

República Dominicana

Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO)

Universidad patrimonio de la Comunidad

Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Escuela de Postgrado



Trabajo Final para Optar por el Título de

Maestría en Matemáticas

Título

Solución de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales de primer orden aplicando la forma Canónica de Jordan de la matriz coeficiente.

Sustentado por:

José Esteban Chávez Peña

Asesor

Dr. Francisco Jorge Ramírez Contreras

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez.

Año académico 2023.

Título

**Solución de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales de
primer orden aplicando la forma Canónica de Jordan de la
matriz coeficiente.**

TESIS

Maestría en Matemáticas

Solución de Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales de primer orden aplicando la forma Canónica de Jordan de la matriz coeficiente.

Tesis de maestría presentada por el Maestrante:

José Esteban Chávez Peña para la obtención del grado de
Magister en Matemáticas.

Tribunal evaluador

MA. Wilson Lucilo Heredia Amparo _____

MA. Heisith Hernández _____

MA. Elsa Rodríguez Espinal _____

Índice general

AGRADECIMIENTOS.....	VI
Dedicatoria.....	VII
Resumen.....	VIII
1. INTRODUCCIÓN.	1
1.1. Introducción.	1
1.2. Antecedentes.	1
1.2.1. Antecedentes históricos.	1
1.2.2. Antecedentes académicos.	3
1.3. Planteamiento del problema.	4
1.4. Objetivos.	5
1.4.1. General.	5
1.4.2. Específicos.	5
1.5. Justificación.	5
1.6. Delimitación.	5
2. MARCO REFERENCIAL.	6
2.1. Introducción.	6
2.2. Marco teórico	6
2.2.1. Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.	6
2.2.2. Forma matricial de un sistema lineal.	7
2.2.3. Forma canónica de Jordán	11
2.2.4. Teorema	12
2.2.5. Teorema	15
2.2.6. Eigenvalores y Eigenvectores de sistemas lineales homogéneos	18
2.2.7. Sistemas lineales no homogéneos	19
2.2.8. Variación de parámetros	19

2.2.9. Matriz exponencial	22
2.2.10. Derivada e integral de e^{At}	22
2.2.11. Cálculo de e^{At}	24
3. DISEÑO METODOLÓGICO.	25
3.1. Introducción.	25
3.2. Marco metodológico.	25
3.2.1. Método.	25
3.2.2. Diseño.	25
3.2.3. Tipo.	25
3.2.4. Enfoque.	26
3.3. Procedimientos.	26
4. PRESENTACIÓN DE RESULTADOS	27
4.1. Introducción.	27
5. CONCLUSIONES	35
5.1. Líneas Futuras de Investigación.	36
Referencias bibliográficas	36
ANEXOS.	38
Simbología utilizada	41

Agradecimientos.

A Dios. Por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

Al asesor: Por compartir su conocimiento en este proceso de investigación, por su gran esfuerzo, dedicación y deseo de orientar por el camino correcto, por brindarme su ayuda para que este trabajo se lleve a cabo.

A los compañeros y amigos: Por su apoyo incondicional en todo el proceso de la maestría, Gracias a todos.

A los maestros. Por su paciencia, por su gran respeto y sobre todo por insistir tanto en nuestra formación académica y humana. Quiero agradecer de forma especial: A Efraín Martínez: Porque más que coordinador, lo considero un amigo concejero.

A la UTECO. Por ser una institución educativa comprometida con el avance y la formación integral de sus estudiantes y la promoción del conocimiento científico y tecnológico de la región y el país.

Al MESCyT. por confiar en profesionales que luchan por la superación, para obtener mejores resultados en la educación de la República Dominicana

DEDICATORIA.

Este trabajo esta dedicado a mi familia, en especial a mis padres (Josefina Ysabel Peña Francisco y Hugo Esteban Chávez), mis hermanos (Carlos José Chávez Peña, Remi Chávez Hilario y Rafael José Graciano Peña), mi esposa (Clara Inés José Suarez) y mi abuela (Basilia Francisco) por siempre estar ahí en mi crecimiento y desarrollo.

RESUMEN.

En esta investigación se ha realizado un estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de 1er orden. Se ha involucrado la forma canónica de Jordán de la matriz coeficiente del sistema, en la solución del mismo.

Para alcanzar los objetivos propuestos, se introdujeron los conceptos relacionados con la forma canónica de Jordán, los procedimientos para obtener la forma canónica de Jordán de una matriz cuadrada, la definición de matriz exponencial y los procedimientos para el cálculo de una matriz exponencial.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción.

En este capítulo I se examinarán los lineamientos básicos o introductorios de esta investigación, mediante el abordaje de los antecedentes, el planteamiento del problema, los objetivos, la justificación y la delimitación que marca los parámetros y alcances de la misma.

1.2. Antecedentes.

1.2.1. Antecedentes históricos.

Según los matemáticos británicos Edwards, y Penney, D. (1675), fue cuando W., Gottfried (1646-1716) escribe la ecuación

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

por lo tanto, además de ser una ecuación diferencial o *aequatio differentialis*, término acuñado por el propio Leibniz; también forjó una de las herramientas más poderosas de las matemáticas: el símbolo de integración. El año 1693 fue, según los historiadores, cuando nació el área de la Matemáticas conocida hoy como ecuaciones diferenciales.

Según Zill y Cullen (2009). Históricamente, el estudio de las soluciones de las EDO (ecuaciones diferenciales ordinarias), se han desarrollado en tres grandes escenarios: el algebraico, el numérico y el geométrico. Desde este punto de vista histórico, el primer entorno donde se desarrolló la teoría de las EDO es el algebraico.

Además Zill y Cullen (2009). Multitud de intentos brindaron los métodos conocidos hoy, muchos de los cuales tienen más de 200 años, y siguen siendo objeto de

estudio, tanto desde el punto de vista didáctico como matemático.

Las EDO sirven para modelar problemas cuya esencia es objeto de estudio por una rama de la ingeniería o de las ciencias: física, química, economía, etc. En el 1693, Huygens habla explícitamente de ecuaciones diferenciales, en ese mismo año, Leibniz dice que las EDO son funciones del triángulo característico. En 1690, Jacques Bernoulli planteó el problema de encontrar la curva que adopta una cuerda flexible, inextensible y colgada de dos puntos fijos, llamada catenaria.

Leibniz descubrió la técnica de separación de variables en el 1691; en 1694 encontró la resolución de la ecuación $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$. En 1694, Leibniz y Jean Bernoulli estudiaron el problema de encontrar la familia de curvas que cortan con un ángulo a una familia de curvas dadas. En 1739, Clairaut dió la condición $\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$, para las ecuaciones diferenciales de primer orden exactas, es decir, las ecuaciones $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, para las cuales existe una función $z = z(x, y)$ tal que $dz = Mdx + Ndy$, condición que fue dada de forma independiente por Euler en 1734.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales, surgen en la historia de las matemáticas con la misma intención que las ecuaciones diferenciales ordinarias: Analizar cuantitativamente determinados sistemas físicos, en particular los astronómicos. [Gustavo y Muñoz, 2017]

A lo largo de la segunda mitad del siglo XVII y con el nacimiento del análisis matemático de la mano de Newton y Leibniz, se inicia el estudio del problema inverso de la diferenciación: dada una relación entre dos cantidades y sus diferenciales o fluxiones, cómo encontrar una relación entre estas cantidades. El problema analítico de integración se corresponde con un problema geométrico, ya estudiado con anterioridad, conocido como el método inverso de tangentes, esto es, cómo encontrar una curva caracterizada por sus tangentes. Newton probó que este problema era totalmente resoluble empleando, para ello, desarrollos en series de potencias. Sin embargo,

Leibniz no del todo satisfecho con el empleo de series de potencias enfocó su estudio en tratar de transformar la ecuación diferencial dada en una ecuación con variables separables. Zill y Cullen (2009)

1.2.2. Antecedentes académicos.

En Newton (1687), establece que las *ecuaciones diferenciales* juegan un papel central en las matemáticas y sus aplicaciones. “El cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo es proporcional a la fuerza aplicada” (su llamada segunda ley de movimiento), ha sido indispensable determinar ciertas cantidades variables a partir de sus derivadas. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en: ordinarias para cantidades que dependen de una sola variable independiente, y parciales las que involucran derivadas parciales con respecto a dos o más variables.

Un famoso problema del movimiento de dos cuerpos bajo la atracción de la gravedad fue resuelto geométricamente por [Newton, 1687], pero no fue hasta 1734 cuando Bernoulli, (1734), lo resolvió de forma analítica. Más en general, el llamado problema de los n cuerpos ($n > 2$) no puede ser resuelto de esta forma y es ampliamente estudiado hasta la fecha (aunque existen soluciones parciales de casos muy particulares). Hoy en día la teoría de ecuaciones diferenciales es una de las herramientas más potentes para abordar problemas de modelización matemática.

El problema matemático fundamental al estudiar el movimiento de dos o más cuerpos, moviéndose cada uno bajo la acción gravitatoria de los otros, es el de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. El primer éxito lo obtuvo Isaac Newton, al demostrar que a partir de sus leyes de movimiento y de la ley de gravitación universal se podían deducir las tres leyes de Kepler. La noción de polinomio característico aparece en el trabajo de Lagrange sobre sistemas de ecuaciones diferenciales publicados en 1774 y en el trabajo de Laplace en 1775. Gustavo y Muñoz (2017)

En Gustavo y Muñoz (2017) 1812, Laplace presentó lo que ahora se conoce como *La transformada de Laplace* para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. En 1820, Cauchy probó la existencia de soluciones de las ecuaciones diferenciales $y' = f(t, y)$ bajo ciertas condiciones. En 1890, Picard estableció un método de aproximaciones sucesivas que permitió establecer el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales de orden N . El mismo Cauchy introdujo la notación vectorial usada en la actualidad.

Gustavo y Muñoz (2017) Cayley introdujo los métodos matriciales a mediados del siglo *XIX*, los cuales ayudaron a Jacobi a resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, donde la matriz del sistema es diagonalizable. Mas tarde, Jordan introduce lo que se conoce como la forma canónica de Jordan, que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales donde la matriz no es diagonalizable.

1.3. Planteamiento del problema.

En este trabajo se analizan sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos de primer orden de la forma

$$x' = A(t)x$$

donde A es una matriz de tamaño $n \times n$, y b un vector de tamaño $n \times 1$. Se pretende involucrar los bloques de Jordan de la matriz A en la solución de dicho sistema. En ese sentido surgen las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles condiciones necesarias y suficientes permiten hacer uso de los bloques de jordan de la matriz A para determinar la solución general del sistema $x' = A(t)x$?
2. ¿Cómo expresar la solución general del sistema $x' = A(t)x$ en función de los bloques de jordan de la matriz A ?

1.4. Objetivos.

1.4.1. General.

Aplicar la forma canónica de Jordan en la solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.4.2. Específicos.

1. Determinar condiciones necesarias y suficientes que permiten hacer uso de los bloques de jordan de la matriz A para determinar la solución general del sistema $x' = A(t)x$.
2. Expresar la solución general del sistema $x' = A(t)x$. en función de los bloques de jordan de la matriz A.

1.5. Justificación.

Muchos problemas matemáticos involucran en su formulación, sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. Estudiar técnicas que permitan simplificar el proceso de solución de los mismos, resulta de mucha utilidad.

1.6. Delimitación.

Esta investigación se orientará hacia un campo de las matemáticas puras, además es un estudio documentado, descriptivo, interpretativo, exploratorio y analítico de la Solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden aplicando la forma canónica de Jordan de la matriz coeficiente.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.

2.1. Introducción.

En este capítulo se citarán varios autores, y una amplia gama de conceptos, definiciones, teoremas, lemas y una serie de argumentos son útiles, de apoyo y conceptualmente interesantes para el estudio.

2.2. Marco teórico

Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de varias ecuaciones diferenciales con varias funciones incógnitas y un conjunto de condiciones de contorno. Una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

2.2.1. Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Definición 2.1 [Pool, 1675]. Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots x_n) \quad (2,1) \\ \\ &\vdots \\ \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots x_n)\end{aligned}$$

Cuando cada una de las funciones $g_1, g_2, \dots, g_n$ en **(2.1)** es lineal en las variables dependientes $x_1, x_2, \dots, x_n$, se obtiene la **forma normal** de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Hacemos referencia a un sistema de la forma **(2.2)**, simplemente como un **sistema lineal**.

Suponemos que los coeficientes a_{ij} , así como las funciones f_i son continuas en un intervalo I . Cuando $f_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, se dice que el sistema (2.2) es **homogéneo**, de otro modo es **no homogéneo**.

2.2.2. Forma matricial de un sistema lineal.

Definición 2.2 [Pool, 1675]. Si X , $A(t)$ y $F(t)$ denotan las matrices respectivas:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

entonces el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (2.2) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

o simplemente se escribe

$$X' = AX + F. \quad (2,3)$$

Si el sistema es homogéneo, su forma matricial es entonces

$$X' = AX. \quad (2,4)$$

Definición 2.3 [Pool, 1675]. Un vector solución en un intervalo I es cualquier matriz columna

$$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

cuyos elementos son funciones derivables que satisfacen el sistema (2.3) en el intervalo.

Definición 2.4 [Pool, 1675] Sea t_0 un punto en un intervalo I y

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} \quad y \quad X_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

donde las y_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son las constantes dadas. Entonces el problema

$$\text{Resolver: } X' = A(t)X + F(t), \quad (2.5)$$

Sujeto a

$$X(t_0) = X_0,$$

es un problema con valores iniciales en el intervalo I .

En el siguiente resultado se establece la existencia de una solución única de un problema de valores iniciales.

Teorema 2.1 Sean los elementos de las matrices $A(t)$ y $F(t)$ funciones continuas en un intervalo común I que contiene al punto t_0 . Entonces existe una solución única del problema con valores iniciales (2.5) en el intervalo I .

El siguiente resultado es un principio de superposición para soluciones de sistemas lineales homogéneos.

Teorema 2.2 Sea un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (2.4) en el intervalo I . Entonces la combinación lineal

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_k X_k,$$

donde las c_i , $i = 1, 2, \dots, k$ son constantes arbitrarias, es también una solución en el intervalo I .

Definición 2.5 [Pool, 1675] Sea $X_1, X_2, \dots, X_k$ un conjunto de vectores solución del sistema homogéneo (2.4) en un intervalo I . Se dice que el conjunto es **linealmente dependiente** en el intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, \dots, c_k$, no todas cero, tales que:

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_k X_k = 0,$$

para toda t en el intervalo. Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

Teorema 2.3 Sean

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad X_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

n vectores solución del sistema homogéneo (2.4) en un intervalo I . Entonces el conjunto de vectores solución es linealmente independiente en I si y solo si el **wronskiano**

$$W(X_1, X_2, X_n) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$

para toda t en el intervalo.

Definición 2.6 [Edwards y Penney, 1964] Cualquier conjunto $X_1, X_2, \dots, X_n$ de n vectores solución linealmente independientes del sistema (2.4) en un intervalo I se dice que es un **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo.

Teorema 2.4 Existe un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo (2.4) en un intervalo I .

Teorema 2.5 Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo (2.4) en un intervalo I . Entonces la solución general del sistema en el intervalo es:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n,$$

donde las c_i , $i = 1, 2, \dots, n$ son constantes arbitrarias.

Teorema 2.6 Sean X_p una solución dada del sistema no homogéneo (2.3) en un intervalo I y sea:

$X_c = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$, que denota la solución general en el mismo intervalo del sistema asociado (2.4). Entonces la **solución general** del sistema no homogéneo en el intervalo es:

$$X = X_c + X_p$$

La solución general X_c del sistema homogéneo relacionado (2.4) se llama función complementaria del sistema no homogéneo (2.3).

2.2.3. Forma canónica de Jordán

Ya se ha visto que las matrices de orden con vectores propios linealmente independientes se pueden expresar en forma especialmente sencilla por medio de una transformación de semejanza. Como la mayor parte de los polinomios tienen raíces diferentes, la mayor parte de las matrices tendrá valores propios distintos.

Sin embargo, las matrices que no son diagonalizables, es decir, que no tienen vectores propios linealmente independientes, surge en la práctica. En este caso es posible de mostrar que la matriz es semejante a una matriz diagonal por bloques, conocida como matriz de Jordán.

Definición 2.7 [Adi y Thomas, 2002]. Para un escalar λ dado se define la matriz de bloques de Jordán por

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & \end{pmatrix}$$

Es decir, $J_k(\lambda)$ es la matriz de $k \times k$ con el escalar λ en la diagonal, unos arriba de la diagonal y ceros en otra parte.

Definición 2.8 [Adi y Thomas, 2002]. Una matriz de Jordán tiene la forma

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix},$$

donde cada $J_{k_i}(\lambda_i)$ es un bloque de Jordán.

Ejemplo 2 Las siguientes matrices son matrices de Jordán:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{c|ccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

El siguiente resultado establece que toda matriz cuadrada es similar a una matriz de Jordán.

2.2.4. Teorema

Una matriz $A \in^{n \times n}$ es semejante a una matriz diagonal por bloques, con bloques de Jordán en su diagonal, es decir, existe una matriz no singular X tal que

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix},$$

La matriz j es única, excepto por el orden en que aparecen los bloques de Jordán.

Definición 2.9 [Adi y Thomas, 2002]. La matriz J en el teorema se denomina forma canónica de Jordán.

Si A es una matriz diagonalizable, entonces $J = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, donde, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores propios no necesariamente distintos de A . Cada elemento en la diagonal es una matriz de bloques de Jordán de 1×1 .

Calculo de la matriz canónica de Jordan y la matriz de cambio de base para una matriz $A \in M_n(\mathbf{R})$

1. primero se obtiene el polinomio característico de A , dado por $p_A(t) = \det(A - tI_n)$, donde I_n es la matriz identidad de orden n .
2. Se obtienen las raíces de p_A con sus multiplicidades. Nótese que estas raíces son los autovalores de A .
3. si λ es una raíz de p_a o autovalor de A , r es su multiplicidad y $k = \dim(\ker(A - \lambda I_n))$, entonces en J aparecen k bloques de Jordan con λ en la diagonal de J , computándose en total r priciones de λ contribuye con r vectores linealmente independientes a la matriz de cambio de base P .
4. Para determinar el tamaño de los bloques en los que aparece λ y los vectores que aportan a la matriz de cambio de base se procede de la forma siguiente:
5. para determinar los bloques correspondientes al autovalor λ de A , se resuelve el sistema $(A - \lambda I_N)v = 0$, contando el número s_1 de soluciones linealmente independientes. Si $s_1 = r$, termina el proceso. En la matriz canónica de Jordan aparecerían r bloques de la forma $J_1(\lambda)$, y en la matriz P meteríamos las r soluciones aparecerían independiente de $(A - \lambda I_n)v = 0$ como vectores columna. Si $s_1 < r$ se construye una secuencia de números naturales $s_1 < s_2 < \dots < s_N = r$ como sigue.
6. Si $s_1 < r$, se calcula $\dim(\ker(A - \lambda I_n)^2)$, necesariamente se tiene que $s_1 < s_2$. Si $s_2 = r$ hemos terminado. En caso contrario calculamos $\dim(\ker(A - \lambda I_n)^3)$. Se tiene que $s_1 < s_2 < s_3$. Si $s_3 = r$, terminamos, y en caso contrario continuamos con el mismo procedimiento. Eventualmente, existe un N tal que

$s_n = r$. El número total de bloques de Jordan asociados a λ . Si definimos $t_1 = s_1, t_2 = s_2 - s_1, \dots, t_n = s_n - s_{n-1}$, entonces t_k es el número de bloques de Jordan de la forma $J_k(\lambda)$.

7. Una vez que hemos determinado la distribución de bloques de Jordan, se calculan los vectores que aporta cada valor λ de A a la matriz P . Primero ordenamos los tamaños de todos los bloques de Jordan que hemos encontrados en los pasos anteriores. Supongamos que estos tamaños son $N_1 \geq N_2 \geq \dots \geq N_k$. Ahora encontramos un vector $v_{1,1}$ tal que $(A - \lambda I_n)^{N_1} v_{1,1} = 0$ para cada $j \in 2, \dots, N_1$. Si solo y si hay un bloque de Jordan asociado a λ , ya aviamos terminado. En caso contrario, elegimos $v_{2,1}$ es linealmente independiente con $v_{1,1}, \dots, v_{1,N_1}$. Ahora como en el caso anterior, ponemos $v_{2,j} = (A - \lambda I_n)^j v_{2,1}$ para cada $j \in 2, \dots, N_2$. Si $k = 2$, ya haríamos terminado. En caso contrario elegimos $v_{3,1}$ tal que $(A - \lambda I_n)^{N_3} v_{3,1} = 0, (A - \lambda I_n)^{N_3-1} v_{3,1} \neq 0$ y, $v_{1,1}$ es linealmente independiente con $v_{1,1}, \dots, v_{1,N_1}, v_{2,1}, \dots, v_{2,N_2}$. Además se define $v_{3,j} = (A - \lambda I_n)^j v_{3,1}$ para cada $j \in N_3$. Este proceso se repite hasta llegar a N_k , obteniéndose los r vectores linealmente independientes $v_{1,1}, \dots, v_{n,N_k}$. Estos vectores se escriben como vector columna y forma la matriz $P\lambda$ de dimensión $n \times r$ dada por $P\lambda = (v_n, N_k, \dots, v_{1,1})$. Nótese que los vectores aparecen en orden inverso a como lo hemos obtenido. Para terminar de forma A . El orden en que se pegan las matrices $P\lambda$ es indiferente con tal de que respete el orden en el que se introducen los bloques de Jordan en J .
8. Si todos los autovalores de A son reales tanto J como P son matrices reales y aviamos terminado. En caso contrario para cada autovalor complejo $\bar{\lambda} = a + bi$ con $b > 0$ existe otro autovalor conjugado $\lambda = a - bi$. La matriz compleja J siempre se puede escribir como bloque de la forma

$$\begin{pmatrix} J_m(\lambda) & 0_m \\ 0_m & J_m(\bar{\lambda}) \end{pmatrix}$$

Cada uno de estos bloques ha de ser sustituido por $JR_m(a, b)$ para formar la matriz de Jordan real. Además, en la matriz de cambio de base completa P

aparecerá un bloque de la forma

$$P_{\lambda\bar{\lambda}} = (u_1, \dots, u_k, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k)$$

obtenido mediante la aplicación de las reglas descritas anteriormente. nótese que los vectores u_j y sus conjugados son vectores columna. Para obtener la versión real de P , bloque $P\lambda\lambda$ se ha de sustituir por

$$Pa, b = (Re(u_1), Im(u_1), \dots, Re(u_k), Im(u_k))$$

Definición 2.10 [Pool, 1675] Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ con elementos reales. Entonces e^A es una matriz de tamaño $n \times n$ definida por

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Se puede probar que esta serie converge en $M_n(R)$ para cualquier norma matricial inducida por una norma en R^n . Sea $\|\cdot\|$ cualquier norma matricial en $M_n(R)$ y (S_n) la sucesión de sumas parciales de la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Entonces es fácil probar que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ para todo $k \in N$. De esto se deduce que

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{\|A\|^k}{k!}$$

para todo $m > n$, y, como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge a $e^{\|A\|}$, se deduce que (S_n) es de Cauchy y, por tanto, convergente. La validez de la última afirmación se deriva del hecho de que $(M_n(R), \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión finita, y, en consecuencia, completo.

2.2.5. Teorema

Sean $A, B \in M_n(R)$. Entonces se cumple lo siguiente:

1. Si $O_n \in M_n(R)$ es la matriz nula, entonces, $e^{O_n} = I_n$.
2. Si $AB = BA$, entonces $e^{A+B} = e^{B+A}$.
3. e^A es siempre no singular. Además $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
4. Si existe $P \in M_n(R)$ no singular tal que $A = PBP^{-1}$, entonces $e^A = Pe^BP^{-1}$.
5. Si B es una matriz definida por bloques diagonales de la forma

$$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{bmatrix} e^B & & & \\ & e^{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{B_s} \end{bmatrix}$$

6. La función $R \in t \mapsto e^{At}$ es derivable y

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}.$$

Consideremos algunos casos.

Ejemplo 1.1 Cálculo de e^{At}

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}, A^3 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}, \dots, A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^m & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
e^{At} &= I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^2 t^2}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^2 t^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^3}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2^3 t^3}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^3 t^3}{3!} \end{pmatrix} + \dots \\
&= \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + (2t) + \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{2t^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (3t) + \frac{(3t)^2}{2!} + \frac{(3t)^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2 Cálculo de e^{At} cuando A es una matriz 2×2 no diagonal.

Sea $A = \begin{pmatrix} e^t & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} e^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} e^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}, A^m =, \dots$$

De manera que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(at)^m}{m!} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma^{m-1}t^m}{m!} \\ 0 & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{at^m}{m!} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{ma^{m-1}t^m}{m!} &= \sum_{(m=1)!}^{\infty} = t + at^2 + \frac{a^2 t^3}{2!} + \frac{a^3 t^4}{3!} + \dots \\
&= t + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots = te^{at}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e^{at} = \begin{pmatrix} e^{at} & te^{at} \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}$$

2.2.6. Eigenvalores y Eigenvectores de sistemas lineales homogéneos

Definición 2.11 [Pool, 1675] Sea el vector $X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t}$, un vector solución del

sistema lineal homogéneo (2.4), es decir, $X' = AX$, entonces $X' = K \lambda e^{\lambda t}$ por lo que el sistema se convierte en $K \lambda e^{\lambda t} = AK e^{\lambda t}$. Después de dividir ambos lados entre $e^{\lambda t}$ y acomodando, se obtiene $AK = \lambda K$ o $AK - \lambda K = 0$. Ya que $k = Ik$, la última ecuación es igual a

$$(A - \lambda I)k = 0. \quad (2.6)$$

La ecuación matricial (2.6) es equivalente a las ecuaciones algebraicas simultáneas:

$$\begin{array}{lll} (a_{11} - \lambda)k_1 + & a_{12}k_2 + \dots + & a_{1n}k_n = 0 \\ + & (a_{22} - \lambda)k_2 + \dots + & a_{2n}k_n = 0 \\ a_{21}k_1 & \vdots & \vdots \\ a_{n1}k_1 + & a_{n2}k_2 + \dots + & (a_{nn} - \lambda)k_n = 0 \end{array}$$

Por lo que para encontrar soluciones X de (2.4), necesitamos primero encontrar una solución no trivial del sistema anterior; en otras palabras, debemos encontrar un vector no trivial K que satisfaga a (2.6). Pero para que (2.6) tenga soluciones que no sean la solución trivial obvia $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, se debe tener:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Esta ecuación polinomial en λ se llama **ecuación característica** de la matriz **A**. Sus soluciones son los **eigenvalores** de **A**. Una solución de $K \neq 0$ (2.6) correspondiente a un eigenvalor se llama eigenvalor de **A**. Entonces una solución del sistema

homogéneo (2.4) es $X = Ke^{\lambda t}$.

Tres casos distintos se podrían dar en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por medio de matrices, que son: si los eigenvalores son reales y distintos, si los eigenvalores son repetidos y si los eigenvalores son complejos.

2.2.7. Sistemas lineales no homogéneos

Definición 2.12 [Edwards y Penney, 1964] La solución general de un sistema lineal no homogéneo $X' = AX + f(t)$ en un intervalo es $X = X_c + X_p$, donde $X_c = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$ es la solución general sistema homogéneo asociado y X_p es cualquier solución particular del sistema no homogéneo.

Los métodos de coeficientes indeterminados y variación de parámetros empleados para determinar soluciones particulares de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas, se pueden adaptar a la solución de sistemas lineales no homogéneos $X' = AX + f(t)$. De estos dos métodos, el método de variación de parámetros es el más poderoso

2.2.8. Variación de parámetros

Definición 2.13 [Edwards y Penney, 1964] **Matriz fundamental.** Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $X' = AX$ en el intervalo I , entonces su solución general es la combinación lineal

$$X = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n \quad \text{o}$$

$$X = c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 x_{11} + c_2 x_{12} + \cdots + c_n x_{1n} \\ c_1 x_{21} + c_2 x_{22} + \cdots + c_n x_{2n} \\ \vdots \\ c_1 x_{n1} + c_2 x_{n2} + \cdots + c_n x_{nn} \end{bmatrix} = \phi(t)C, \quad (2.7)$$

donde C es un vector columna de constantes arbitrarias $c_1, c_2, \dots, c_n$ y la matriz n x n , cuyas columnas consisten en los elementos de los vectores solución del sistema $X' = AX$,

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix},$$

se llama matriz fundamental del sistema en el intervalo.

Es obvio que una matriz fundamental es no singular ya que sus columnas son linealmente independientes. Además, si $\phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema $X' = AX$, entonces se deduce que.

$$\phi'(t)A\phi(t).$$

Observando el teorema 2.3, se determina que $\det(\phi(t))$ es igual al Wronskiano $W(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Por tanto, la independencia lineal de las columnas de $(\phi(t))$ en el intervalo I garantiza que $\det(\phi(t)) \neq 0$ para toda t en el intervalo. La no singularidad de $\phi(t)$ garantiza la existencia de $\phi^{-1}(t)$ para toda t en el intervalo.

Análogamente al procedimiento para resolver una ecuación lineal de orden n por variación de parámetros, surge la siguiente pregunta: ¿es posible reemplazar la matriz C en (2.7) por una matriz columna de funciones

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

de modo tal que

$$X_p = \phi(t)U(t) \quad (2,11)$$

sea una solución particular de sistema no homogéneo

$$X' = AX + F(t)? \quad (2,12)$$

En efecto, aplicando la regla del producto en esta última expresión, se obtiene

$$X'_p = \phi(t)U'(t) + \phi'(t)U(t). \quad (2,13)$$

El orden del producto, en (2.13) es relevante, ya que, por ser una matriz columna, los productos $U'(t)\phi(t)$ y $U(t)\phi'(t)$ no están definidos. Sustituyendo (2.11) y (2.13) en (2.12), se obtiene

$$\phi(t)U'(t) + A\phi(t)U(t) = A\phi(t)U(t) + F(t). \quad (2,14)$$

Ahora, tomando en cuenta que $\phi'(t) = A\phi(t)$ y sustituyendo en (2.14), se obtiene

$$\phi(t)U'(t) + A\phi(t)U(t) = A\phi(t)U(t) + F(t)\phi(t)U'(t) = F(t). \quad (2,15)$$

Multiplicando ambos lados de (2.15) por ϕ^{-1} , ya que se ha establecido su existencia, se obtiene

$$U'(t) = \phi^{-1}(t)F(t) \Rightarrow U(t) = \int \phi^{-1}(t)F(t)dt.$$

Luego, la solución particular de (2.12) es

$$X_p = \phi(t) \int \phi^{-1}(t)F(t)dt.$$

2.2.9. Matriz exponencial

Definición 2.14 [Pool, 1675] Dado el sistema homogéneo $X' = AX$, es posible definir una matriz exponencial e^{At} tal que

$$X = e^{At}C \quad (2,16)$$

sea una solución del sistema. A es una matriz de constantes de orden n y C es una matriz columna de constantes arbitrarias de tamaño $nx1$.

La definición de e^{At} se basa en la representación en serie de potencias de la función exponencial escalar e^{at} :

$$e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + a^k \frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{k!}. \quad (2,17)$$

La serie en (2.17) converge para toda t . Se puede usar esta serie para definir la matriz exponencial e^{At} , con la identidad I en vez de 1 y la constante a se reemplaza por una matriz de constantes A de tamaño, en la forma siguiente:

Definición 2.15 [Pool, 1675] Para cualquier matriz A de tamaño nxn ,

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^k \frac{t^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}. \quad (2,18)$$

Se puede demostrar que la serie dada en (2.18) converge a una $n \times n$ matriz para todo valor de t .

2.2.10. Derivada e integral de e^{At}

Definición 2.16 [Pool, 1675] La derivada de la matriz exponencial es similar a la derivada del exponencial escalar e^{at} , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt} \left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^k \frac{t^k}{k!} + \cdots \right) = A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 \cdots \\ &= \left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + A^k \frac{t^k}{k!} + \cdots \right) = Ae^{At}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Integrando ambos miembros de (2.19) respecto a t se obtiene

$$\int \frac{d}{dt}(e^{At}) dt = \int Ae^{At} dt = A \int e^{At} dt = e^{At} + G_1.$$

Si A es no singular, al pre-multiplicar por la inversa de A se obtiene

$$\int Ae^{At} dt = A^{-1} Ae^{At} + G,$$

siendo $G = A^{-1}G_1$ una matriz de constantes.

Ahora se puede probar que (2.16) es una solución del sistema homogéneo $X' = AX$ para todo vector constante C de tamaño $n \times 1$:

$$X' = \frac{d}{dt}(e^{At}C) = Ae^{At}C = A(e^{At}C) = AX$$

Si se denota la matriz exponencial e^{At} por $\psi(t)$, entonces la expresión (2.19) es equivalente la ecuación diferencial matricial $\psi'(t) = A\psi(t)$. Además, se deduce de la definición 2.7 que $\psi(0) = e^{A(0)} = I$, y por tanto $\psi(0) \neq 0$. Se tiene que estas propiedades son suficientes para concluir que $\psi(t)$ es una matriz fundamental del sistema $X' = AX$.

Ya se sabe que la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden $x' = ax + f(t)$, donde a es una constante, se puede expresar como

$$x = x_c + x_p = ce^{at} + e^{at} \int_{t_0}^t e^{-as} f(s) ds.$$

Para un sistema no homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, se puede demostrar que la solución general de $X' = AX + F(t)$, donde A es una matriz constante de tamaño $n \times n$,

$$x = x_c + x_p = e^{At}C + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} F(s) ds. \quad (2,20)$$

Por ser una matriz fundamental, siempre es no singular y $e^{-As} = e^{(As)^{-1}}$.

2.2.11. Cálculo de e^{At}

Definición 2.17 [Pool, 1675] La definición de e^{At} siempre se puede usar para calcular e^{At} . Sin embargo, la utilidad práctica de la definición está limitada por el hecho de que los elementos de e^{At} son series de potencias en t . Una forma alternativa de calcular esta matriz exponencial es el uso de la transformada de Laplace.

Se ha establecido que $X = e^{At}$ es una solución de $X' = AX$. De hecho, puesto que $X = e^{A(0)} = I$, $X = e^{At}$ es una solución del problema con valores iniciales

$$X' = AX, X(0) = I. \quad (2,21)$$

Si $x(s) = \ell\{X(t)\} = \ell\{e^{At}\}$, entonces la transformada de Laplace de (2.21) es

$$sx(s) - X(0) = Ax(s) \quad o \quad (sI - A)x(s) = I.$$

Multiplicando la última ecuación por $(sI - A)^{-1}$ se tiene que

$$x(s) = (sI - A)^{-1} I = (sI - A)^{-1}.$$

En otras palabras, $\ell\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}$ o

$$e^{At} = \ell^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}.$$

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO.

3.1. Introducción.

En este capítulo se describirán los aspectos metodológicos que sellarán el progreso de esta investigación. En el mismo se detallan: El método, diseño, tipo, enfoque y procedimientos del referido estudio.

3.2. Marco metodológico.

3.2.1. Método.

Este estudio corresponde a una investigación documental, pues como lo expresan los objetivos investigativos, la misma consistirá en un análisis comparativo de la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden aplicando la forma canónica de Jordan de la matriz coeficiente.

Además, este estudio emplea el método deductivo, pues la esencia de la misma consiste en extraer conclusiones lógicas y válidas a partir de un conjunto de teoremas y proposiciones ya establecidas.

3.2.2. Diseño.

Esta investigación corresponde a un diseño documental, ya que no se manipularon deliberadamente variables por su carácter eminentemente teórico y abstracto.

3.2.3. Tipo.

De acuerdo a las características de esta investigación, es de tipo documental, ya que estará basada en una temática poco estudiada, provee una referencia general y/o

específica de la misma. Además, es de tipo descriptiva-explicativa dado que se establecerán comparaciones sobre las ecuaciones diferenciales de primer orden aplicando la forma canónica de Jordan de la matriz coeficiente respectivamente.

3.2.4. Enfoque.

Esta investigación estará orientada al enfoque cualitativo, a pesar de emplear el método deductivo, debido a que su desarrollo está basado en descripciones, explicaciones y análisis sobre las definiciones de teoremas y sus demostraciones.

3.3. Procedimientos.

En este apartado se contiene un retrato de las diferentes etapas del proceso de realización de este trabajo de investigación, las cuales son supervisadas constantemente por el asesor.

1. Se ejecutó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se efectuó una amplia consulta bibliográfica, en varios idiomas sobre los aspectos básicos y teoremas más importantes sobre la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden, aplicando la forma canónica de Jordan de la matriz coeficiente.
3. Se sometió la propuesta de anteproyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de evaluar la preeminencia y/o eficacia de la misma.
4. Luego se procedió a aplicar las definiciones, teoremas y proposiciones del marco referencial para fundamentar los resultados planteados en el capítulo IV.
5. A partir de los resultados y demostraciones del capítulo IV, se estableció un análisis comparativo de la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden aplicando la forma canónica de Jordan de la matriz coeficiente.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Introducción.

En ésta investigación se analizan las condiciones necesarias y suficientes que permiten hacer uso de los bloques de jordan de la matriz A para determinar la solución general del sistema $x' = A(t)x$. Luego se determina una expresión para la solución del sistema en función de estos bloques.

El siguiente resultado se establecen condiciones que permite simplificar el problema de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo.

Teorema 4.1. Sean $A, J, P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tales que P es no singular y $J = P^{-1}AP$, es decir A y J son semejantes. Se tiene que:

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

es solución de $x' = Ax$ si sólo si $y(t) = P^{-1}x(t)$ es solución de $y' = Jy$.

Demostración

$\Rightarrow$ Si $x(t)$ es solución de $x' = Ax$ entonces $y'(t) = P^{-1}x'(t) = P^{-1}Ax(t)$ y

$$Jy = JP^{-1}x(t) = P^{-1}APP^{-1}x(t) = P^{-1}Ax(t)$$

$\Leftarrow$ Si $y(t)$ es solución de $y' = Jy$ entonces

$$x(t) = Py(t) \Rightarrow x'(t) = Py'(t)$$

Ahora falta probar que $x(t)$ es solución de $x' = Ax$. En efecto

$$Py'(t) = APy(t)$$

$$PJy(t) = APy(t)$$

$$PP^{-1}APy(t) = APy(t)$$

$$APy(t) = APy(t)$$

Si la matriz J es más sencilla que la matriz A , en virtud del resultado anterior conviene resolver el sistema $y' = Jy$, recuperando la solución del sistema original mediante $x(t) = Py(t)$

El resultado anterior permite involucrar la forma canónica de Jordan de la matriz A para simplificar el proceso de solución del sistema $x'(t) = Ax(t)$. Para tales fines se establecen los siguientes resultados. ■

Teorema 4.2. Si J es la forma canónica de Jordan de una matriz A y $A = PJP^{-1}$, entonces

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

Demostración. Primero se observa que

$$\begin{aligned} A^n &= (PJP^{-1})^n = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) \cdots (PJP^{-1}) \\ &= PJ(P^{-1}P)J(P^{-1}P)J(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)JP^{-1} \\ &= PJ^nP^{-1} \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$(At)^n = P(Jt)^nP^{-1}$$

Luego, aplicando la definición de matriz exponencial, se tiene

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + (At) + \frac{(At)^2}{2!} + \dots = PIP^{-1} + P(Jt)P^{-1} + P\frac{(Jt)^2}{2!}P^{-1} + \dots \\ &= P \left[I + (Jt) + \frac{(Jt)^2}{2!} + \dots \right] P^{-1} = Pe^{Jt}P^{-1} \end{aligned}$$

■

En el siguiente resultado se establece la solución general de un sistema homogéneo y la solución del problema de valor inicial en función de la forma canónica de Jordan de la matriz coeficiente del sistema.

Teorema 4.3. Si $A, J, P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ siendo P no singular, J la matriz canónica de Jordan real de A , $A = PJP^{-1}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ y x_0 es un vector columna de $\mathbb{R}^n$, entonces se cumple lo siguiente:

1. La solución general de $x' = Ax$ está dada por

$$x(t) = e^{At}C = Pe^{Jt}C,$$

siendo C un vector columna arbitrario de $\mathbb{R}^n$.

2. La solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Demostración.

1. Derivando respecto a t , $x(t) = Pe^{Jt}C$, se tiene

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(Pe^{Jt}C) = P\frac{d}{dt}(e^{Jt})C = PJe^{Jt}C. \quad (4.1)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene

$$PJe^{Jt}C = Ax = PJP^{-1}(Pe^{Jt}C) = PJe^{Jt}C. \quad (4.2)$$

2. Sustituyendo la condición inicial $x(t_0) = x_0$ en la solución general, se obtiene

$$x_0 = Pe^{Jt_0}C \Rightarrow C = e^{-Jt_0}P^{-1}x_0. \quad (4.3)$$

Sustituyendo C en la solución general, se obtiene la solución particular

$$x(t) = Pe^{Jt}C = Pe^{Jt}(e^{-Jt_0}P^{-1}x_0) = Pe^{J(t-t_0)}P^{-1}x_0 \quad (4.4)$$

Las soluciones dadas en los resultados anteriores sugieren buscar un método para calcular la exponencial de una forma canónica de Jordan real. Con ayuda del teorema 2,2,5 , bastará con conocer la exponencial de cada uno de los bloques que componen la matriz canónica de Jordan real. Esto se establece en el siguiente resultado. ■

Teorema 4.4. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, el bloque elemental de Jordan $J_k(\lambda) \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$, que están definido por

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces

$$e^{J_m(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t & t^2/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Se analiza primero el caso para un bloque de Jordan orden $m = 2$, luego se generaliza para $m > 2$.

Sea $J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Entonces

$$J_2^2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, J_2^3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \dots, J_2^k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}, \dots$$

Aplicando la definición de matriz exponencial se tiene que

$$\begin{aligned} e^{J_2(\lambda)t} &= I + J_2(\lambda)t + \frac{(J_2(\lambda)t)^2}{2!} + \frac{(J_2(\lambda)t)^3}{3!} + \cdots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2!} + \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} \frac{t^3}{3!} + \cdots + \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \frac{t^k}{k!} + \cdots$$

Al realizar la suma matricial, se obtiene:

$$e^{J_2(\lambda)t} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda^{k-1})t^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para un bloque de Jordan de orden $m = 3$, con un procedimiento similar al anterior, se obtiene:

$$e^{J_3(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Continuando el proceso, para $m = k$, se tiene

$$e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{k-1}/(k-1)! \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t & t^2/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Numérico 4.1. Se considera el sistema $x' = Ax$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: El polinomio característico resulta ser $p_A(t) = \det(A - tI_6) = t(t-2)^5$.

Los autovalores son $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad $m_2 = 5$.

Un autovector asociado a λ_1 es $v_1 = (0, 0, 0, 0, 1, -1)^t$. Aquí el superíndice t indica matriz transpuesta, es decir, que consideramos a v_1 como vector columna. Por otro lado, se demuestra que el rango de la matriz $A - 2I_6$ es 4, de donde la dimensión de $\ker(A - 2I_6)$ es 2. Igualmente, el rango de $(A - 2I_6)^2$ es 2, y por tanto, la dimensión de $\ker(A - 2I_6)^2$ es 4. Finalmente, se comprueba que el rango de $(A - 2I_6)^3$ es 1, con lo que la dimensión de $\ker(A - 2I_6)^3$ es $m_2 = 5$. Esto demuestra que en la matriz canónica de Jordan habrá dos bloques correspondientes al autovalor $\lambda_2 = 2$, a saber $J_3(2)$ y $J_2(2)$. Para determinar los vectores que aporta el bloque $J_3(2)$ a la matriz P de cambio de base, sea $w_1 \in \ker(A - 2I_6)^3 \setminus \ker(A - 2I_6)$, por ejemplo $w_1 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^t$. En función de esto, elegimos $w_2 = (A - 2I_6)w_1$ y $w_3 = (A - 2I_6)^2 w_1$. En cuanto al bloque $J_2(2)$ escogemos $u_1 \in \ker(A - 2I_6)^2 \setminus \ker(A - 2I_6)$, por ejemplo $u_1 = (0, 0, 1, -1, 1, 1)^t$. Si ponemos $u_2 = (A - 2I_6)u_1 = (0, 0, 2, -2, 0, 0)^t$, entonces la matriz de cambio de base está dada por $P = (w_3, w_2, w_1, u_2, u_1, v_1)$. Se tiene que $A = PJP^{-1}$ donde

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo visto en los resultados anteriores, la solución general del sistema estaría dada por $x(t) = Pe^{Jt}C$, donde

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix}$$

■

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En este capítulo se presenta las conclusiones obtenidas de los resultados anteriores en función de los objetivos planteados.

5.2 Conclusiones

Al realizar esta investigación sobre la aplicación de la forma canónica de Jordan a la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, se llegó a las siguientes conclusiones:

1. La solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales $Ax' = x$ se puede obtener a partir de la solución del sistema $y' = Jy$ siempre que $y(t) = P^{-1}x(t)$ sea la solución de este último sistema. La matriz J es la matriz canónica de Jordan de la matriz A y P es la matriz de cambio de base asociada.
2. La solución general del sistema lineal $Ax' = x$ se puede obtener mediante la expresión

$$x(t) = Pe^{Jt}C,$$

siendo C un vector columna arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Esta solución involucra la matriz de cambio de base de la forma canónica de Jordan y el exponencial de la matriz J de Jordan de la matriz A . Con la misma descomposición de la Matriz A se puede obtener la solución de un problema de valor inicial asociado a este sistema.

3. Finalmente, se obtuvo una expresión para la exponencial de la forma canónica de Jordan real. Con este último paso se completa el proceso de aplicación de la forma canónica Jordan en la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

5.1. Líneas Futuras de Investigación.

- Como línea futura de investigación, se puede considerar la extensión de este método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

Bibliografía

- [1] Adi Ben, Israel y Thomas N. E., Greville.(2002), *Generalized Inverses Theory And Applications*. Canadian Mathematical Society.
- [2] Bourdon, P. S., and Feldman, N. S. (2003), *omewhere dense orbits are everywhere dense*. Indiana University mathematics journal, 811-819 página.
- [3] Bernoulli, D. (1734), *Historia del Teorema de Bernoulli*. Universidad de Guanajuato, México, vol. 17.
- [4] Devaney, R. (1989), *An introduction to chaotic dynamical systems*. Ed. Addison Wesley Publishing Company, united states.
- [5] Edwards, C. Henry y E. Penney, David (1964), *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. The university of Georgia, cómputo y modelado cuarta edición.
- [6] Gottfried, W. (1646-1716), *Análisis Matemático. Segunda edición*. Editorial Reverté. España.
- [7] Pool, David. (1675) , *Álgebra lineal. Una introducción moderna*. Thomson
- [8] Newton, I. (1687), *Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral II*. Historia del Análisis Matemático, primera edición.
- [9] Gustavo, M. y Juan, S. (2017), *Fundamentos de teoria cualitativa de ecuaciones diferenciales*. Ediciones paraninfo, S.A 3ra edición en madrid española.
- [10] Zill, Dennis G. y Cullen, Michael R. (2009), *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera*. Séptima Edición.

ANEXOS.

Anexo I. Presupuesto.

En este apartado se describen un resumen de los recursos económicos invertidos en el proceso de realización de este trabajo de posgrados.

Descripción	Monto
Transporte y viáticos	8,000.00
Fotocopias	1000.00
Materiales e insumos	4,500.00
Imprevistos	5,000.00
Total	17,500.00

Anexo II. Cronograma de trabajo de la investigación.

En este apartado se describen las diferentes etapas del proceso de preparación de esta investigación y sus respectivas fechas de ejecución.

Descripción	Periodos de ejecución.
Solicitud de título	Noviembre 2021
Aprobación del título.	Diciembre 2021
Elaboración y entrega del anteproyecto.	Marzo 2022
Entrega de anteproyecto corregido.	Septiembre 2022
Elaboración de capítulo IV y V.	Enero 2023

Anexo III. Simbología utilizada.

Descripción de símbolos matemáticos.

En este apartado se describen las simbologías matemáticas utilizadas en este trabajo de investigación, a los fines de facilitar la lectura y comprensión de la misma.

Simbología	Significado
$\int$	Integral
$\frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots x_n)$	sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$	Matriz.
e^{At}	Matriz exponencial.
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complejos.
$\neq$	No es igual.
$\in$	Pertenece a.
$\emptyset$	Conjunto vacío.
$\cap$	Intersección.
$\cup$	Unión.
$\frac{dy}{dx}$	Derivada.
$X' = AX$	Sistema homogéneo.
$Z = F(x, y)$	Función de dos variable.
A	Matriz constante.
$\frac{\partial z}{\partial x}$	Derivada parciales.
x'	Ecuación diferencial de primer orden.
C	Vector columna de constantes arbitrarias.
I	Intervalo.
$X' = AX + f(x)$	Sistema lineal no homogéneo.
$\in$	Pertenencia.

$\neq$	Diferente
$\forall$	Cuantificador universal.
$ x $	Valor absoluto.
∂	Derivada parcial.
J	Matriz de Jordán.
λ	Escalar.
$\ \cdot\ $	Espacio normado
$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i$	Límite de la sucesión.
Σ	Sumador.
v	Vector.
$\leq$	Menor o igual.
$\geq$	Mayor o igual.