fueron escritos para convergencia semilocal en espacios de Banach. En los cuales los autores Chen D. y otros, Salehov G. y otros, y Zheng S. utilizaron condiciones del tipo de Kantorovich para emplearlo al método de Halley.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Salehov-Mertvetsova. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable e I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Supongamos que para $x_0 \in I$ se cumple que $|f''(x)| \leq M_1$ y $|f'''(x)| \leq N_1$. Además que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\frac{1}{|f'(x)|} \leq B_0, |x_1 - x_0| \leq \eta'_0. \quad (.19)$$

$$h'_0 = M_1 B_0 \eta'_0 \leq \frac{1}{2} \quad (.20)$$

$$S = [x_0, 2\eta'_0] \subset I \quad (.21)$$

$$G_0 = \left[\frac{N_1}{M_1^2 B_0} (2 + h'_0) + 3 \right] (1 + h'_0) \leq 9. \quad (.22)$$

Entonces en S existe una solución x_p de $f(x) = 0$ y el método de Halley converge a x_p . Además se cumple que:

$$|x_p - x_n| \leq (2h'_0)^{3^n-1} \frac{\eta'_0}{2^{n-1}}, n = 1, 2, \dots$$

Teorema 2.4.2 (Teorema de Zheng). Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciables e I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Supongamos que para $x_0 \in I$ se cumple que $|f''(x)| \leq M_1$ y $|f'''(x)| \leq N_1$. Además que se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|f'(x)|} &\leq B_0, \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \eta'_0. \\ h_0 &= KB_0\eta_0 \leq \frac{1}{2}, \text{ donde } K = \sqrt{M_1^2 + \frac{2N_1}{3B_0 \left(1 - \frac{1}{2}M_1B_0\eta_0\right)}} \\ S &= (x_0, (1 + \theta_0)\eta_0) \subset I, \text{ donde } \theta_0 = \frac{1 - \sqrt{1 + 2h_0}}{1 + \sqrt{1 - 2h_0}} \end{aligned} \quad (.23)$$

entonces, se cumple que

$$\begin{aligned} (i) \quad &x_n \in S, n = 0, 1, \dots \\ (ii) \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_p \in [x_0, (1 + \theta_0)\eta_0], f(x_p) = 0. \\ (iii) \quad &|x_p - x_n| \leq (1 + \theta_0)\eta_0\theta_0^{3^n-1} \sum_{i=1}^{3^n-1} \theta_0^i, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Teorema 2.4.3 (Teorema de Zhen-Robbie). Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, en donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$, una función dos veces diferenciables en I . Asumamos sin pérdida de generalidad que $f(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) \neq 0$ y que $x_0 \in I$. Además

$$\left| \frac{f''(x) - f''(y)}{f'(x_0)} \right| \leq N|x - y|, \forall x, y \in I. \quad (.24)$$

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \eta, \left| \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq M \quad (.25)$$

$$9N^2\eta^2 + 18NM\eta + 6M^3\eta \leq 3M^2 + 8N. \quad (.26)$$

Sea

$$S = \{x : |x - x_0| \leq t_1^*\} \subset I,$$

donde t_1^* es la raíz positiva más pequeña de la función real

$$\varphi(t) = \frac{N}{6}t^3 + \frac{M}{2}t^2 - t + \eta, \quad (.27)$$

entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ generada por la función de iteración del método de Halley está bien definida y converge a $x_p \in I$, donde $f(x_p) = 0$.

Otro teorema interesante para convergencia semilocal del método de Halley fue el presentado aplicando las condiciones de Kantorovich en los espacios de Banach.

El cual se presenta a continuación pero ilustrado en el espacio de $\mathbb{R}$, en donde las funciones son de variables real.

Teorema 2.4.4 (Teorema de Zhen. Condiciones tipo Smale). Supongamos que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función analítica. Sea

$$\alpha = \alpha(x, f) = \beta\gamma, \quad \text{donde } x \in \mathbb{R}$$

$$\beta = \beta(x, f) = \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right|$$

$$\gamma = \gamma(x, f) = \sup_{n \geq 2} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{n!f'(x)} \right|^{\frac{1}{n-1}}$$

Si $\alpha = \alpha(x, f) \leq 3 - 2\sqrt{2}$, entonces la función iteración del método de Halley, cuando $x_0 = x$, está bien definida, además existe el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_p$$

tal que $f(x_p) = 0$. Si aplicamos la función mayorante

$$\phi(t) = \beta - t + \sum_{k \geq 2} \gamma^{k-1} t^k = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1 - \gamma t}, \quad \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{\gamma} \quad (.28)$$

Entonces el método de Halley definido por (.2) converge a x^* solución de $f(x) = 0$.

2.4.3. Convergencia Global

Teorema 2.4.5 Según Henrici P. (1997) sea f una función continuamente diferenciable en un intervalo abierto I que contiene a la raíz r . Supongamos que $f(r) = 0$ y que $f'(r) \neq 0$

Consideremos el método de Halley definido por la siguiente iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

Si $x_0 \in I$, entonces la secuencia (x_n) generada por el método de Halley converge a r .

La construcción del Teorema de Convergencia Global en el método de Halley implica los siguientes pasos:

1. **Hipótesis del método de Halley:** Definir la iteración del método de Halley como se muestra arriba y establecer las condiciones iniciales.
2. **Condiciones en I :** Mostrar que si $x_0 \in I$, entonces las iteraciones del método de Halley permanecen en I para todo n .
3. **Demostración de convergencia:** Mostrar que la secuencia (x_n) generada por el método de Halley converge a r para cualquier $x_0 \in I$.

La convergencia global en el método de Halley se basa en la iteración del método y las condiciones en el intervalo I que contiene a la raíz r .

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Introducción.

En el presente capítulo, se ilustran de manera específicas la metodología que se utilizó en la presente investigación. Dentro de los aspectos trabajados se encuentran: el diseño de la investigación, tipo de investigación, enfoque de la investigación, método de investigación, tipos de análisis.

3.2. Tipo de Investigación

La presente investigación es de tipo analítica-exploratoria. Analítica ya que permitió describir los imágenes generadas a través de la aplicación del método iterativo de Halley. Exploratoria porque se documentó de diversas fuentes e investigaciones relacionadas con el tema en cuestión que fueron útiles para establecer las pautas necesarias para el desarrollo de esta investigación.

3.3. Método de la investigación.

El método que se utilizó en la presente investigación es el deductivo, éste permite determinar las características de una realidad particular que se estudia por derivación o resultado de los atributos o enunciados contenidos en proposiciones o leyes científicas de carácter general formuladas con anterioridad.

3.4. Diseño de la investigación.

Esta investigación, de acuerdo a la búsqueda de las causas, posee un diseño analítico, puesto a que se analizará minuciosamente el método de Halley y la teoría de fractales, para de esta forma, conocer la naturaleza y composición de los mismos. En torno al tiempo de estudio, el diseño es transversal, porque se desarrollará durante un período de tiempo definido..

3.5. Enfoque de la investigación.

Esta investigación presenta un enfoque cualitativo, ya que se analizó la teoría de fractales y el método de Halley, tomando en consideración de éstos sus definiciones y se presentó una muestra de las imágenes con sus características.

CAPÍTULO IV PRESENTACIÓN DE RESULTADO

4.1. Introducción.

En este capítulo se muestran las imágenes generadas con el uso del software Wolfram Mathematica, en su versión 12.0, a través de la Aplicación del Método Iterativo de Halley para Analizar Fractales. De igual modo, se presenta la interpretación y análisis de dichas imágenes, las cuales han sido las bases para establecer ciertas relaciones entre la imagen obtenida y el método utilizado.

4.2. Imágenes generadas.

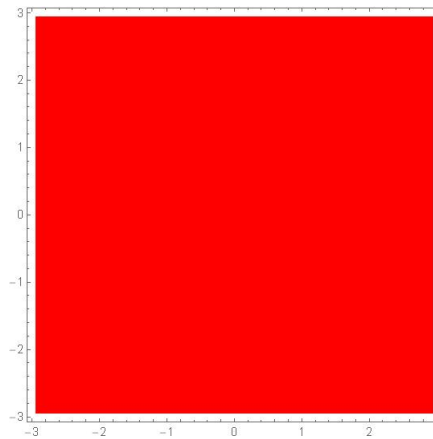


Figura .1: Imagen generada por el polinomio $z^2 - 5z + 6$ con el uso del Método de Halley.

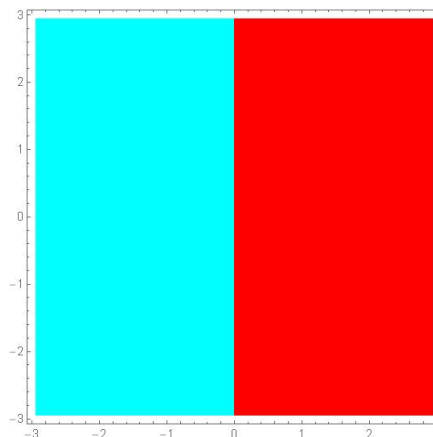


Figura .2: Imagen generada por el polinomio $z^2 - 1$ con el uso del Método de Halley.

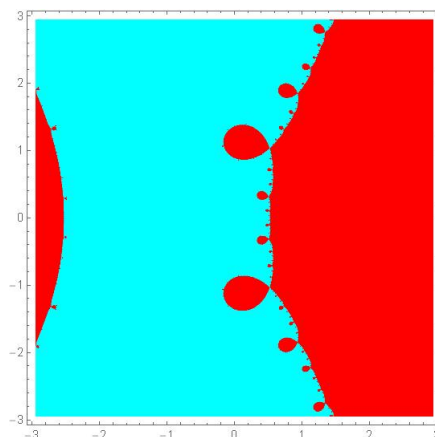


Figura .3: Imagen generada por el polinomio $z^3 + 3z^2 - 4z - 12$ con el uso del Método de Halley.

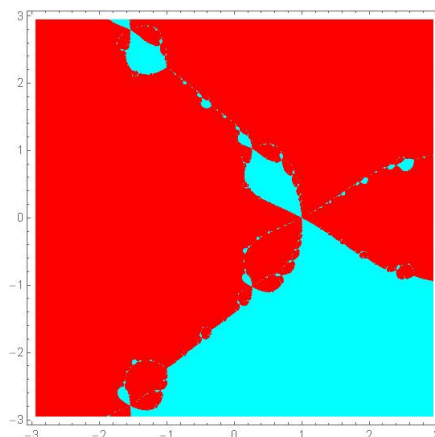


Figura .4: Imagen generada por el polinomio $z^3 + 4z^2 + 6z + 4$ con el uso del Método de Halley.

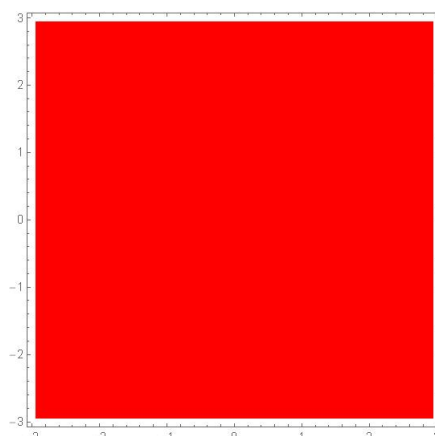


Figura .5: Imagen generada por el polinomio $z^3 + 9z^2 + 27z + 27$ con el uso del Método de Halley.

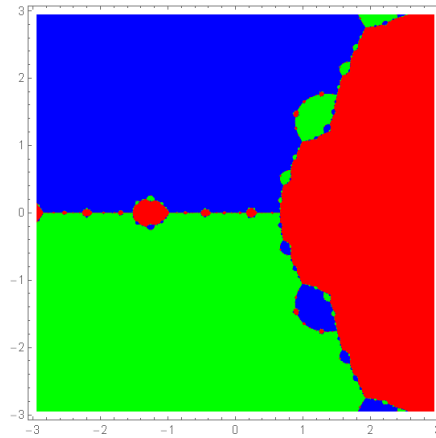


Figura .6: Imagen generada por el polinomio $z^3 - z^2 - 4$ con el uso del Método de Halley.

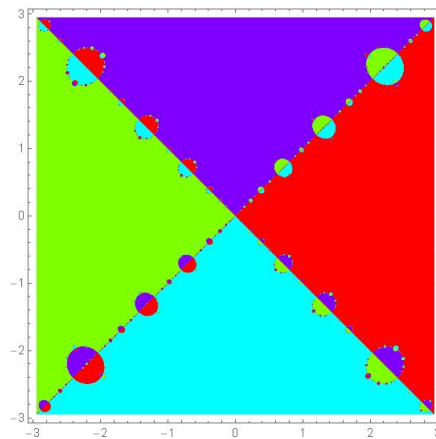


Figura .7: Imagen generada por el polinomio $z^4 - 1$ con el uso del Método de Halley.

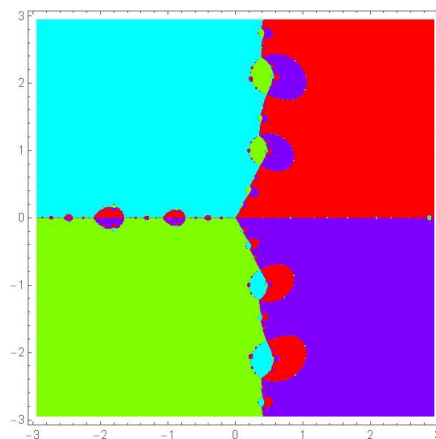


Figura .8: Imagen generada por el polinomio $z^4 - 2z^3 + 2$ con el uso del Método de Halley.

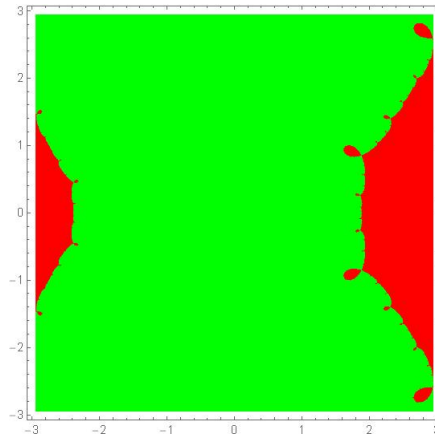


Figura .9: Imagen generada por el polinomio $z^4 + 2z^3 - 8z^2 - 18z - 9$ con el uso del Método de Halley.

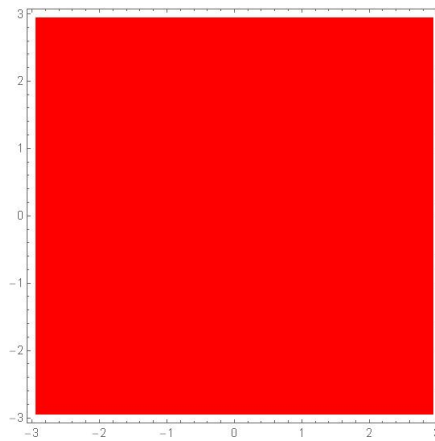


Figura .10: Imagen generada por el polinomio $z^4 + 16z^3 + 96z^2 + 256z + 256$ con el uso del Método de Halley.

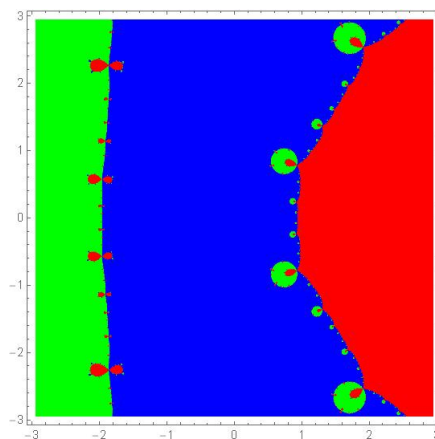


Figura .11: Imagen generada por el polinomio $z^4 + 7z^3 + 5z^2 - 31z - 30$ con el uso del Método de Halley.

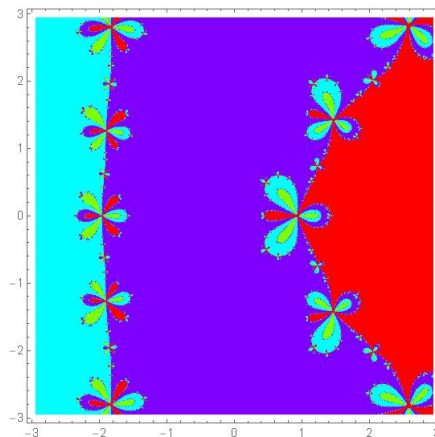


Figura .12: Imagen generada por el polinomio $z^4 + 7z^3 + 5z^2 - 31z - 30$ con el uso del Método de Chebyshev.

4.3. Análisis Fractal.

Las imágenes presentadas en esta investigación, son el resultado de la utilización del método de Halley en polinomios cuadráticos, cúbicos y de cuarto grado. Nótese, que para los polinomios cuadráticos se observa el uso de un solo color, el rojo, en el caso de los polinomios cúbicos los colores azul, verde y rojo; en los de cuarto grado tenemos los colores azul, verde, rojo y morado, los que representan las cuencas de atracción para los polinomios usados $g(z)$.

A partir de esta información se puede afirmar, que las raíces se encuentran contenidas entre la cantidad de colores que se obtiene en los polinomios cúbicos y de orden superior a este, con algunas excepciones debido al tipo de polinomio utilizado. Existiendo una diferencia gradual para los polinomios cuadráticos, en este caso, la imagen generada sólo posee uno y dos colores. Obsérvese Fig.1 y Fig.2.

Para los polinomios cúbicos y de cuarto grado ambos métodos permiten la generación de fractales. Sin embargo, se puede notar un caso particular, que es, en el caso donde las raíces tienen cierto grado de multiplicidad, para este caso ningún de los métodos utilizados sin importar el grado pueden generarlo. Obsérvese Fig.5 y Fig.10.

La imagen generada para un polinomio cúbico cuando sus raíces son números reales usando el método de Halley, se genera un fractal que solo muestra dos colores y cuando tiene raíces complejas presenta 3 colores. La imagen generada para un polinomio cúbico cuando sus raíces son números reales usando el método de Halley, se genera un fractal que solo muestra dos colores y cuando tiene raíces complejas presenta 3 colores.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS.

5.1. Introducción.

Este capítulo se presentan las conclusiones finales, en la investigación que tuvo como título: Aplicación del Método Iterativo de Halley para Analizar Fractales, en Función del Método de Halley. De igual forma se establecen las futuras líneas de investigación, relacionadas con el tema anteriormente expuesto.

5.2. Conclusiones.

A raíz de los objetivos planteados en la presente investigación, se presentan las siguientes conclusiones:

- Se logró generar fractales mediante la aplicación del método iterativo de Halley, exceptuando algunos casos de polinomios cuadráticos, ya que los que se utilizaron, no todos generaron fractales.
- La imagen generada por los polinomios que presentan multiplicidad en todas sus raíces no generan fractales.
- La imagen generada por los polinomios de cuarto grado, que presentan multiplicidad dos a dos, presentan 2 colores.
- El método de Halley es menos caótico que otros métodos como el de Chebyshev, ya que en este último se pueden apreciar más fractales, esto se puede notar claramente en los fractales generados con el polinomio $z^4 + 7z^3 + 5z^2 - 31z - 30$ por estos dos métodos en el capítulo anterior.
- La cuenca de atracción para el método de Halley muestra una estructura menos compleja, en comparación con otros métodos, lo que significa tiende a converger de manera confiable hacia la raíz en un rango más amplio de condiciones iniciales y funciones.

Es preciso destacar, que las conclusiones generadas han sido el resultado, de la prueba de diversos polinomios bajo la utilización de los métodos en cuestión. Las imágenes aquí presentadas simplemente son una muestra de la población utilizada.

5.3. Futuras líneas de investigación.

1. Fractales en Aplicaciones Científicas y de Ingeniería.
2. Fractales en Aplicaciones Musicales y Artes Visuales.
3. Análisis comparativo de los fractales generados por los métodos de Halley y Chebyshev.

Referencias Bibliográficas

- Abreu, J., (2014). El Método de la Investigación. *Daena: International Journal of Good Conscience*.
- Almedro, M. (2003). *El Significado de las Teorías del Caos en Psicoterapia*. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Madrid.
- Costa, V., y Sombra, L. (2019). Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*.
- Diloné, M. (2012). *Métodos interactivos aplicados a la ecuación de Kepleer*. Tesis doctoral, Universidad de Rioja.
- García, M. (2013). *El Método de Chebyshev para el Cálculo de Raíces de Ecuaciones no Lineales*. Tesis doctoral, Universidad de Rioja.
- Gómez, A. (2019). *Construcción de Nuevos Métodos Iterativos Mediante la Composición de Funciones Para Resolver Ecuaciones de Orden Superior*. Tesis de maestría, Universidad Tecnológica del Cibao Oriental.
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación Científica*. McGraw-Hill / Interamericana editores, S. A. de C.V., México.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2), 130-141.
- May, R. M. (1976). "What is chaos?" In H. Haken (Ed.), *Evolution of order and chaos: In the nonlinear dynamics of life and society* (pp. 1-14). Springer.
- Mandelbrot, B. (1982). *The fractal geometry of nature*. The American Mathematical Monthly.
- Martínez, S. (2016). *Construcción de nuevos Métodos Iterativos para Resolver ecuaciones no lineales aplicando la técnica de composición*. Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Santo Domingo.
- Penkova, M. (2011). *Métodos Interactivos Eficientes para la Resolución de Sistema No Lineales*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia.
- Plazas, S., y Gutiérrez, J. (2013). *Dinámica el Método de Newton*. Tesis doctoral, Universidad de Rioja.
- Rosario, W. (2019). *Análisis Fractal del Método de Chebyshev*. Tesis de maestría, Universidad Tecnológica del Cibao Oriental.
- Terán, J., y Rúa, C. (2018). El Método de Newton para Raíces Complejas.

Fractales en el problema de Cayley. *Revista EIA*. Obtenido de <https://doi.org/10.24050/reia.v15i29.1131>

Váldez, P. (2016). *Introducción a la Geometría Fractal*. Tesis de licenciatura, Universidad del Bío Bío.

Wolfram, S. (2015). *Wolfram Research*. Wolfram language. Recuperado de <https://www.wolfram.com>.

G. H. Brown Jr: *On Halley's variation of Newton's method*, Amer. Math. Monthly, Vol. 84, (1977), 726-728.

J. Gerlach, *Accelerated convergence in Newton's Method*, SIAM Review, Vol. 36,(1994), 272-276.

José A. Ezquerro, José M. Gutiérrez, Miguel A. Hernández Y M. Amparo Salanova *El Método De Halley: Posiblemente, El Método Más Redescubierto Del Mundo* MARGARITA MATHEMATICA EN MEMORIA DE JOSE JAVIER (CHICHO) GUADALUPE HERNANDEZ (Luis Español y Juan L. Varona, editores), Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logrono, espana, 2001.

P. Henrici: *Elementos de Análisis Numérico*, John Wiley and Sons-Ed. Trillas, M'exico, 1972.

J. S. Frame, *A variation of Newton's method*. American Mathematical Monthly, **vol. 51** (1944) 36-38.

M. A. Diloné, J. M. Gutiérrez and E. Veras, *Semilocal Convergence Newton Method Applied to Kepler Equation: New Results*, British Journal of Mathematics & Computer Science 21(3): 1-13, 2017.

T.R Scavo and J.B Thoo: *On The Geometry of Halley's method* The American Mathematical Monthly, Vol. 102 No. 5 (May, 1995), pp. 417-426.

Anexos

Comando utilizado para analizar las imágenes generadas mediante el uso del método de Halley.

```

ejecutarRutinasRaices[g_] := Block[{},
  hallaRaices = NSolve[g[z] == 0, z];
  numRaices = Length[hallaRaices];
  Do[raiz[k] = hallaRaices[[k, 1, 2]], {k, 1, numRaices}];
  posicionRaiz = Compile[{{z, _Complex}},
    Block[{eps = 10.0^(-3), k, numLocal = numRaices},
      For[k = 1, k <= numLocal, k++,
        If[Abs[z - raiz[k]] < eps, Return[k]]
      ];
      Return[0]
    ],
    {{raiz[_], _Complex}}
  ]
]

calcularFuncionIteradora[g_, metodo_] := Block[{},
  f = Compile[{{z, _Complex}},
    Evaluate[Simplify[metodo[g, z]]]
  ]
]

iterRaices = Compile[{{x, _Real}, {y, _Real}, {maxIter, _Integer}},
  Block[{z, contador, r},
    z = x + y*I; contador = 0; r = posicionRaiz[z];
    While[(r == 0) && (contador < maxIter),
      contador++; z = f[z]; r = posicionRaiz[z]
    ];
    Return[r]
  ],
  {{f[_], _Complex}, {posicionRaiz[_], _Integer}}
]

CompiledFunction[{x, y, maxIter},
  Block[{z, contador, r}, z = x + y I; contador = 0;
    r = posicionRaiz[z];
    While[r == 0 && contador < maxIter, contador++; z = f[z];
      r = posicionRaiz[z]]; Return[r]], "-CompiledCode-"]

fractalRaices[centro_, lado_, maxIter_, resolucion_] :=
  Block[{$Messages = {}},
    xxMin = centro[[1]] - lado/2, xxMax = centro[[1]] + lado/2,
    yyMin = centro[[2]] - lado/2, yyMax = centro[[2]] + lado/2,
    DensityPlot[iterRaices[x, y, maxIter],
      {x, xxMin, xxMax}, {y, yyMin, yyMax},
      PlotPoints -> resolucion, Mesh -> False,
      PlotRange -> {0, numRaices},
      ColorFunction -> Hue
    ]
  ]

```

```

    ]
  ] // Timing
g[z_] := ();
Donde g(z) es el polinomio en cuestión.

```

Método de Halley

```

metodo[g_, z_] :=
  z - 1/(g'[z]/g[z] - g''[z]/(2 g'[z]));(*Halley*)
calcularFuncionIteradora[g, metodo];
fractalRaices[{-0., 0.}, 5.9, 25, 400]

```