

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemática

Título

Funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

Sustentante

Rosa María Adames Farías

Asesor

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico 2023.

TÍTULO

FUNCIONES M-CONVEXAS GENERALIZADAS SOBRE CONJUNTOS
FRACTALES

Declaración de autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

Proyecto de Postgrado presentado por **Rosa María Adames Farías** para optar por el título de Magister en Matemáticas

Composición del tribunal

MA. Julio Manzueta

Jurado de metodología

MA. Ynosencia Merejo

Jurado de Redacción

MA. Wilfran Noel Rosario

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos.	VI
Dedicatoria.	VII
RESUMEN.	IX
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	1
1.2.2 Antecedentes académicos	5
1.3 Planteamiento del problema	6
1.4 Justificación	8
1.5 Objetivos	8
1.5.1 General	8
1.5.2 Específicos	8
1.6 Alcances y límites	9
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL	10
2.1 Introducción	10
2.2 Marco teórico	10
2.2.1 Conjuntos Fractales	10
2.2.2 Funciones convexas	13
2.2.3 Funciones m-convexas	17
CAPÍTULO III. DISEÑO METODOLÓGICO	25
3.1 Introducción	25
3.2 Marco metodológico	25
3.2.1 Diseño	25
3.2.2 Método	25
3.2.3 Tipo	25
3.2.4 Enfoque	26

3.3	Procedimientos	26
CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS		27
4.1	Introducción	27
4.2	Propiedades algebraicas y topológicas de funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales	27
4.3	Caracterización de las funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales	32
4.4	Demostraciones de desigualdades que involucran funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales	37
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS		45
5.1	Introducción	45
5.2	Análisis de las propiedades algebraicas y topológicas de funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales	45
5.3	Análisis de la caracterización de las funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales	46
5.4	Análisis de las demostraciones de desigualdades que involucran funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales	47
5.5	Conclusiones	48
5.6	Líneas futuras de investigación	49
Referencias		51
ANEXOS		53

Agradecimientos.

A Dios. Gracias señor, por la vida que nos has dado y ser quien todo lo permite. Por llenar de bendiciones cada actividad que aportó al desarrollo de este hermoso proyecto. Toda la gloria y honor fue posible porque tú has sido el guía. Gracias, nuestro señor.

A la Universidad Tecnológica Del Cibao Oriental (UTECO). Por ser una alta y majestuosa casa de estudios, por acogernos y abrir las puertas para permitir insertarnos al desarrollo profesional y para poder recibir el pan de la enseñanza con más alto nivel. Esta se convirtió en mi segundo hogar y son muchas las experiencias maravillosas vividas en la misma.

A los docentes. Agradezco infinitamente y con especial aprecio a cada uno de los docentes, que se esforzaron para impartir experiencias y maravillosas enseñanzas a través de las asignaturas, cursos, seminarios, asesorías y consultas, en la promoción de este programa.

Al asesor Manuel Aurelio Diloné. Es un magnífico asesor, gracias por aceptar ser mi guía en este trabajo de investigación y por su apoyo incondicional, sugerencias, aportaciones, tiempo, esfuerzo y dedicación para mejorar el presente proyecto; además, por su gran sencillez y humildad, características que la hacen una excelente persona. Muchas gracias.

Dedicatoria.

A Dios. Te doy gracias por darme la oportunidad de nacer, por darme fuerza cuando no tenía para seguir adelante sin desmayar, te agradezco infinitamente por que siempre ha estado a mi lado ofreciéndome tu apoyo incondicional y ayudándome cuando más lo he necesitado. Gracias Dios mío por acompañarme siempre en esta trayectoria y permitir que llegara hasta el final con éxito.

A mis padres (Félix Adames y Juana Farías). A ustedes les doy infinitas gracias por traerme al mundo, por ayudarme cuando más lo he necesitado, gracias por darme la oportunidad de estudiar, sin ustedes no lo habría logrado. Sin duda, han sido mi sostén, siempre dispuestos a ayudarme con sus buenos consejos, recuerdo que me decían que estudiara y que me esforzara para que obtuviera una profesión, ya que ese era el tesoro más valioso que me podían dar, gracias por ser mis padres.

A José Beltrán Rosario. Te doy las gracias por formar parte de mi vida, sin lugar a dudas tu has sido mi sostén a lo largo de esta trayectoria, ya que siempre has estado ahí para mí, ofreciéndome tu apoyo incondicional. Durante estos dos años, fuiste el ser que siempre estuvo a mi lado brindándome tu apoyo y dándome fuerzas cuando sentía que no podía seguir adelante.

A mi hermana Fátima Adames. A ti te doy gracias por apoyarme en los momentos que más lo necesité, siempre estabas dispuesta a ayudarme cuando más lo necesitaba, siempre tenías las palabras correctas para hacer que me sintiera bien y sobre todo siempre confiaste en mí y en mi capacidad para salir adelante.

A mis compañeras de estudio: Julissa Díaz Hernández, Marileida Bautista, Sorivel Veras, Candy María Rosario, Lucia Batista y Anyelina Suarez. A ustedes por formar parte de mi vida, sin lugar a dudas, se han ganado una parte importante en mi corazón, las quiero mucho y quiero decirles que fue un honor para mí el haber tenido la oportunidad de compartir estos dos años con ustedes.

A Juan Bolívar Liriano Martes. A ti te doy las gracias por formar parte de este logro, fuiste un pilar muy importante en este proceso, siempre estuviste ahí para mí, dándome consuelo, animándome, motivándome a continuar cuando tenía mis momentos débiles, siempre me decía siga adelante que usted puede, usted es una mujer muy inteligente y capaz, sin dudas que esas palabras fueron de mucho aliento para mí, muchas gracias por ser parte de mi vida, quiero que sepas que este logro no es mío, sino nuestro.

A mis compañeros de estudio. Fueron los mejores compañeros del mundo, gracias por formar parte de mi trayectoria universitaria. Junto a ustedes, todo fue más fácil y divertido.

A los profesores: Wilson Lucilo Heredia, Manuel Arismendy Batista, Leomar Antonio Reyes, Rainier Sánchez y demás. Durante esta trayectoria desempeñaron un papel muy importante, sin duda ustedes me enseñaron mucho, gracias por tratar de sacar lo mejor de mí como estudiante, sin ustedes no habría sido igual, son excelentes seres humanos y maestros.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante

Rosa María Adames Farías

Asesor

Dr. Manuel Aurelio Diloné

RESUMEN.

Esta investigación presenta un análisis de las funciones m -convexas generalizadas definidas sobre conjuntos fractales. Es por esto, que los objetivos planteados se fundamentaron en describir las propiedades algebraicas y topológicas, su respectiva caracterización y realizar demostraciones de desigualdades que involucran estas funciones m -convexas generalizadas cuyo dominio de definición, sean los conjuntos fractales.

Este estudio utilizó un diseño no experimental y transversal. Se aplicó el método analítico-deductivo para analizar las funciones m -convexas en conjuntos fractales. La investigación fue de tipo explicativa-descriptiva, con un enfoque cualitativo y documental.

De acuerdo a los objetivos establecidos, las conclusiones principales de esta investigación son: las funciones m -convexas generalizadas en conjuntos fractales conservan propiedades algebraicas y topológicas importantes, como la estrellación generalizada, la preservación de la m -convexidad, la composición de funciones y las combinaciones convexas de puntos, así como la suma y el producto de funciones m -convexas

generalizadas. Estas funciones se caracterizan por preservar la m -convexidad bajo la multiplicación por un escalar positivo, el máximo de dos funciones m -convexas generalizadas y la convergencia puntual. Además, se demostraron desigualdades relacionadas con las funciones m -convexas generalizadas en conjuntos fractales, tanto en términos de los valores de la función en los extremos del intervalo como en combinaciones lineales de puntos, utilizando la m -convexidad de las funciones, la inducción matemática y técnicas de integración fraccionaria.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

Este capítulo presenta los aspectos introductorios de esta investigación. Aquí se muestran los antecedentes históricos y académicos sobre los fundamentos de la teoría de convexidad y los conjuntos fractales, así como el planteamiento, objetivos, justificación y la delimitación que marca los alcances y límites de este proceso investigativo.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes históricos

1.2.1.1. Antecedentes históricos de las funciones convexas y m-convexas

Los estudios realizados sobre teoría de convexidad tienen una larga historia; en el famoso libro “Los Elementos” de Euclides (300 A.C.) aparecen varias contribuciones a esa materia, relativas principalmente a propiedades de los polígonos y los poliedros. Sin embargo, fue Arquímedes de Siracusa (278-212 A.C.) el primero en dar una definición precisa de lo que se entendía por una curva o una superficie convexa (en su libro “Sobre la esfera y el cilindro”). Entre las propiedades obtenidas por Arquímedes, merecen especial mención los postulados y resultados referentes al centro de gravedad de conjuntos planos y su descripción de los trece poliedros semi regulares, (entiéndase por un poliedro convexo semi regular si sus caras son polígonos regulares de, al menos, dos tipos, y el grupo de isometrías es transitivo sobre los vértices), también conocidos como sólidos arquimedianos que fueron redescubiertos muy posteriormente por Johannes Kepler (1571-1630) en su libro “Harmonices Mundi” (1619), quién demostró que efectivamente podían existir trece (Materano, 2015).

A finales del siglo XIX y principios de XX se trabaja en el tema de convexidad por varios matemáticos, entre ellos, el alemán Otto Hölder (Jensen, 1905). El cual, en 1889 demostró la forma discreta de la llamada desigualdad de Jensen, bajo una hipótesis con un mayor grado de regularidad para la función f' , lo que significa que la segunda derivada es no negativa en su dominio.

Además de contribuciones, a finales del siglo XIX, aparecieron diversos resultados de gran importancia en convexidad gracias a destacados matemáticos como Brunn o Minkowski, sin embargo; el interés real sobre la geometría convexa es relativamente reciente, pues un primer estudio sistemático no lo encontramos hasta 1934, en el libro de T. Bonnesen y W. Fenchel “Theorie der Konvex Körper”. A lo largo de los años 40 y 50, se descubrieron numerosas aplicaciones importantes de los conjuntos convexos, principalmente en el campo de la optimización geométrica, lo que acrecentó el interés de esta teoría (Materano, 2015).

Uno de los resultados más importantes de las funciones convexas es la llamada desigualdad de Hermite-Hadamard que fué dada por Hadamard (1983), para el caso de las funciones con derivadas creciente en un intervalo cerrado de la recta real. En esa época la noción de función convexa estaba en proceso de construcción. En 1883, la parte derecha de la desigualdad la demostró Charles Hermite por lo que hoy en día se llama desigualdad de Hermite-Hadamard, y viene dada de la siguiente manera

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Una forma más generalizada del concepto de función convexa, fue introducida por Beckenbach y Bing (1945), reemplazando el segmento por gráficas de funciones continuas pertenecientes a una familia de funciones de dos parámetros.

En 1893, el francés Jaques Hadamard (Jensen, 1905), logró una desigualdad para aquellas funciones que tienen derivada creciente en $[a, b]$. Johan Ludwig William Jensen utiliza la siguiente desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

para definir funciones convexas y dió el primero de una larga serie de resultados el cual junto con esta desigualdad implica la continuidad de f .

El concepto de función m -convexa fue introducido por (Murota y Shioura, 1999) como una generalización cuantitativa del conjunto de puntos enteros en un poliedro base integral. El concepto de función m -convexa proporciona un marco unificado para problemas de optimización no lineal que pueden resolverse de manera eficiente.

1.2.1.2. Antecedentes históricos de la teoría de Fractales

El punto más antiguo en la línea de tiempo fractal comienza en el siglo XVII. Uno de los matemáticos y filósofos más famosos de la época, Gottfried Leibniz, contempló la autosemejanza recursiva. Usó el término exponentes fraccionarios para referirse a las propiedades de escala. Él creía que solo una línea recta también era autosimilar, pero en la comprensión moderna, no se considera que sea un fractal. Desafortunadamente, el interés por los problemas y temas fractales se desvaneció después de Leibniz. Los pocos que estudiaron el tema los llamaron “monstruos matemático” (Pickover, 2009).

En la Real Academia de Ciencias de Prusia, Karl Weierstrass descubrió una función especial que ahora lleva su nombre. Esta función es continua en todas partes pero diferenciable en ninguna parte. Georg Cantor, un estudiante que luego se convertiría en matemático, había asistido a las conferencias de Weierstrass, estudió subconjuntos de la línea real que ahora se llaman conjuntos de Cantor. Estas líneas son autosimilares y siguen el patrón eliminando secciones. A fines del siglo XIX, Henri Poincaré y Felix Klein descubrieron lo que ahora llamamos fractales “autoinversos”. En 1904, a Helge von Koch no le gustaba la definición de Weierstrass de que los fractales eran continuos pero no diferenciables. Comenzó con las ideas de Poincaré y en su lugar sugirió una definición de la geometría. Creó imágenes dibujadas a mano de un patrón repetitivo idéntico que ahora conocemos como el copo de nieve de Koch (Mandelbrot, 1982).

Como tal, los orígenes de la geometría fractal se remontan al final del siglo XIX, cuando los matemáticos comenzaron a cuestionar los principios establecidos por Eu-

clides. Fue en 1919 cuando el matemático alemán Hausdorff se atrevió a explorar la idea de dimensiones fraccionarias y su relación con la estructura a pequeña escala de las formas matemáticas. Esta noción fue posteriormente complementada por la dimensión propuesta por el matemático ruso Besicovitch, y sentó las bases para la dimensión fractal. Sin embargo, esta idea revolucionaria no fue inicialmente aceptada por otros matemáticos contemporáneos, quienes consideraron estas formas extrañas como "patologías" sin importancia (Spinadel, 2002).

Aunque los conceptos claves asociados con los fractales han sido estudiados durante años por matemáticos, y muchos ejemplos, como la curva de Koch o “copo de nieve”, se conocen desde hace mucho tiempo, Mandelbrot fue el primero en señalar que los fractales podrían ser una herramienta ideal en matemáticas aplicadas para modelar una variedad de fenómenos desde objetos físicos hasta el comportamiento del mercado de valores. Desde su introducción en 1975, el concepto de fractal ha dado lugar a un nuevo sistema de geometría que ha tenido un impacto significativo en campos tan diversos como la química física, la fisiología y la mecánica de fluidos (Britannica, The Editors of Encyclopaedia, 2022).

Según Gutierrez y Hott (2004), la teoría de los fractales no surge como una teoría ajena a las demás disciplinas matemáticas, ya existentes, por el contrario, es el resultado de las matemáticas existentes en el siglo pasado. El concepto más relevante que ayudó al desarrollo de esta teoría fue el de dimensión, el cual era crucial para el estudio de conjuntos de puntos, superficies y volúmenes. Con el desarrollo de este concepto tan importante se logró la creación de conjuntos de puntos o curvas que contradecían las definiciones expuestas por George Cantor, Waclaw Sierpinski, Helge Von Koch, Giuseppe Peano y David Hilbert. Estos grandes escritores matemáticos contribuyeron desarrollando el concepto de dimensión en el plano euclidiano, sin darse cuenta que sentaron los cimientos para la creación de esta nueva teoría que hoy se conoce como “Teoría de los fractales”.

1.2.2. Antecedentes académicos

En el artículo publicado por Murota y Shioura (1999), titulado “m-convex function on generalized polymatroid”, se plantea que el concepto de función m-convexa es una generalización cuantitativa del conjunto de puntos integrales en un poliedro base integral así como una extensión de la matroide valorada de Dress y Wenzel. Además, estos extienden este concepto a funciones en polimatroides generalizados con el fin de proporcionar un marco unificado para problemas de optimización discretos no lineales que se puedan resolver de manera eficiente.

Según Murota y Tamura (2003), en su estudio titulado “New characterizations of m-convex functions and their applications to economic equilibrium models with indivisibilities”, ofrece dos nuevas caracterizaciones de funciones m-convexas que generalizan los resultados de Gul y Stacchetti sobre la equivalencia entre la condición de mejora única, la condición de sustitutos brutos y la condición de ausencia de complementariedades para funciones establecidas (funciones de utilidad en vectores 0,1), así como la observación de Fujishige y Yang sobre la conexión a m-convexidad.

Por su parte, Murota (2006), en su artículo titulado “m-convex functions on jump systems: a general framework for minsquare graph factor problem”, establece que el concepto de funciones m-convexas se generaliza para funciones definidas en sistemas de salto de paridad constante. Las funciones m-convexas surgen de coincidencias b perfectas de peso mínimo y de una función convexa separable (suma de funciones convexas univariadas) en las secuencias de grados de un gráfico no dirigido. Como generalización de un resultado de Apollonio y Sebo para el problema del factor min-cuadrado, estos proporcionaron un criterio de optimización local para la minimización de una función M-convexa sujeta a una restricción de suma de componentes.

Iskan (2013), en su publicación titulada “A new generalization of some integral inequalities for (α, m) -convex functions”, obtiene nuevas estimaciones para el término restante de las fórmulas del punto medio, del trapecioide y de Simpson para funciones

cuyas derivadas en valor absoluto a cierta potencia son (α, m) -convexas.

En el estudio realizado por Farid y Khan (2018), acerca de “General fractional integral inequalities for convex and m -convex functions via an extended generalized Mittag-Leffler function”, se presentan algunas nuevas desigualdades integrales fraccionarias generales para funciones convexas y m -convexas mediante la participación de una función extendida de Mittag-Leffler. Estos resultados producen desigualdades para varios tipos de operadores integrales fraccionarios.

Por otro lado, en el estudio realizado por Farid y Abbas (2018), titulado “Generalizations of some fractional integral inequalities for m -convex functions via generalized Mittag-Leffler function”, se presentan algunas desigualdades integrales fraccionarias generales para funciones m -convexas, involucrando la función generalizada de Mittag-Leffler. En particular, se plantean desigualdades para varios tipos de integrales fraccionarios, además de mostrar que estas desigualdades tienen algunas conexiones con desigualdades integrales conocidas.

Por otro lado, Abdeljawad y Rashid (2020), en su publicación sobre “Some new local fractional inequalities associated with generalized (s, m) -convex functions and applications” emplean fractales lineales $\mathbb{R}^\alpha$ para investigar la (s, m) -convexidad y relacionarlos para derivar desigualdades generalizadas de tipo Hermite-Hadamard (HH) y varias otras variantes asociadas dependiendo de un resultado auxiliar. Adicionalmente, obtuvieron aplicaciones de estas funciones en funciones de densidad de probabilidad y medios especiales generalizados para confirmar la relevancia y efectividad computacional del método considerado.

1.3. Planteamiento del problema

En las últimas décadas, las funciones m -convexas han demostrado ser una herramienta útil y poderosa en varias ramas de las matemáticas, desde la optimización y el análisis funcional hasta la teoría de juegos. A pesar de esto, estas funcioens se

han desarrollado principalmente en el contexto de espacios vectoriales o conjuntos compactos en espacios euclídeos.

Los conjuntos fractales, con su escala de auto-similitud y propiedades topológicas inusuales, son de interés tanto por sus propias propiedades matemáticas como por su relevancia en diversos campos de aplicación. Estos conjuntos son una parte integral de las matemáticas modernas, ya que poseen una increíble complejidad, pero a la vez, estas estructuras son bastantes comunes en la naturaleza y el mundo a nuestro alrededor; desde las formas de las montañas y las costas hasta la distribución de los árboles en un bosque o las ramificaciones de los bronquios en los pulmones, los patrones fractales se encuentran en todas partes. Por lo tanto, el estudio de los conjuntos fractales no solo es esencial para avanzar en el conocimiento matemático, sino también para modelar y entender muchos fenómenos naturales.

Lo anterior implica, que tanto las funciones m -convexas como los conjuntos fractales se encuentran en el núcleo de numerosos problemas de la física, la informática y otras ciencias aplicadas. Por lo tanto, la aplicación y análisis de las funciones m -convexas en conjuntos fractales no sólo sería de interés desde un punto de vista puramente matemático, sino que también podría tener implicaciones importantes en una amplia gama de aplicaciones. En correspondencia con esto, esta investigación pretende responder a la interrogante de ¿Cómo se puede analizar las funciones generalizadas m -convexas en conjuntos fractales?

Para dar sistematicidad a esta pregunta general, a su vez se plantea responder a:

1. ¿Cuáles son las propiedades algebraicas y topológicas únicas de las funciones m -convexas cuando se aplican a conjuntos fractales?
2. ¿Cuáles condiciones caracterizan las funciones m -convexas generalizadas en conjuntos fractales?
3. ¿Cómo aplicar y demostrar las propiedades de las funciones m -convexas gene-

realizadas en conjuntos fractales?

1.4. Justificación

Las funciones m-convexas generalizadas representan una expansión del concepto de convexidad, que es uno de los elementos más fundamentales en las matemáticas. Al estudiar cómo estas funciones interactúan sobre conjuntos fractales, se podrían desarrollar nuevos enfoques para resolver problemas complejos en la teoría de conjuntos y el análisis funcional. Además, que dado que los fractales son una herramienta poderosa para describir estructuras complejas en la naturaleza y en diversos sistemas matemáticos, este estudio podría agregar una nueva forma de comprensión a la teoría de los fractales.

Ambas áreas, las funciones m-convexas generalizadas y los conjuntos fractales, tienen relevancia más allá de las matemáticas puras. Sus aplicaciones se extienden a la Física, economía, ingeniería, ciencias de la computación, entre otros. Por lo tanto, cualquier desarrollo en estos campos puede tener un impacto significativo en una serie de disciplinas, con el potencial de abrir nuevas vías de exploración matemática y mejorar la eficiencia de los algoritmos computacionales para la generación de fractales y situaciones de la realidad.

Este estudio pretenderá servir de base a futuras líneas de investigaciones, debido a que es un tema poco estudiado en la literatura matemática, y así puedan ser aplicados para solución de problemas concretos de la modelación matemática, y la realización de algoritmos informáticos.

1.5. Objetivos

1.5.1. General

Analizar las funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

1.5.2. Específicos

1. Analizar las propiedades algebraicas y topológicas de funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

2. Caracterizar las funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.
3. Enunciar demostraciones de desigualdades que involucren funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

1.6. Alcances y límites

La presente investigación se enmarca dentro de las matemáticas puras y estuvo centrada en el estudio específicamente de las funciones m-convexas generalizadas sobre las propiedades algebraicas y topológicas de los conjuntos fractales, lo que implica que su desarrollo está enfocado en caracterizaciones y demostraciones, y no en el estudio gráfico de fractales que se pudiesen generar a partir de alguna técnica o método iterativo utilizando funciones m-convexas generalizadas.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan los fundamentos conceptuales (definiciones, proposiciones, teoremas y algunas demostraciones) que servirán de sustento teórico de esta investigación.

2.2. Marco teórico

2.2.1. Conjuntos Fractales

Definición 2.1 De acuerdo con Afonso (2018), dado $F \subseteq \mathbb{R}^n$, la dimensión de Hausdorff de F , es el número

$$\dim_H(F) = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

De la definición anterior, y adoptando la convención, $\sup \emptyset = 0$, se tiene:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F) \end{cases}$$

Si $s = \dim_H(F)$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser igual a 0, ∞ , o $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Proposición 2.2.1 La dimensión de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:

1. Si $E \subseteq F$ entonces $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$ (Monotonía).
2. Si $\{F_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\} \quad (\text{Estabilidad numerable}).$$

3. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es numerable, entonces $\dim_H(F) = 0$ (Dimensión de conjuntos numerables).
4. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\dim_H(F) = n$ (Dimensión de conjuntos abierto).

Definición 2.2 Un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión topológica k si cada punto de éste tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras intersectan S en un conjunto de dimensión $k - 1$, siendo k el menor entero no negativo con esta propiedad (Afonso, 2018).

Nótese que según esta definición, todo conjunto tiene dimensión entera no negativa. Para ver que un conjunto tiene dimensión topológica k , basta con:

- a) Probar la condición de las fronteras de los entornos intersectando el conjunto en conjuntos de dimensión $k - 1$.
- b) Probar que esa condición no se satisfaría si el conjunto tuviera dimensión $k - 1$.

Definición 2.3 Un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión topológica cero si todo punto de S posee entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras no intersectan a S .

Todo conjunto finito de puntos tiene dimensión topológica cero, si la distancia mínima entre dos puntos del conjunto es d , y las bolas centradas en cada punto de radio arbitrariamente pequeño no contienen a ningún otro punto.

Más generalmente, todo conjunto numerable (como $\mathbb{Q}$), tiene dimensión topológica cero. La idea es observar que para cada punto existen incontables bolas centradas en ese punto cuya frontera no contiene a otro punto.

Ejemplo 2.1 El conjunto de Cantor tiene dimensión topológica cero.

Si x es un punto del conjunto de Cantor, $x \in C$, entonces existen $a < x$ y $b > x$ no pertenecientes al conjunto, arbitrariamente cerca de x . Entonces el intervalo $[a, b]$ es un entorno de x cuya frontera no intersecta a C .

Definición 2.4 Un conjunto se dice autosimilar si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo (Afonso, 2018).

Definición 2.5 Un fractal es un conjunto autosimilar con dimensión de Hausdorff mayor que su dimensión topológica (Cooper, 2011).

Definición 2.6 La dimensión fractal es el cociente

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

donde N es el número de veces que se reproduce el objeto inicial en la primera generación y ε es la escala a la que se encuentran las dimensiones de las reproducciones.

De acuerdo con lo planteado por Sanchez y Sanabria (2022), la teoría de los conjuntos fractales, establecida por Yang, se introdujo de la siguiente manera.

Definición 2.7 Para $0 < \alpha \leq 1$, se tienen los siguientes conjuntos de tipo α :

$$\mathbb{Z}^\alpha = \{0^\alpha, \pm 1^\alpha, \pm 2^\alpha, \dots, \pm n^\alpha, \dots\}$$

(números enteros de tipo α),

$$\mathbb{Q}^\alpha = \left\{ m^\alpha = \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

(números racionales de tipo α),

$$\mathbb{J}^\alpha = \left\{ m^\alpha \neq \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

(números irracionales de tipo α),

$$\mathbb{R}^\alpha = \mathbb{Q}^\alpha \cup \mathbb{J}^\alpha \quad (\text{números reales de tipo } \alpha).$$

Se llama conjunto fractal a $\mathbb{R}^\alpha$ y a cualquier subconjunto de él.

Proposición 2.2.2 Si a^α, b^α y c^α pertenecen al conjunto $\mathbb{R}^\alpha$ de números reales de tipo α , entonces se cumplen las siguientes propiedades (Yang, 2012).

1. (1) $a^\alpha + b^\alpha$ y $a^\alpha b^\alpha$ pertenecen al conjunto $\mathbb{R}^\alpha$.
2. (2) $a^\alpha + b^\alpha = b^\alpha + a^\alpha = (a + b)^\alpha = (b + a)^\alpha$.
3. (3) $a^\alpha + (b^\alpha + c^\alpha) = (a^\alpha + b^\alpha) + c^\alpha$.

4. (4) $a^\alpha b^\alpha = b^\alpha a^\alpha = (ab)^\alpha = (ba)^\alpha$.
5. (5) $a^\alpha (b^\alpha c^\alpha) = (a^\alpha b^\alpha) c^\alpha$.
6. (6) $a^\alpha (b^\alpha + c^\alpha) = a^\alpha b^\alpha + a^\alpha c^\alpha$.
7. (7) $a^\alpha + 0^\alpha = 0^\alpha + a^\alpha = a^\alpha$, $a^\alpha 1^\alpha = 1^\alpha a^\alpha = a^\alpha$ y $(-a)^\alpha = -a^\alpha$.
8. (8) $a < b$ si y solo si $a^\alpha < b^\alpha$.

2.2.2. Funciones convexas

Definición 2.8 Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es convexa si y sólo si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \quad (2.1)$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$. Si la desigualdad es estricta cuando $x \neq y$ y $t \in (0, 1)$, se dice que f es estrictamente convexa (Materano, 2015).

Definición 2.9 Sean $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y convexo. Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada convexa si y sólo si satisface la desigualdad funcional de Jensen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

para todo $a, b \in I$. Si la desigualdad es estricta para $x \neq y$, entonces la función f es llamada estrictamente convexa (Kuczma, 2009).

Definición 2.10 Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y un intervalo $[u, v] \subset [a, b]$, denotará por

$$m(u, v) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$$

la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(u, f(u)), (v, f(v))$. Por lo tanto, la ecuación de esta recta se puede escribir en la forma $r(x) = f(u) + m(u, v)(x - u)$, y también en la forma $r(x) = f(v) + m(u, v)(x - v)$.

La definición geométrica de función convexa admite las formulaciones analíticas que recoge la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3 Una función $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si cumple alguna de las condiciones equivalentes

- [C1] : $u < x < v \Rightarrow m(u, x) \leq m(u, v)$ en cada $[u, v] \subset |a, b|$.
- [C2] : $u < x < v \Rightarrow m(u, v) \leq m(x, v)$ en cada $[u, v] \subset |a, b|$
- [C3] : $u < x < v \Rightarrow m(u, x) \leq m(x, v)$ en cada $[u, v] \subset |a, b|$.
- [C4] : $\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha f(u) + \beta f(v)$.

Demostración. Si f es convexa, para cada $[u, v] \subset |a, b|$ y cada $x \in (u, v)$ se cumple que $f(x) \leq r(x)$ donde $r(x) = f(u) + m(u, v)(x - u)$ es la función afín cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $(u, f(u)), (v, f(v))$. Como $x - u > 0$, la desigualdad $f(x) \leq r(x)$ adopta la forma $m(u, x) \leq m(u, v)$ luego f es convexa si y sólo si cumple [C1] [C2] : $u < x < v \Rightarrow m(u, v) \leq m(x, v)$ en cada $[u, v] \subset |a, b|$.

- [C3] : $u < x < v \Rightarrow m(u, x) \leq m(x, v)$ en cada $[u, v] \subset |a, b|$.
- [C4] : $\alpha + \beta = 1, \alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha f(u) + \beta f(v)$.

Si f es convexa, para cada $[u, v] \subset |a, b|$ y cada $x \in (u, v)$ se cumple que $f(x) \leq r(x)$ donde $r(x) = f(u) + m(u, v)(x - u)$ es la función afín cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $(u, f(u)), (v, f(v))$. Como $x - u > 0$, la desigualdad $f(x) \leq r(x)$ adopta la forma $m(u, x) \leq m(u, v)$ luego f es convexa si y sólo si cumple [C1].

Análogamente, usando la expresión $r(x) = f(v) + m(u, v)(x - v)$, como $x - v < 0$, se llega a que la desigualdad $f(x) \leq r(x)$ adopta la forma $m(u, v) \leq m(x, v)$, luego f es convexa si y sólo si cumple [C2]. Si f es convexa, combinando [C1] con [C2], se obtiene que f cumple [C3].

Por otra parte, si f cumple [C3], también cumple [C4]: Sea $x = \alpha u + \beta v$, donde α, β son números positivos que cumplen $\alpha + \beta = 1$. Según la hipótesis

$$\begin{aligned}
0 \leq m(x, v) - m(u, x) &= \frac{f(v) - f(x)}{v - x} - \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \\
&= \frac{f(v) - f(x)}{\alpha(v - u)} - \frac{f(x) - f(u)}{\beta(v - u)} = \frac{\alpha f(u) + \beta f(v) - f(x)}{\alpha\beta(v - u)}
\end{aligned}$$

es decir, $f(\alpha u + \beta v) = f(x) \leq \alpha f(u) + \beta f(v)$.

Queda por demostrar que si f cumple [C4] entonces f es convexa: Todo $x \in (u, v)$, se puede representar en la forma $x = \alpha u + \beta v$, donde

$$\alpha = (v - x)/(v - u) > 0, \beta = (x - u)/(v - u) > 0$$

son números positivos que cumplen $\alpha + \beta = 1$. Según la hipótesis se cumple la desigualdad $f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha f(u) + \beta f(v)$ que escrita en la forma:

$$f(x) \leq f(u) + \beta(f(v) - f(u)) = f(u) + m(u, v)\beta(v - u) = f(u) + m(u, v)(x - u) = r(x)$$

pone de manifiesto que, para cada $[u, v] \subset |a, b|$, la recta que pasa por los puntos $(u, f(u)), (v, f(v))$, queda por encima de la gráfica de f , luego f es convexa.

Proposición 2.2.4 De acuerdo con Vera (2011), sea $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $x \in |a, b|$.

- [P1] Si $x < b$ la función $t \rightarrow m(x, t)$ es creciente en el intervalo $(x, b|$.
- [P2] Si $a < x$, la función $t \rightarrow m(x, t)$ es creciente en el intervalo $|a, x)$.
- [P3] Si $[s, t] \subset |a, b|$, $ys < x < t$, se cumple $m(s, x) \leq m(s, t) \leq m(x, t)$.

Proposición 2.2.5 Si $f : |a, b| \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa se cumple (Vera, 2011):

1. En cada $x \in (a, b)$ existen las derivadas laterales, $f'_i(x) \leq f'_d(x)$, y las funciones f'_i, f'_d son crecientes en (a, b) .
2. Las rectas tangentes por la izquierda y por la derecha a la gráfica de f en un punto genérico $(x, f(x))$, con $x \in (a, b)$, de ecuaciones

$$r_i(t) = f(x) + f'_i(x)(t - x), \quad r_d(t) = f(x) + f'_d(x)(t - x),$$

quedan por debajo de la gráfica de f , es decir $r_i(t) \leq f(t)$, y $r_d(t) \leq f(t)$ para todo $t \in (a, b)$.

Lema 2.1 Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces, f es convexa si y sólo si

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

para todo $x, y, z \in I$ tal que $x < z < y$.

Teorema 2.1 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función (Materano, 2015). Entonces f es convexa si y sólo si

$$f\left(\sum_{i=0}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^n t_i f(x_i) \quad (2.2)$$

para todo $x_i \in I, t_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ tales que $t_i + \dots + t_n = 1$.

Demostración. Para $n = 2$ la relación 2.2 es la desigualdad que define la convexidad clásica de f en 2.1. Suponga la desigualdad 2.2 para $i = n - 1$ por hipótesis inductiva. Se demostrará que se cumple para $i = n$, por lo que sin pérdida de generalidad, se considerará que $t_n < 1$, luego $1 - t_n > 0$ y entonces

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &= f(t_1 x_1 + \dots + t_{n-1} x_{n-1} + t_n x_n) \\ &= f\left((1 - t_n) \left(\frac{t_1 x_1 + \dots + t_{n-1} x_{n-1}}{1 - t_n}\right) + (t_n x_n)\right) \\ &= f\left((1 - t_n) \left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right) + t_n x_n\right) \\ &\leq (1 - t_n) f\left(\frac{t_1}{1 - t_n} x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1 - t_n} x_{n-1}\right) + t_n f(x_n) \\ &= (1 - t_n) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i x_i}{1 - t_n}\right). \end{aligned}$$

Por convexidad

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) &= f\left((1-t_n)\left(\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right) + t_n x_n\right) \\
&\leq (1-t_n)f\left(\frac{t_1}{1-t_n}x_1 + \dots + \frac{t_{n-1}}{1-t_n}x_{n-1}\right) + t_n f(x_n) \\
&= (1-t_n)f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i x_i}{1-t_n}\right)
\end{aligned}$$

por hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=0}^n t_i x_i\right) &= (1-t_n)f\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i x_i}{1-t_n}\right) \\
&\leq (1-t_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n}f(x_i) + t_n f(x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i) + t_n f(x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$f\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$$

2.2.3. Funciones m -convexas

Definición 2.11 La función $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $b > 0$, se dice que es m -convexa (Bakula, Ozdemir, y Pecaric, 2008) donde $m \in [0, 1]$, si cumple con que

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

para todo $x, y \in [0, b]$ y $t \in [0, 1]$. Se dice que f es m -cóncava si $-f$ es m -convexa.

Denótese por $K_m(b)$ la clase de todas las funciones m -convexas en $[0, b]$ para las cuales $f(0) \leq 0$.

Teorema 2.2 Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función m -convexa con $m \in (0, 1]$. Si $0 \leq a < b < \infty$ y $f \in L^1([a, b])$, entonces

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \min \left\{ \frac{f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2}, \frac{f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2} \right\}$$

Lema 2.2 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, donde $I \subset \mathbb{R}$, una función diferenciable en I , y $a, b \in I$, donde $a < b$. Si $f' \in L^1([a, b])$, entonces

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) f'(ta + (1-t)b) dt$$

Aquí, I denota el interior de I .

Teorema 2.3 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, donde $I \subset \mathbb{R}$, una aplicación diferenciable en I^0 , y $a, b \in I$, donde $a < b$. Si $|f'|^q$ es convexa en $[a, b]$ para algún $q \geq 1$, entonces

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

y

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 2.4 Sean $f, g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ funciones convexas en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, donde $a < b$. Entonces

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{3}M(a, b) + \frac{1}{6}N(a, b)$$

donde $M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$ and $N(a, b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$.

Teorema 2.5 Sea I un intervalo real abierto tal que $[0, \infty) \subset I$. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en I tal que $f' \in L^1([a, b])$, donde $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f'|^q$ es m -convexa en $[a, b]$ para algún $m \in (0, 1]$ y $q \in [1, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{4} \min \left\{ \left(\frac{|f'(a)|^q + m \left| f'\left(\frac{b}{m}\right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}, \left(\frac{m \left| f'\left(\frac{a}{m}\right) \right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Suponer que $q = 1$. Por el lema 2.2, se tiene que

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt. \quad (2.3)$$

Dado que $|f'|$ es m -convexa en $[a, b]$, sabemos que para cualquier $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |f'(ta + (1-t)b)| &= \left| f' \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right| \\ &\leq t |f'(a)| + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| \left[t |f'(a)| + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 \left[t |1-2t| |f'(a)| + m(1-t) |1-2t| \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \\ &= \frac{b-a}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left[t(1-2t) |f'(a)| + m(1-t)(1-2t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[t(2t-1) |f'(a)| + m(1-t)(2t-1) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \right\} \\ &= \frac{b-a}{8} \left(|f'(a)| + m \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right) \end{aligned}$$

Análogamente, se obtiene

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{8} \left(m \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| + |f'(b)| \right),$$

lo cual completa la prueba para este caso.

Suponer ahora que $q > 1$. Utilizando la conocida desigualdad de Hölder para q y $p = q/(q-1)$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \\ &= \int_0^1 |1-2t|^{1-\frac{1}{q}} |1-2t|^{\frac{1}{q}} |f'(ta + (1-t)b)| dt \\ &\leq \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dado que $|f'|^q$ es m -convexa en $[a, b]$, sabemos que para cada $t \in [0, 1]$

$$|f'(ta + (1-t)b)|^q \leq t|f'(a)|^q + m(1-t) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \quad (2.5)$$

por lo tanto, a partir de (2.3), (2.4) y (2.5), se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t| \left| f' \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \left[\frac{1}{4} \left(|f'(a)|^q + m \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right) \right]^{\frac{1}{q}} \\ & = \frac{b-a}{4} \left(\frac{m|f'(a)|^q + m \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

y análogamente

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{m \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}},$$

lo cual completa la prueba.

Teorema 2.6 Sea I un intervalo real abierto tal que $[0, \infty) \subset I$. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en I tal que $f' \in L^1([a, b])$, donde $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f'|^q$ es m -convexa en $[a, b]$ para algún valor fijo de $m \in (0, 1]$ y $q \in (1, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| & \leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\mu_1^{\frac{1}{q}} + \mu_2^{\frac{1}{q}} \right) \\ & \leq \frac{b-a}{4} \left(\mu_1^{\frac{1}{q}} + \mu_2^{\frac{1}{q}} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_1 & = \min \left\{ \frac{|f'(a)|^q + m \left| f' \left(\frac{a+b}{2m} \right) \right|^q}{2}, \frac{\left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q + m \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q}{2} \right\}, \\ \mu_2 & = \min \left\{ \frac{|f'(b)|^q + m \left| f' \left(\frac{a+b}{2m} \right) \right|^q}{2}, \frac{\left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|^q + m \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Si $|f'|^q$ es m -convexa, se tiene

$$\begin{aligned} 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt &\leq \mu_1, \\ 2 \int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt &\leq \mu_2, \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \\ &= \frac{b-a}{2} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t) |f'(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]. \end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Hölder para $q \in (1, \infty)$ y $p = q/(q-1)$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^{\frac{q}{q-1}} dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^{\frac{q}{q-1}} dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &\leq \frac{b-a}{4} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\mu_1^{\frac{1}{q}} + \mu_2^{\frac{1}{q}} \right) \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2t)^{\frac{q}{q-1}} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1)^{\frac{q}{q-1}} dt = \frac{q-1}{2(2q-1)}.$$

Esto completa la demostración de la primera desigualdad en (2.6). La segunda desigualdad en (2.6) se sigue del hecho de que

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{\frac{q-1}{q}} < 1, \quad q \in (1, \infty).$$

Teorema 2.7 Sea I un intervalo real abierto tal que $[0, \infty) \subset I$. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en I tal que $f' \in L^1([a, b])$, donde $0 \leq a < b < \infty$. Si $|f'|^q$ es (α, m) -convexa en $[a, b]$ para algún $\alpha, m \in (0, 1]$ y $q \in [1, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \min \left\{ \left(\nu_1 |f'(a)|^q + \nu_2 m \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \right. \\
& \quad \left. \left(\nu_1 |f'(b)|^q + \nu_2 m \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\alpha + \left(\frac{1}{2} \right)^\alpha \right] \\
\nu_2 &= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\frac{\alpha^2 + \alpha + 2}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^\alpha \right].
\end{aligned}$$

Demostración. Suponga que $q = 1$, se tiene

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt.$$

Dado que $|f'|$ es (α, m) -convexa en $[a, b]$, sabemos que para cualquier $t \in [0, 1]$

$$\left| f' \left(ta + m(1-t) \frac{b}{m} \right) \right| \leq t^\alpha |f'(a)| + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|$$

por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
& \leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| \left[t^\alpha |f'(a)| + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt \\
& = \frac{b-a}{2} \int_0^1 \left[t^\alpha |1-2t| |f'(a)| + m(1-t^\alpha) |1-2t| \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right] dt.
\end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^\alpha |1-2t| dt &= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\alpha + \left(\frac{1}{2} \right)^\alpha \right] = \nu_1 \\
\int_0^1 (1-t^\alpha) |1-2t| dt &= \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left[\frac{\alpha^2 + \alpha + 2}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^\alpha \right] = \nu_2
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \left(\nu_1 |f'(a)| + \nu_2 m \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right| \right).$$

De manera análoga, se obtiene

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \left(\nu_1 |f'(b)| + \nu_2 m \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right| \right),$$

lo cual completa la demostración para este caso.

Supongamos ahora que $q \in (1, \infty)$. De manera similar, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)| dt \\ \leq \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Dado que $|f'|^q$ es (α, m) -convexa en $[a, b]$, sabemos que para cada $t \in [0, 1]$

$$\left| f' \left(ta + m(1-t)\frac{b}{m} \right) \right|^q \leq t^\alpha |f'(a)|^q + m(1-t^\alpha) \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ \leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t| \left| f' \left(ta + m(1-t)\frac{b}{m} \right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ \leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\nu_1 |f'(a)|^q + \nu_2 m \left| f' \left(\frac{b}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

y análogamente

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\nu_1 |f'(b)|^q + \nu_2 m \left| f' \left(\frac{a}{m} \right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

lo que completa la prueba.

Definición 2.12 El mapeo $f : [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ se llama en forma de estrella generalizada si se cumple $f(tx) \leq t^\alpha f(x)$ para todo $x \in [0, b^*]$ y $t \in [0, 1]$ (Du y Wang, 2019).

Definición 2.13 Una función no diferenciable $f : R \rightarrow R^\alpha, x \rightarrow f(x)$ se llama localmente fraccional continua en x_0 , si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$$

se cumple para $|x - x_0| < \delta$, donde $\varepsilon, \delta \in R$. Si $f(x)$ es localmente fraccional continua en el intervalo (a, b) , se denota $f(x) \in C_\alpha(a, b)$. (Du y Wang, 2019).

Definición 2.14 La derivada fraccional local de $f(x)$ de orden α en $x = x_0$ se define como (Du y Wang, 2019).

$$f^{(\alpha)}(x_0) = \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\alpha (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^\alpha}$$

donde $\Delta^\alpha (f(x) - f(x_0)) = \Gamma(1 + \alpha) (f(x) - f(x_0))$.

Si existe $f^{((k+1)\alpha)}(x) = \overbrace{D_x^\alpha \cdots D_x^\alpha}^{k+1 \text{ veces}} f(x)$ para cualquier $x \in I \subseteq R$, entonces se denota $f \in D_{(k+1)\alpha}(I)$, donde $k = 0, 1, 2, \dots$

Definición 2.15 La integral fraccional local de la función $f(x)$ de orden α se define como (Du y Wang, 2019)

$$\begin{aligned} {}_a I_b^{(\alpha)} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_a^b f(t) (dt)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) (\Delta t_j)^\alpha, \end{aligned}$$

con $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ y $\Delta t = \max \{\Delta t_j \mid j = 1, 2, \dots, N-1\}$, donde $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \dots, N-1$, y $t_0 = a < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$.

Aquí, se sigue que ${}_a I_a^{(\alpha)} f(x) = 0$ si $a = b$ y ${}_a I_b^{(\alpha)} f(x) = -{}_b I_a^{(\alpha)} f(x)$ si $a < b$. Si, para cualquier $x \in [a, b]$, existe ${}_a I_x^{(\alpha)} f(x)$, entonces se denota $f(x) \in I_x^{(\alpha)}[a, b]$.

Definición 2.16 Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ dos funciones. Se dice que f y g están generalmente ordenadas de manera similar si $[f(x) - f(y)][g(x) - g(y)] \geq 0^\alpha$, para todo $x, y \in I$.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Introducción

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos de la investigación; los cuales hacen referencia al método, diseño, tipo, enfoque y procedimientos requeridos para el desarrollo de la misma.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño

El diseño que contempla esta investigación es el no experimental, ya que como lo plantea Hernández et al. (2014), las variables no se manipulan de forma intencionada. Según el tiempo de estudio, el diseño es transversal, el cual es definido por el mismo autor como aquel en el que se recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único.

3.2.2. Método

Este estudio se fundamentó en la aplicación del método analítico-deductivo, cuyo objetivo general fue analizar las funciones generalizadas m -convexas en conjuntos fractales. Espinoza (2020) describe el método analítico como una técnica de investigación que implica descomponer un todo en sus partes constituyentes con el fin de examinar sus causas, naturaleza y efectos. Además, se empleó un razonamiento deductivo en este estudio, el cual permitió establecer conclusiones significativas a partir de los hallazgos, facilitando así la verificación de los objetivos propuestos en esta investigación (Rodríguez et al., 2017).

3.2.3. Tipo

De acuerdo a las características, esta investigación es de tipo explicativa-descriptiva, ya que tuvo el interés de introducir, caracterizar y plantear demostraciones relativas a las funciones generalizadas m -convexas en conjuntos fractales (Ramos-Galarza, 2020).

3.2.4. Enfoque

Debido a que en este estudio no se busca medir las variables, el enfoque utilizado es el cualitativo, porque su desarrollo se basó en un análisis de las funciones m -convexas cuando estas se aplican a conjuntos fractales (Ortega, 2018). Además, este proyecto también adoptó un enfoque documental ya que fue preciso recurrir a documentación académica y científica para fundamentar la investigación sobre esta temática que relativamente ha sido poco estudiada en literatura matemática.

3.3. Procedimientos

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso de elaboración de este trabajo de investigación:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, acerca de las fundamentaciones, antecedentes y sustento conceptual de las funciones generalizadas m -convexas y la teoría de los conjuntos fractales.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos constitutivos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada del borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

La noción de m -convexidad surge como una generalización natural de la convexidad clásica. Mientras que en la convexidad se exige que una función tenga una curvatura no negativa en su dominio, en las funciones m -convexas se requiere que la función sea curvada hacia arriba en una dirección específica. En este capítulo, se establecen propiedades algebraicas y topológicas de las funciones generalizadas m -convexas definidas sobre conjuntos fractales, además de establecer caracterizaciones y demostraciones de desigualdades de las referidas funciones.

4.2. Propiedades algebraicas y topológicas de funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales

Los resultados que se mostrarán más adelante requieren primero establecer la definición planteada por Du y Wang (2019) de las funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

Una función $f : [0, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ se llama m -convexa generalizada (con $m \in [0, 1]$ fijo) si

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f(y)$$

se cumple para todo $x, y \in [0, b]$ y $t \in [0, 1]$.

En lo sucesivo, se utilizará la notación $I = [0, b]$ y se denotará la clase de todas las funciones m -convexas generalizadas en I como $GC_{\alpha, m}(I)$.

Lema 4.1 Si f es generalizada m -convexa, entonces también debe ser en forma de estrella generalizada.

Muchas propiedades que involucran funciones m -convexas se pueden aplicar a funciones generalizadas m -convexas, tal como la enunciada en el lema (4.1). En las siguientes proposiciones se muestran otras propiedades que vienen heredadas de las funciones m -convexas.

Proposición 4.2.1 Si $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ es m_2 -convexa generalizada y $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq 1$, entonces f es m_1 -convexa generalizada.

Demostración. Dado que f es una función m -convexa generalizada, entonces $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ con $0 \leq m \leq 1$, para todo $x, y \in [0, b]$ y todo $t \in [0, 1]$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f(y).$$

Dado que f es m_2 -convexa generalizada, se cumple:

$$f(tx + m_2(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m_2^\alpha(1-t)^\alpha f(y).$$

Para mostrar que f es m_1 -convexa generalizada, notar que si $0 \leq t \leq 1$, entonces también $0 \leq (1-t) \leq 1$. Ahora, como $0 \leq m_1 \leq m_2$, se tiene que $m_1 \cdot (1-t) \leq m_2 \cdot (1-t)$. Por lo tanto,

$$f(tx + m_1(1-t)y) \leq f(tx + m_2(1-t)y).$$

Luego, combinando las desigualdades anteriores, se obtiene:

$$f(tx + m_1(1-t)y) \leq f(tx + m_2(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m_2^\alpha(1-t)^\alpha f(y).$$

Puesto que $t^\alpha f(x) + m_1^\alpha(1-t)^\alpha f(y) \leq t^\alpha f(x) + m_2^\alpha(1-t)^\alpha f(y)$ y realizando operaciones entre estas desigualdades, se tiene que:

$$f(tx + m_1(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m_1^\alpha(1-t)^\alpha f(y).$$

Lo anterior indica que la función es m_1 convexa generalizada, lo cual termina la prueba.

Teorema 4.1 Sea $h : [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}$, $r : [0, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$, con rango $(h) \subseteq [0, b_1]$. Si h es m -convexa, r es generalizada m -convexa y r es creciente, entonces $r \circ h$ es generalizada m -convexa en $[0, b^*]$.

Demostración. Dado que h es m -convexa, se tiene la siguiente desigualdad para cualquier $x, y \in [0, b^*]$ y $t \in [0, 1]$:

$$h(tx + m(1-t)y) \leq t^m h(x) + m^m(1-t)^m h(y)$$

Dado que r es generalizada m -convexa, se cumple que para cualquier $u, v \in [0, b_1]$ y $t \in [0, 1]$:

$$\|r(tu + m(1-t)v) - r(u)\|^\alpha \leq t^\alpha \|r(u) - r(v)\|^\alpha + m^\alpha(1-t)^\alpha \|r(v) - r(u)\|^\alpha$$

Dado que r es creciente, $\|r(u) - r(v)\|^\alpha \leq \|u - v\|^\alpha$. Ahora, se considera $x, y \in [0, b^*]$ y $t \in [0, 1]$:

$$(r \circ h)(tx + m(1-t)y) = r(h(tx + m(1-t)y))$$

Usando la desigualdad de h para $h(tx + m(1-t)y)$, se obtiene:

$$(r \circ h)(tx + m(1-t)y) = r(h(tx + m(1-t)y)) \leq r(t^m h(x) + m^m(1-t)^m h(y))$$

Usando la desigualdad de r para $r(t^m h(x) + m^m(1-t)^m h(y))$, se tiene:

$$(r \circ h)(tx + m(1-t)y) \leq r(t^m h(x) + m^m(1-t)^m h(y)) \leq t^\alpha r(h(x)) + m^\alpha(1-t)^\alpha r(h(y))$$

Dado que $r(h(x))$ y $r(h(y))$ son números reales, se puede escribir:

$$t^\alpha r(h(x)) + m^\alpha(1-t)^\alpha r(h(y)) = t^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f(y)$$

donde $f(x) = r(h(x))$.

Por lo tanto, se ha probado que si h es m -convexa, r es generalizada m -convexa y r es creciente, entonces $r \circ h$ es generalizada m -convexa en $[0, b^*]$.

Proposición 4.2.2 Sea $h : [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ generalizada m -convexa en $[0, b^*]$ con $0 < m \leq 1$, y sea $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ una combinación convexa de puntos $x_i \in [0, b^*]$ con coeficientes $t_i \in [0, 1]$. Entonces $h(m \sum_{i=1}^n t_i x_i) \leq m^\alpha \sum_{i=1}^n t_i^\alpha h(x_i)$.

Demostración. Para demostrar la desigualdad deseada se procederá por inducción. Para $n = 2$, se tienen dos puntos $x_1, x_2 \in [0, b^*]$ y sus respectivos coeficientes de combinación convexa $t_1, t_2 \in [0, 1]$. La combinación convexa se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^2 t_i x_i = t_1 x_1 + t_2 x_2$$

Dado que h es generalizada m -convexa en $[0, b^*]$, se tiene que:

$$h(t_1x_1 + t_2x_2) \leq t_1^\alpha h(x_1) + t_2^\alpha h(x_2)$$

Ahora, considerando la combinación convexa de $h(m \sum_{i=1}^2 t_i x_i)$:

$$h(m(t_1x_1 + t_2x_2))$$

Usando la desigualdad anterior y el hecho de que $m \leq 1$, se puede establecer que

$$\begin{aligned} h(m(t_1x_1 + t_2x_2)) &\leq m^\alpha(t_1^\alpha h(x_1) + t_2^\alpha h(x_2)) \\ &= m^\alpha t_1^\alpha h(x_1) + m^\alpha t_2^\alpha h(x_2) \\ &= \sum_{i=1}^2 m^\alpha t_i^\alpha h(x_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la desigualdad se cumple para $n = 2$.

Ahora se asumirá que se cumple la desigualdad para $n = k$, es decir: $h(m \sum_{i=1}^k t_i x_i) \leq m^\alpha \sum_{i=1}^k t_i^\alpha h(x_i)$. Se demostrará entonces que la desigualdad también se cumple para $n = k + 1$.

Considerando el lado izquierdo de la desigualdad que se desea demostrar:

$$h(m \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i)$$

Este término puede ser reescrito como:

$$h(m \sum_{i=1}^k t_i x_i + m t_{k+1} x_{k+1})$$

Se utilizará la desigualdad dada para los primeros k términos:

$$h(m \sum_{i=1}^k t_i x_i) \leq m^\alpha \sum_{i=1}^k t_i^\alpha h(x_i)$$

También se utilizará la desigualdad dada para el caso $k = 1$:

$$h(m t_1 x_1) \leq m^\alpha t_1^\alpha h(x_1)$$

Se sumarán ambas desigualdades multiplicadas por t_{k+1}^α :

$$t_{k+1}^\alpha h(m \sum_{i=1}^k t_i x_i) + t_{k+1}^\alpha h(m t_1 x_1) \leq t_{k+1}^\alpha m^\alpha \sum_{i=1}^k t_i^\alpha h(x_i) + t_{k+1}^\alpha m^\alpha t_1^\alpha h(x_1)$$

Lo cual resulta en:

$$h(t_{k+1}^\alpha m \sum_{i=1}^k t_i x_i) + h(t_{k+1}^\alpha m t_1 x_1) \leq m^\alpha t_{k+1}^\alpha \sum_{i=1}^k t_i^\alpha h(x_i) + m^\alpha t_{k+1}^\alpha t_1^\alpha h(x_1)$$

Se utiliza la desigualdad triangular para la función h :

$$h(t_{k+1}^\alpha m \sum_{i=1}^k t_i x_i + t_{k+1}^\alpha m t_1 x_1) \leq m^\alpha t_{k+1}^\alpha \sum_{i=1}^k t_i^\alpha h(x_i) + m^\alpha t_{k+1}^\alpha t_1^\alpha h(x_1)$$

En el lado izquierdo de la desigualdad, se tiene:

$$h(t_{k+1}^\alpha m \sum_{i=1}^k t_i x_i + t_{k+1}^\alpha m t_1 x_1) = h(m \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i)$$

Y en el lado derecho, se tiene:

$$m^\alpha t_{k+1}^\alpha \sum_{i=1}^k t_i^\alpha h(x_i) + m^\alpha t_{k+1}^\alpha t_1^\alpha h(x_1) = m^\alpha \sum_{i=1}^{k+1} t_i^\alpha h(x_i)$$

Por lo tanto, se ha demostrado que:

$$h(m \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i) \leq m^\alpha \sum_{i=1}^{k+1} t_i^\alpha h(x_i)$$

Basado en la desigualdad dada para k , se ha probado que se cumple para $k + 1$.

Por lo tanto, la desigualdad se cumple para cualquier valor de k .

Teorema 4.2 Si $f \in GC_{\alpha, m_1}(I)$ y $g \in GC_{\alpha, m_2}(I)$, con $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq 1$, entonces $f + g \in GC_{\alpha, m_1}(I)$.

Demostración. Dado que $g \in GC_{\alpha, m_2}(I)$ y $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq 1$, por la propiedad (4.2.1), se tiene que $g \in GC_{\alpha, m_1}(I)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & (f+g)(tx + m_1(1-t)y) \\ &= f(tx + m_1(1-t)y) + g(tx + m_1(1-t)y) \\ &\leq t^\alpha f(x) + m_1^\alpha (1-t)^\alpha f(y) + t^\alpha g(x) \\ &\quad + m_1^\alpha (1-t)^\alpha g(y) \\ &= t^\alpha (f(x) + g(x)) + m_1^\alpha (1-t)^\alpha (f(y) + g(y)) \\ &= t^\alpha (f+g)(x) + m_1^\alpha (1-t)^\alpha (f+g)(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f + g \in GC_{\alpha, m_1}(I)$.

Teorema 4.3 Si $f, g \in GC_{\alpha, m}(I)$ están generalizadamente ordenadas de manera similar y no negativas, entonces $fg \in GC_{\alpha, m}(I)$ para todo $m, t \in [0, 1]$.

Demostración. Si $x, y \in I, m, t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned}
(fg)(tx + m(1-t)y) &= f(tx + m(1-t)y)g(tx + m(1-t)y) \\
&\leq [t^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f(y)][t^\alpha g(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha g(y)] \\
&= t^{2\alpha} f(x)g(x) + t^\alpha m^\alpha(1-t)^\alpha f(x)g(y) + t^\alpha m^\alpha(1-t)^\alpha f(y)g(x) \\
&\quad + m^\alpha m^\alpha(1-t)^\alpha(1-t)^\alpha f(y)g(y) \\
&= t^{2\alpha} f(x)g(x) + t^\alpha m^\alpha(1-t)^\alpha [f(x)g(y) \\
&\quad + f(y)g(x)] + m^\alpha(1-t)^\alpha m^\alpha(1-t)^\alpha \times f(y)g(y) \\
&\leq t^{2\alpha} f(x)g(x) + t^\alpha m^\alpha(1-t)^\alpha \\
&\quad \times [f(x)g(x) + f(y)g(y)] + m^\alpha(1-t)^\alpha \times m^\alpha(1-t)^\alpha f(y)g(y) \\
&= t^\alpha [t^\alpha + m^\alpha(1-t)^\alpha] (fg)(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha \\
&\quad \times [t^\alpha + m^\alpha(1-t)^\alpha] (fg)(y) \\
&\leq t^\alpha [t^\alpha + (1-t)^\alpha] (fg)(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha \times [t^\alpha + (1-t)^\alpha] (fg)(y) \\
&\leq t^\alpha (fg)(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha (fg)(y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $fg \in GC_{\alpha, m}(I)$.

4.3. Caracterización de las funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales

Teorema 4.4 Si $f \in GC_{\alpha, m}(I)$, entonces $\lambda^\alpha f \in GC_{\alpha, m}(I)$, con $\lambda \in \mathbb{R}^+$

Demostración. Si $x, y \in [0, b]$ y $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned}
(\lambda^\alpha f)(tx + m(1-t)y) &= \lambda^\alpha f(tx + m(1-t)y) \\
&\leq \lambda^\alpha (t^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f(y)) \\
&= t^\alpha \lambda^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha \lambda^\alpha f(y) \\
&= t^\alpha (\lambda^\alpha f)(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha (\lambda^\alpha f)(y).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda^\alpha f \in GC_{\alpha, m}(I)$.

Teorema 4.5 Si $f, g \in GC_{\alpha, m}(I)$, entonces $h : I \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ definida por

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

también es una función generalizada m -convexa.

Demostración. Sean $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq t^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f(y) \\ &\leq t^\alpha h(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha h(y) \end{aligned} \tag{4.1}$$

y

$$\begin{aligned} g(tx + (1-t)y) &\leq t^\alpha g(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha g(y) \\ &\leq t^\alpha h(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha h(y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

De las desigualdades (4.1) y (4.2), se obtiene:

$$\begin{aligned} h(tx + (1-t)y) &= \max\{f(tx + (1-t)y), g(tx + (1-t)y)\} \\ &\leq t^\alpha h(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha h(y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h \in GC_{\alpha, m}(I)$.

Teorema 4.6 Si $(f_n)_n$ es una sucesión en $GC_{\alpha, m}(I)$ que converge puntualmente a f , entonces $f \in GC_{\alpha, m}(I)$.

Demostración. Sean $x, y \in I$, $t \in [0, 1]$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(tx + m(1-t)y) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} [t^\alpha f_n(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f_n(y)] \\ &= t^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) \\ &= t^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f(y) \end{aligned}$$

lo cual implica que $f \in GC_{\alpha, m}(I)$.

Teorema 4.7 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ y $m \in (0, 1]$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Para todo $x, y \in I$ tales que $x \neq my$ y para cada $t \in [0, 1]$, se cumple la desigualdad

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m^\alpha(1-t)^\alpha f(y)$$

2. Para todo $x, y, z \in I$ tales que $x \neq my$ y $z \in \text{Conv}\{x, my\}$, se cumple la desigualdad

$$f(z) \leq \left(\frac{my - z}{my - x} \right)^\alpha f(x) + m^\alpha \left(\frac{z - x}{my - x} \right)^\alpha \times f(y)$$

- 3.

$$\begin{vmatrix} x^\alpha & f(x) & 1^\alpha \\ z^\alpha & f(z) & 1^\alpha \\ m^\alpha y^\alpha & m^\alpha f(y) & 1^\alpha \end{vmatrix} \geq 0^\alpha$$

siempre que $x, y, z \in I$ con $x < my$ y $x \leq z \leq my$; y

$$\begin{vmatrix} 1^\alpha & f(x) & x^\alpha \\ 1^\alpha & f(z) & z^\alpha \\ 1^\alpha & m^\alpha f(y) & m^\alpha y^\alpha \end{vmatrix} \geq 0^\alpha$$

siempre que $x, y, z \in I$ con $x > my$ y $my \leq z \leq x$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Tomando $x, y, z \in I$ tal que $x \neq my$ y $z \in \text{Conv}\{x, my\}$.

Sea $t = \frac{my-z}{my-x}$ se puede escribir el punto z como la combinación convexa $z = tx + (1-t)my$, es decir,

$$z = \frac{my - z}{my - x}x + \frac{z - x}{my - x}my.$$

Por lo tanto, por hipótesis, se tiene que $f(z) \leq \left(\frac{my-z}{my-x} \right)^\alpha f(x) + m^\alpha \left(\frac{z-x}{my-x} \right)^\alpha f(y)$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Si $x, y, z \in I$ son tales que $x < my$ y $x \leq z \leq my$, entonces multiplicando la desigualdad dada en (2) por $(my - x)^\alpha > 0^\alpha$, se obtiene que

$$(my - x)^\alpha f(z) \leq (my - z)^\alpha f(x) + m^\alpha (z - x)^\alpha f(y),$$

lo cual implica que

$$x^\alpha [f(z) - m^\alpha f(y)] + z^\alpha [m^\alpha f(y) - f(x)] + (my)^\alpha [f(x) - f(z)] \geq 0^\alpha;$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} x^\alpha & f(x) & 1^\alpha \\ z^\alpha & f(z) & 1^\alpha \\ m^\alpha y^\alpha & m^\alpha f(y) & 1^\alpha \end{vmatrix} \geq 0^\alpha.$$

De manera similar, si $x, y, z \in I$ son tales que $x > my$ y $my \leq z \leq x$, entonces multiplicando la desigualdad dada en (2) por $(my - x)^\alpha < 0^\alpha$, se obtiene que

$$(my - x)^\alpha f(z) \geq (my - z)^\alpha f(x) + m^\alpha (z - x)^\alpha f(y),$$

lo cual implica que

$$(my)^\alpha [f(z) - f(x)] + x^\alpha [m^\alpha f(y) - f(z)] + z^\alpha [f(x) - m^\alpha f(y)] \geq 0^\alpha;$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} 1^\alpha & f(x) & x^\alpha \\ 1^\alpha & f(z) & z^\alpha \\ 1^\alpha & m^\alpha f(y) & m^\alpha y^\alpha \end{vmatrix} \geq 0^\alpha.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $x, y \in I$ tal que $x \neq my$ y $t \in [0, 1]$. Sea la combinación convexa de x y my dada por $z = tx + m(1 - t)y$. Se plantean dos casos.

a) Caso 1: $x < my$.

b) Caso 2: $x > my$.

En el Caso 1, aplicando la desigualdad $x^\alpha [f(z) - m^\alpha f(y)] + z^\alpha [m^\alpha f(y) - f(x)] + (my)^\alpha [f(x) - f(z)] \geq 0^\alpha$ al orden $x \leq z \leq my$ sustituyendo z por $tx + m(1 - t)y$, se obtiene que

$$(my - x)^\alpha f(tx + m(1 - t)y) \leq t^\alpha (my - x)^\alpha f(x) + (my - x)^\alpha m^\alpha (1 - t)^\alpha f(y).$$

Entonces, dividiendo por $my - x$, se sigue que $f(tx + m(1 - t)y) \leq t^\alpha f(x) + m^\alpha (1 - t)^\alpha f(y)$.

En el Caso 2, aplicando la desigualdad $(my)^\alpha[f(z) - f(x)] + x^\alpha[m^\alpha f(y) - f(z)] + z^\alpha[f(x) - m^\alpha f(y)] \geq 0^\alpha$ al orden $my \leq z \leq x$ sustituyendo z por $tx + m(1-t)y$, se obtiene que

$$(x - my)^\alpha f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha (x - my)^\alpha f(x) + (x - my)^\alpha m^\alpha (1-t)^\alpha f(y).$$

Luego, dividiendo por $x - my$, se concluye que $f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m^\alpha (1-t)^\alpha f(y)$.

Teorema 4.8 Sea $m \in (0, 1]$. Para $x, y, z \in [0, +\infty)$ y $t \in [0, 1]$, se consideran las siguientes afirmaciones:

1. $f \in GC_{\alpha, m}[0, +\infty)$.
2. $f(mx + t(y - mx)) \leq m^\alpha f(x) + t^\alpha (f(y) - m^\alpha f(x))$.
3. $f(ty + sx) \leq t^\alpha f(y) + s^\alpha f(x)$ si $s = m(1-t)$.
4.
$$\begin{vmatrix} x^\alpha & -f(x) & 1^\alpha \\ y^\alpha & -m^\alpha f\left(\frac{y}{m}\right) & 1^\alpha \\ z^\alpha & -f(z) & 1^\alpha \end{vmatrix} = (y-z)^\alpha f(x) + m^\alpha (z-x)^\alpha f\left(\frac{y}{m}\right) - (y-x)^\alpha f(z) \geq 0^\alpha$$
 siempre que $x < z < y$.
5.
$$\frac{f(x)}{(z-x)^\alpha (y-x)^\alpha} + \frac{m^\alpha f\left(\frac{y}{m}\right)}{(y-z)^\alpha (y-x)^\alpha} - \frac{f(z)}{(y-z)^\alpha (z-x)^\alpha} \geq 0^\alpha$$
 siempre que $x < z < y$.

Entonces $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$.

Demostración. Las demostraciones de $(1) \Leftrightarrow (2)$ y $(2) \Leftrightarrow (3)$ son directas. $(3) \Rightarrow (4)$. Dado que $x < z < y$, existe $t \in [0, 1]$ tal que $z = tx + (1-t)y$, lo cual implica que $t = \frac{y-z}{y-x}$ y $1-t = \frac{z-x}{y-x}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(tx + (1-t)y) = f\left(tx + m(1-t)\frac{y}{m}\right) \\ &\leq t^\alpha f(x) + m^\alpha (1-t)^\alpha f\left(\frac{y}{m}\right) \\ &\leq \left(\frac{y-z}{y-x}\right)^\alpha f(x) + m^\alpha \left(\frac{z-x}{y-x}\right)^\alpha f\left(\frac{y}{m}\right). \end{aligned}$$

Multiplicando por $(y - x)^\alpha$ y reorganizando, se tiene que

$$\begin{aligned} & (y - z)^\alpha f(x) + m^\alpha (z - x)^\alpha f\left(\frac{y}{m}\right) - (y - x)^\alpha f(z) \\ & \geq 0^\alpha. \end{aligned}$$

Dado que

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x^\alpha & -f(x) & 1^\alpha \\ y^\alpha & -m^\alpha f\left(\frac{y}{m}\right) & 1^\alpha \\ z^\alpha & -f(z) & 1^\alpha \end{vmatrix} \\ & = (y - z)^\alpha f(x) + m^\alpha (z - x)^\alpha f\left(\frac{y}{m}\right) \\ & \quad - (y - x)^\alpha f(z), \end{aligned}$$

esto concluye que se cumple (4).

(4) $\Rightarrow$ (5). Se obtiene dividiendo (4) por $(y - z)^\alpha (z - x)^\alpha (y - x)^\alpha$.

(5) $\Rightarrow$ (4). Se obtiene multiplicando (5) por $(y - z)^\alpha (z - x)^\alpha (y - x)^\alpha$.

4.4. Demostraciones de desigualdades que involucran funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales

En esta sección se presentan demostraciones de diversas desigualdades planteadas en términos del cálculo fraccionario, y cuyas funciones m-convexas generalizadas están definidas sobre conjuntos fractales.

Teorema 4.9 Sean $a, b, c \in [0, +\infty)$ tales que $a < b$ y $a \leq mc \leq b$. Si $f \in GC_\alpha^m[0, +\infty)$ para $m \in (0, 1]$ y $f \in I_x^{(\alpha)}[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} {}_a I_b^{(\alpha)} f(x) & \leq \left[m^\alpha c^\alpha \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} - \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} (mc - a)^\alpha \right] \times f(a) \\ & \quad + \left[\frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} (b - mc)^\alpha - m^\alpha c^\alpha \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \right] \times f(b) \\ & \quad + (b - a)^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} - \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \right] \times m^\alpha f(c). \end{aligned}$$

Demostración. Sea $x \in [a, mc]$ con $a < mc$. Luego, escribiendo x como la combinación convexa

$$x = \frac{mc - x}{mc - a} a + m \frac{x - a}{mc - a} c$$

y utilizando la m -convexidad generalizada de f , se tiene

$$f(x) = f\left(\frac{mc-x}{mc-a}a + m\frac{x-a}{mc-a}c\right) \leq \left(\frac{mc-x}{mc-a}\right)^\alpha f(a) + \left(\frac{x-a}{mc-a}\right)^\alpha m^\alpha f(c). \quad (4.3)$$

Ordenando la desigualdad obtenida en (4.3) e integrando con respecto a $x \in [a, mc]$, se obtiene que

$$\begin{aligned} {}_a I_{mc}^{(\alpha)} f(x) &\leq \left(\frac{1}{mc-a}\right)^\alpha f(a) {}_a I_{mc}^{(\alpha)} (mc-x)^\alpha + \left(\frac{1}{mc-a}\right)^\alpha m^\alpha f(c) {}_a I_{mc}^{(\alpha)} (x-a)^\alpha \\ {}_a I_{mc}^{(\alpha)} f(x) &\leq \left(\frac{1}{mc-a}\right)^\alpha f(a) \left[m^\alpha c^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \times (mc-a)^\alpha - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} (mc-a)^{2\alpha} \right] \\ &\quad + \left(\frac{1}{mc-a}\right)^\alpha m^\alpha f(c) \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \times (mc-a)^{2\alpha} - a^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} (mc-a)^\alpha \right] \\ {}_a I_{mc}^{(\alpha)} f(x) &\leq f(a) \left[m^\alpha c^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} (mc-a)^\alpha \right] \\ &\quad + m^\alpha f(c) \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} (mc-a)^\alpha - a^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \right] \end{aligned}$$

lo cual también se cumple para $a = mc$. Aplicando un argumento similar para $x \in [mc, b]$ con $mc < b$ con $x = \frac{x-mc}{b-mc}b + \frac{b-x}{b-mc}mc$, se obtiene que

$$\begin{aligned} mc I_b^{(\alpha)} f(x) &\leq f(b) \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} (b-mc)^\alpha - m^\alpha c^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \right] + m^\alpha f(c) \\ &\quad \times \left[b^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} (b-mc)^\alpha \right]. \end{aligned}$$

Dado que ${}_a I_b^{(\alpha)} f(x) = {}_a I_{mc}^{(\alpha)} f(x) + mc I_b^{(\alpha)} f(x)$, sumando las desigualdades anteriores para concluir que

$$\begin{aligned} {}_a^{(\alpha)} f(x) &\leq f(a) \left[m^\alpha c^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \times (mc-a)^\alpha \right] \\ &\quad + f(b) \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \times (b-mc)^\alpha - m^\alpha c^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \right] \\ &\quad \times m^\alpha f(c) (b-a)^\alpha \times \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \right], \end{aligned}$$

lo cual completa la prueba.

Teorema 4.10 Sea $t_1, t_2, \dots, t_n > 0, T_n = \sum_{i=1}^n t_i$ y si $f \in GC_\alpha^m[0, +\infty)$, con $m \in (0, 1]$, entonces

$$f\left(\frac{1}{T_n} \sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \frac{1^\alpha}{T_n^\alpha} \sum_{i=1}^n m^{(n-i)\alpha} t_i^\alpha f\left(\frac{x_i}{m^{n-i}}\right),$$

para todo $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, +\infty)$.

Demostración. Esta demostración será realizada por inducción sobre n . Cuando $n = 2$, Se tiene que

$$f\left(\frac{1}{T_2} \sum_{i=1}^2 t_i x_i\right) = f\left(\frac{1}{T_2} (t_1 x_1 + t_2 x_2)\right) = f\left(\frac{t_2}{T_2} x_2 + m \frac{t_1}{T_2} \frac{x_1}{m}\right)$$

de donde se sigue que

$$f\left(\frac{t_2}{T_2} x_2 + m \frac{t_1}{T_2} \frac{x_1}{m}\right) = f\left(\frac{t_2}{T_2} x_2 + m \left(1 - \frac{t_2}{T_2}\right) \frac{x_1}{m}\right)$$

dado que es m -convexa generalizada,

$$f\left(\frac{t_2}{T_2} x_2 + m \left(1 - \frac{t_2}{T_2}\right) \frac{x_1}{m}\right) \leq \left(\frac{t_2}{T_2}\right)^\alpha f(x_2) + m^\alpha \left(1 - \frac{t_2}{T_2}\right)^\alpha f\left(\frac{x_1}{m}\right)$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{t_2}{T_2} x_2 + m \left(1 - \frac{t_2}{T_2}\right) \frac{x_1}{m}\right) &\leq \left(\frac{t_2}{T_2}\right)^\alpha f(x_2) + m^\alpha \left(1 - \frac{t_2}{T_2}\right)^\alpha f\left(\frac{x_1}{m}\right) \\ &= \left(\frac{t_2}{T_2}\right)^\alpha f(x_2) + m^\alpha \left(\frac{t_1}{T_2}\right)^\alpha f\left(\frac{x_1}{m}\right) \\ &= \frac{1^\alpha}{T_2^\alpha} \left(m^0 t_2^\alpha f\left(\frac{x_2}{m^0}\right) + m^\alpha t_1^\alpha f\left(\frac{x_1}{m}\right)\right) \\ &= \frac{1^\alpha}{T_2^\alpha} \sum_{i=1}^2 m^{(2-i)\alpha} t_i^\alpha f\left(\frac{x_i}{m^{2-i}}\right). \end{aligned}$$

Ahora, se asumirá que para $n = k$ la desigualdad también es verdadera, es decir, para cualquier $x_i \in [0, +\infty)$ y $t_i > 0$ ($i = 1, \dots, k$) con $T_k = \sum_{i=1}^k t_i$, se tiene que

$$f\left(\frac{1}{T_k} \sum_{i=1}^k t_i x_i\right) \leq \frac{1^\alpha}{T_k^\alpha} \sum_{i=1}^k m^{(k-i)\alpha} t_i^\alpha f\left(\frac{x_i}{m^{k-i}}\right).$$

Ahora se procederá a probar que la desigualdad es verdadera cuando $n = k + 1$. Si $x_i \in [0, +\infty)$ y $t_i > 0$ ($i = 1, \dots, k + 1$) con $T_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} t_i$, entonces

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{T_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i\right) &= f\left(\frac{1}{T_{k+1}} \left(\sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i + t_{k+1} x_{k+1}\right)\right) \\
&= f\left(\frac{t_{k+1}}{T_{k+1}} x_{k+1} + m \frac{T_k}{T_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{t_i}{T_k} \frac{x_i}{m}\right) \\
&= f\left(\frac{t_{k+1}}{T_{k+1}} x_{k+1} + m \left(1 - \frac{t_{k+1}}{T_{k+1}}\right) \sum_{i=1}^{k+1} \frac{t_i}{T_k} \frac{x_i}{m}\right) \\
&\leq \left(\frac{t_{k+1}}{T_{k+1}}\right)^\alpha f(x_{k+1}) + m^\alpha \frac{T_k^\alpha}{T_{k+1}^\alpha} f\left(\frac{1}{T_k} \sum_{i=1}^{k+1} t_i \left(\frac{x_i}{m}\right)\right)
\end{aligned}$$

Dado que la hipótesis inductiva implica que

$$f\left(\frac{1}{T_k} \sum_{i=1}^k t_i \left(\frac{x_i}{m}\right)\right) \leq \frac{1^\alpha}{T_k^\alpha} \sum_{i=1}^k m^{(k-i)\alpha} t_i^\alpha f\left(\frac{x_i}{m^{k+1-i}}\right)$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{T_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i\right) &\leq \frac{t_{k+1}^\alpha}{T_{k+1}^\alpha} f(x_{k+1}) + m^\alpha \frac{T_k^\alpha}{T_{k+1}^\alpha} \frac{1^\alpha}{T_k^\alpha} \times \sum_{i=1}^k m^{(k-i)\alpha} t_i^\alpha f\left(\frac{x_i}{m^{k+1-i}}\right) \\
&= \frac{1^\alpha}{T_{k+1}^\alpha} \left(t_{k+1}^\alpha f(x_{k+1}) + \sum_{i=1}^k m^{(k+1-i)\alpha} t_i^\alpha f\left(\frac{x_i}{m^{k+1-i}}\right)\right) \\
&= \frac{1^\alpha}{T_{k+1}^\alpha} \sum_{i=1}^{k+1} m^{(k+1-i)\alpha} t_i^\alpha f\left(\frac{x_i}{m^{k+1-i}}\right).
\end{aligned}$$

Teorema 4.11 Sea $m \in (0, 1]$ y $0 \leq a < b < +\infty$. Si $f, g \in GC_\alpha^m[0, +\infty)$ son no negativas y $fg \in I_x^{(\alpha)}[a, b]$, entonces

$$\frac{1^\alpha}{(b-a)^\alpha} I_b^{(\alpha)}(fg)(x) \leq \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} A + \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] m^\alpha B$$

donde $A = (fg)(a) + m^{2\alpha}(fg)\left(\frac{b}{m}\right)$ y $B = f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a)$.

Demostración. Dado que $f, g \in GC_\alpha^m[0, +\infty)$ son no negativas, se tiene que

$$\begin{aligned}
f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b) &= f\left(ta + m(1-t)\frac{b}{m}\right)g\left(ta + m(1-t)\frac{b}{m}\right) \\
&\leq \left[t^\alpha f(a) + m^\alpha(1-t)^\alpha f\left(\frac{b}{m}\right)\right] \\
&\quad \times \left[t^\alpha g(a) + m^\alpha(1-t)^\alpha g\left(\frac{b}{m}\right)\right] \\
&= t^{2\alpha}(fg)(a) + m^\alpha t^\alpha(1-t)^\alpha \\
&\quad \times \left[f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a)\right] \\
&\quad + m^{2\alpha}(1-t)^{2\alpha}(fg)\left(\frac{b}{m}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, integrando con respecto a t en $[0, 1]$ y aplicando la técnica del cambio de variable para integrales locales fraccionarias de orden α , se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1^\alpha}{(b-a)^\alpha} I_b^{(\alpha)} f(x)g(x) &\leq \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}(fg)(a) + m^\alpha \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] \\
&\quad \times \left[f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a) \right] \\
&\quad + m^{2\alpha} \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} (fg)\left(\frac{b}{m}\right) \\
&= \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \left[(fg)(a) + m^{2\alpha}(fg)\left(\frac{b}{m}\right) \right] \\
&\quad + m^\alpha \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] \\
&\quad \times \left[f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a) \right]
\end{aligned}$$

Aquí tienes las ecuaciones alineadas:

$$\begin{aligned}
\frac{1^\alpha}{(b-a)^\alpha} I_b^{(\alpha)} f(x)g(x) &\leq \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}(fg)(a) + m^\alpha \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] \\
&\quad \times \left[f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a) \right] + m^{2\alpha} \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} (fg)\left(\frac{b}{m}\right) \\
&= \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \left[(fg)(a) + m^{2\alpha}(fg)\left(\frac{b}{m}\right) \right] \\
&\quad + m^\alpha \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] \times \left[f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a) \right]
\end{aligned}$$

Teorema 4.12 Sea $m \in (0, 1]$ y $0 \leq a < b < +\infty$. Si $f, g \in GC_\alpha^m[0, +\infty)$ son no negativas y $fg \in I_x^{(\alpha)}[a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1^\alpha}{(b-a)^\alpha} {}^a I_b^{(\alpha)}(fg)(x) &\geq \frac{4^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(fg)\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}m^\alpha \times (C + m^{2\alpha}E) \\ &\quad - \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] m^{2\alpha}D \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} C &= f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a) + m^\alpha(fg)\left(\frac{b}{m}\right) \\ D &= f(a)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + 2^\alpha(fg)\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g(a) + m^\alpha \left[f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g\left(\frac{b}{m}\right) \right] \\ E &= f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g\left(\frac{b}{m}\right) + m^\alpha(fg)\left(\frac{a}{m^2}\right) \end{aligned}$$

Demostración. Dado que $a + b = ta + (1-t)b + tb + (1-t)a$, y denotando $W = f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ se tiene

$$\begin{aligned} W &= f\left(\frac{1}{2}(ta + (1-t)b) + m\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \\ &\quad \times g\left(\frac{1}{2}(ta + (1-t)b) + m\left(1 - \frac{1}{2}\right)\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \left[f(ta + (1-t)b) + m^\alpha f\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \right] \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \left[g(ta + (1-t)b) + m^\alpha g\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \right] \end{aligned}$$

de donde sigue que

$$\begin{aligned} W &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^\alpha f(ta + (1-t)b)g\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^\alpha f\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right)g(ta + (1-t)b) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^{2\alpha} f\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \times g\left(\frac{tb + (1-t)a}{m}\right) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
W &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^\alpha f\left(ta + m(1-t)\frac{b}{m}\right) \times g\left(t\frac{b}{m} + m(1-t)\frac{a}{m^2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^\alpha f \times \left(t\frac{b}{m} + m(1-t)\frac{a}{m^2}\right) g\left(ta + m(1-t)\frac{b}{m}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^{2\alpha} f\left(t\frac{b}{m} + m(1-t)\frac{a}{m^2}\right) \times g\left(t\frac{b}{m} + m(1-t)\frac{a}{m^2}\right)
\end{aligned}$$

de aquí se deduce

$$\begin{aligned}
W &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^\alpha \times \left[t^\alpha f(a) + m^\alpha(1-t)^\alpha f\left(\frac{b}{m}\right)\right] \times \left[t^\alpha g\left(\frac{b}{m}\right) + m^\alpha(1-t)^\alpha g\left(\frac{a}{m^2}\right)\right] \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^\alpha \times \left[t^\alpha f\left(\frac{b}{m}\right) + m^\alpha(1-t)^\alpha f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right] \times \left[t^\alpha g(a) + m^\alpha(1-t)^\alpha g\left(\frac{b}{m}\right)\right] \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^{2\alpha} \times \left[t^\alpha f\left(\frac{b}{m}\right) + m^\alpha(1-t)^\alpha f\left(\frac{a}{m^2}\right)\right] \times \left[t^\alpha g\left(\frac{b}{m}\right) + m^\alpha(1-t)^\alpha g\left(\frac{a}{m^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

lo cual permite establecer

$$\begin{aligned}
W &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b) \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^\alpha \left[f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a) + m^\alpha f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right] \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^{2\alpha} \times \left[f(a)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + 2^\alpha f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g(a)\right] \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^{2\alpha}m^\alpha \times \left[f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right] \times t^\alpha(1-t)^\alpha \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^{3\alpha} \times \left[f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right] \times (1-t)^{2\alpha} \\
&\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha m^{3\alpha}m^\alpha f\left(\frac{a}{m^2}\right) \times g\left(\frac{a}{m^2}\right)(1-t)^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Considerando,

$$\begin{aligned}
C &= f(a)g\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)g(a) + m^\alpha(fg)\left(\frac{b}{m}\right) \\
D &= f(a)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + 2^\alpha(fg)\left(\frac{b}{m}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g(a) + m^\alpha \left[f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g\left(\frac{b}{m}\right)\right] \\
E &= f\left(\frac{b}{m}\right)g\left(\frac{a}{m^2}\right) + f\left(\frac{a}{m^2}\right)g\left(\frac{b}{m}\right) + m^\alpha(fg)\left(\frac{a}{m^2}\right)
\end{aligned}$$

e integrando con respecto a t en $[0, 1]$ y aplicando la técnica del cambio de variable para integrales locales fraccionarias de orden α , se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{1^\alpha}{(b-a)^\alpha} {}^a I_b^{(\alpha)}(fg)(x) &\geq \frac{4^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}(fg)\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}m^\alpha \times (C + m^{2\alpha}E) \\ &\quad - \left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] m^{2\alpha} D \end{aligned}$$

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de las funciones m -convexas generalizadas en conjuntos fractales, a los fines de destacar los resultados más relevantes de acuerdo a los objetivos planteados. Además, se establecen las conclusiones y algunas líneas futuras que se pueden generar a partir de las mismas.

5.2. Análisis de las propiedades algebraicas y topológicas de funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales

Esta investigación planteó la noción de m -convexidad como una generalización natural de la convexidad clásica, lo cual permite que propiedades algebraicas y topológicas de las funciones convexas, sean aplicables también a las funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales. Se mostró que una función m -convexa generalizada también debe tener una forma de estrella generalizada. Esta propiedad es importante porque establece una conexión entre la m -convexidad y la convexidad, y que reafirma que la m -convexidad es una generalización de la convexidad.

Como parte del objetivo 1 de esta investigación de describir las propiedades algebraicas y topológicas de estas funciones, se muestra una propiedad de preservación de la m -convexidad bajo la inclusión de parámetros, en la que, si una función es m_2 -convexa generalizada y se tiene que $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq 1$, entonces la función también es m_1 -convexa generalizada. Esto implica que la m -convexidad se conserva al disminuir el valor de m , lo que refuerza la noción de que la m -convexidad es una generalización de la convexidad.

Otra propiedad importante es la preservación de la m -convexidad bajo la composición de funciones. Si se tiene una función h que es m -convexa generalizada y una función r que es m -convexa generalizada y creciente, entonces la composición $r \circ h$ es

m -convexa generalizada. Esta propiedad demuestra que la m -convexidad se conserva al combinar funciones m -convexas generalizadas de manera adecuada, lo cual es útil para construir nuevas funciones m -convexas a partir de funciones existentes.

Además, se demuestra una propiedad de preservación de la m -convexidad para las combinaciones convexas de puntos. Si se tiene una función h que es m -convexa generalizada y se toma una combinación convexa de puntos, entonces la evaluación de h en la combinación convexa está acotada por una combinación convexa de las evaluaciones individuales de h en esos puntos. Esta propiedad muestra que la m -convexidad se mantiene al realizar combinaciones convexas de puntos, lo cual es relevante para analizar la m -convexidad en contextos más generales.

Por último, se demuestra la preservación de la m -convexidad bajo la suma y el producto de funciones. Si se tienen dos funciones f y g que son m -convexas generalizadas y están generalizadamente ordenadas de manera similar y no negativas, entonces la suma y el producto de estas funciones también son m -convexas generalizadas.

5.3. Análisis de la caracterización de las funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales

Conforme al segundo objetivo de esta investigación de caracterizar las funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales, se plantearon varios teoremas, en la que se demuestra que si una función f pertenece a la clase de todas las funciones m -convexas generalizadas $GC_{\alpha,m}(I)$, entonces $\lambda^\alpha f$ también pertenece a $GC_{\alpha,m}(I)$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Esto implica que la multiplicación de una función por un escalar positivo preserva su propiedad de ser m -convexa generalizada. Luego, se establece que si f y g son funciones que pertenecen a $GC_{\alpha,m}(I)$, entonces la función $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ también es una función m -convexa generalizada, de modo que el máximo de dos funciones m -convexas generalizadas también es una función m -convexa generalizada.

Por otro lado, también se demuestra que si una sucesión de funciones (f_n) pertenecientes a $GC_{\alpha,m}(I)$ converge puntualmente a una función f , entonces f también pertenece a $GC_{\alpha,m}(I)$, indicando que la clase de funciones m -convexas generalizadas es cerrada bajo convergencia puntual, en tanto que se presentan varias afirmaciones equivalentes relacionadas con la propiedad de ser m -convexa generalizada. Estas afirmaciones involucran desigualdades y determinantes de matrices. La equivalencia entre estas afirmaciones demuestra diferentes criterios para identificar funciones m -convexas generalizadas y proporciona herramientas para su caracterización.

5.4. Análisis de las demostraciones de desigualdades que involucran funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales

Los resultados presentados en el capítulo anterior que tributan al tercer objetivo que esta tesis, de demostrar desigualdades que involucran funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales, son teoremas de desigualdades relacionados con el cálculo fraccionario y las funciones m -convexas definidas sobre conjuntos fractales. A continuación, se proporciona un análisis de cada uno de ellos:

El teorema (4.9) establece una desigualdad para la integral fraccionaria generalizada de una función m -convexa definida en un intervalo $[a, b]$. La desigualdad involucra los valores de la función en los extremos del intervalo y en un punto intermedio. La desigualdad es formulada en términos de potencias de m y c , donde m es el parámetro de m -convexidad y c es un punto en el intervalo $[a, b]$.

La demostración del teorema utiliza la m -convexidad generalizada de la función y técnicas de integración fraccionaria. Se divide el intervalo $[a, b]$ en dos subintervalos y se aplica la desigualdad de m -convexidad en cada subintervalo. Luego, se suman las desigualdades obtenidas en los dos subintervalos para llegar a la desigualdad final.

En el teorema (4.10), se establece una desigualdad para una función compuesta de una función m -convexa evaluada en una combinación lineal de puntos. La des-

igualdad involucra la media de los puntos y las ponderaciones de los puntos en la combinación lineal. La desigualdad proporciona una relación entre la función compuesta y las funciones evaluadas en los puntos individuales.

La demostración del teorema se realiza por inducción sobre el número de puntos en la combinación lineal. La base de inducción se demuestra inicialmente para dos puntos, luego se asume que la desigualdad es válida para k puntos y por último, se muestra que la desigualdad también se cumple para $k + 1$ puntos utilizando la hipótesis de inducción y técnicas de m -convexidad.

Por su parte, los teoremas (4.11) y (4.12) muestran desigualdades para la integral fraccionaria generalizada de la multiplicación de dos funciones m -convexas. Estas involucran los valores de las funciones en los extremos de un intervalo y en el punto medio del intervalo, además de proporcionar una relación entre la integral de la función compuesta y los productos de los valores de las funciones individuales.

La demostración utiliza la m -convexidad de las funciones y técnicas de integración fraccionaria. Se descompone la función compuesta en términos de las funciones individuales y se aplica la desigualdad de m -convexidad a cada término. Luego, se suman las desigualdades obtenidas para obtener la desigualdad final.

5.5. Conclusiones

En correspondencia con los objetivos planteados en esta investigación, a continuación se plantean las conclusiones más importantes que se derivan de la presentación y análisis de los resultados:

1. Las propiedades algebraicas y topológicas más relevantes que conservan las funciones m -convexas generalizadas sobre conjuntos fractales son la de ser en forma estrellada generalizada, que la m -convexidad se preserva al disminuir el valor de m , también bajo la composición de funciones y las combinaciones convexas de puntos, y se mantiene bajo la suma y el producto de funciones

m-convexas generalizadas.

2. Con respecto a la caracterización de estas funciones en los conjuntos fractales, se estableció que la multiplicación por un escalar positivo preserva la m-convexidad, el máximo de dos funciones m-convexas generalizadas también es m-convexo, y la clase de funciones es cerrada bajo convergencia puntual.
3. Con relación a las demostraciones de las desigualdades que involucran funciones m-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales se proporcionó una serie de teoremas que establecen desigualdades para la integral fraccionaria generalizada de funciones m-convexas, tanto en términos de los valores de la función en los extremos del intervalo como en combinaciones lineales de puntos. Las demostraciones se basan en la m-convexidad de las funciones, en el método de inducción matemática y en técnicas de integración fraccionaria.

En relación al objetivo general, las funciones m-convexas generalizadas en conjuntos fractales presentan propiedades notables, como la forma estrellada generalizada y la preservación de la m-convexidad en diversas operaciones. Además, se caracterizan por mantener su m-convexidad bajo multiplicación por escalares positivos, la operación de máximo entre dos funciones m-convexas generalizadas y la convergencia puntual.

5.6. Líneas futuras de investigación

Esta investigación supone grandes retos ya que da apertura a diferentes líneas de investigación, algunas de las cuales, se presentan a continuación:

1. Estabilidad de las propiedades de convexidad en conjuntos fractales bajo deformaciones y perturbaciones.
2. Extensión de la teoría de la convexidad a conjuntos fractales multidimensionales.
3. Análisis de la m -convexidad generalizada en conjuntos fractales aleatorios y estocásticos.

4. Análisis de la convergencia y divergencia de las funciones m -convexas generalizadas en diferentes tipos de conjuntos fractales.
5. Comparación de las propiedades de las funciones m -convexas generalizadas en conjuntos fractales y en conjuntos no fractales.
6. Desarrollo de métodos numéricos para aproximar funciones m -convexas generalizadas en conjuntos fractales.

Referencias

- Abdeljawad, T., y Rashid, S. (2020). Some new local fractional inequalities associated with generalized (s, m) -convex functions and applications. *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1–27.
- Afonso, A. (2018). *Medida, dimensión y fractales*. Universidad de la Laguna.
- Bakula, M. K., Ozdemir, M. E., y Pecaric, J. (2008). Hadamard type inequalities for m -convex and (α, m) -convex functions. *J. Inequal. Pure Appl. Math*, 9(4), 12.
- Beckenbach, E. F., y Bing, R. H. (1945). On generalized convex functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58, 220–230.
- Britannica, The Editors of Encyclopaedia. (2022). *Fractales: Enciclopedia britannica*. <https://www.britannica.com/science/fractal>.
- Cooper, F. (2011). *Introduction to fractals and julia sets*. Universidad de Warwick.
- Du, T., y Wang, H. (2019). Certain integral inequalities considering generalized m -convexity on fractal sets and their applications. *Fractals*, 27(07), 1950117.
- Espinoza, E. (2020). La investigación formativa. una reflexión teórica. *Conrado*, 16(74), 45–53.
- Farid, G., y Abbas, G. (2018). Generalizations of some fractional integral inequalities for m -convex functions via generalized mittag-leffler function. *Babes-Bolyai, Math*, 63(1), 23–35.
- Farid, G., y Khan, K. (2018). General fractional integral inequalities for convex and m -convex functions via an extended generalized mittag-leffler function. *Journal of inequalities and applications*, 2018(1), 1–12.
- Gutierrez, P., y Hott, E. (2004). *Introducción al mundo fractal: matemática*. 4to medio matemático.
- Iscan, I. (2013). A new generalization of some integral inequalities for (α, m) -convex functions. *Mathematical Sciences*, 7, 1–8.

- Jensen, J. (1905). On convex functions and inequalities between mean values (danish). *Nyt Tidss for Math.*, 16B, 49–68.
- Kuczma, M. (2009). *An introduction to the theory of functional equations and inequalities*.
- Mandelbrot, B. (1982). *La geometría fractal de la naturaleza*.
- Materano, J. (2015). *Funciones convexas, cuasi-convexas, lipschitz y la desigualdad de simpson*. Universidad Central De Venezuela.
- Murota, K. (2006). m -convex functions on jump systems: a general framework for min-square graph factor problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 20(1), 213–226.
- Murota, K., y Shioura, A. (1999). m -convex function on generalized polymatroid. *Mathematics of operations research*, 24(1), 95–105.
- Murota, K., y Tamura, A. (2003). New characterizations of m -convex functions and their applications to economic equilibrium models with indivisibilities. *Discrete Applied Mathematics*, 131(2), 495–512.
- Ortega, A. O. (2018). *Enfoques de investigación. métodos para el diseño urbano*. Arquitectónico.
- Pickover, C. A. (2009). *El libro de las matemáticas: de pitágoras a la 57 dimensión, 250 hitos de la historia de las matemáticas*. Sterling.
- Ramos-Galarza, C. A. (2020). Los alcances de una investigación. *CienciAmérica*, 9(3), 1–6.
- Sanchez, R., y Sanabria, J. (2022). New inequalities on generalized m -convexity on fractal sets. *Fractals*, 30(06), 2250117.
- Spinadel, V. (2002). Geometría fractal y geometría euclidiana. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 84–91.
- Vera, G. (2011). Funciones convexas. lecciones de análisis matemático ii. *Universidad de Murcia*.
- Yang, X.-J. (2012). *Advanced local fractional calculus and its applications*. World Science Publisher.

ANEXOS

Propiedades de las funciones convexas generalizadas.

Teorema 5.1 Sea $f : I \rightarrow R^\alpha$. Entonces, f es una función convexa generalizada si y solo si se cumple la desigualdad

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)^\alpha} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)^\alpha}$$

para cualquier $x_1, x_2, x_3 \in I$ con $x_1 < x_2 < x_3$.

Demostración. De hecho, tomando $\lambda = (x_3 - x_2) / (x_3 - x_1)$, entonces $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Y por la convexidad generalizada de f , se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leq \lambda^\alpha f(x_1) + (1 - \lambda)^\alpha f(x_3) \\ &= \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right)^\alpha f(x_1) + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right)^\alpha f(x_3). \end{aligned}$$

A partir de la fórmula anterior, es fácil ver que

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)^\alpha} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)^\alpha}.$$

Recíprocamente, para cualquier par de puntos x_1, x_3 ($x_1 < x_3$) en $I \subseteq R$, se toma $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$ para $\lambda \in (0, 1)$. Entonces $x_1 < x_2 < x_3$ y $\lambda = (x_3 - x_2) / (x_3 - x_1)$. Usando el proceso inverso anterior, se tiene

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leq \lambda^\alpha f(x_1) + (1 - \lambda)^\alpha f(x_3).$$

Por lo tanto, f es una función convexa en $I \subseteq R$. De la misma manera, se puede demostrar que f es una función convexa generalizada en $I \subseteq R$ si y solo si

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^\alpha} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{(x_3 - x_1)^\alpha} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)^\alpha},$$

para cualquier $x_1, x_2, x_3 \in I$ con $x_1 < x_2 < x_3$.

Teorema 5.2 Si $f \in D_\alpha(I)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es una función convexa generalizada en I ,
2. $f^{(\alpha)}$ es una función creciente en I ,

3. para cualquier $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f^{(\alpha)}(x_1)}{\Gamma(1+\alpha)} (x_2 - x_1)^\alpha.$$

Demostración. $(1 \rightarrow 2)$ Sea $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Y toma $h > 0$ suficientemente pequeño tal que $x_1 - h, x_2 + h \in I$. Dado que $x_1 - h < x_1 < x_2 < x_2 + h$, entonces usando el (5.1), se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(1+a) \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h^\alpha} \\ \leq \Gamma(1+a) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^\alpha} \\ \leq \Gamma(1+a) \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h^\alpha}. \end{aligned}$$

Dado que $f \in D_\alpha(I)$, al dejar que $h \rightarrow 0^+$, se sigue que

$$f^{(\alpha)}(x_1) \leq \Gamma(1+a) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^\alpha} \leq f^{(\alpha)}(x_2).$$

Por lo tanto, $f^{(\alpha)}$ es creciente en I . $(2 \rightarrow 3)$ Tomando x_1 y x_2 en I , se asume, sin pérdida de generalidad, que $x_1 < x_2$. Considerando que $f^{(\alpha)}$ es una función creciente en el intervalo I , se aplica el teorema generalizado de Taylor local fraccional, lo cual lleva a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{f^{(\alpha)}(\xi)}{\Gamma(1+a)} (x_2 - x_1)^\alpha \\ &\geq \frac{f^{(\alpha)}(x_1)}{\Gamma(1+a)} (x_2 - x_1)^\alpha, \end{aligned}$$

donde $\xi \in (x_1, x_2)$. En otras palabras, se obtiene la desigualdad:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f^{(\alpha)}(x_1)}{\Gamma(1+a)} (x_2 - x_1)^\alpha.$$

$(3 \rightarrow 1)$ Para cualquier x_1 y x_2 en I , se toma $x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, donde $0 < \lambda < 1$. Es fácil observar que $x_1 - x_3 = (1 - \lambda)(x_1 - x_2)$ y $x_2 - x_3 = \lambda(x_2 - x_1)$. Luego, utilizando la tercera condición, se tiene:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &\geq f(x_3) + \frac{f^{(\alpha)}(x_3)}{\Gamma(1+\alpha)} (x_1 - x_3)^\alpha \\
&= f(x_3) + (1-\lambda)^\alpha \frac{f^{(\alpha)}(x_3)}{\Gamma(1+\alpha)} (x_1 - x_2)^\alpha,
\end{aligned}$$

Al multiplicar λ^α y $(1-\lambda)^\alpha$ en las dos fórmulas anteriores, respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned}
&\lambda^\alpha f(x_1) + (1-\lambda)^\alpha f(x_2) \\
&\geq f(x_3) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que f es una función convexa generalizada en I .

Proposición 5.6.1 Si $f \in D_{2\alpha}(a, b)$, entonces f es una función convexa generalizada (o una función cóncava generalizada) si y solo si se cumple la siguiente desigualdad:

$$f^{(2\alpha)}(x) \geq 0 \quad \left(\text{o } f^{(2\alpha)}(x) \leq 0 \right),$$

para cualquier $x \in (a, b)$.

Teorema 5.3 Sea f una función convexa generalizada en $[a, b]$. Entonces, para cualquier $x_i \in [a, b]$ y $\lambda_i \in [0, 1]$ (con $i = 1, 2, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha f(x_i).$$

Demostración. Cuando $n = 2$, la desigualdad es obviamente verdadera. Supongase que la desigualdad también es verdadera para $n = k$. Entonces, para cualquier $x_1, x_2, \dots, x_k \in [a, b]$ y $\gamma_i > 0$ (con $i = 1, 2, \dots, k$) y $\sum_{i=1}^k \gamma_i = 1$, se tiene:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \gamma_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \gamma_i^\alpha f(x_i)$$

Si $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{(k+1)} \in [a, b]$ y $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, k+1$ con $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, se define $\gamma_i = \lambda_i / (1 - \lambda_{k+1})$, para $i = 1, 2, \dots, k$. Es fácil ver que $\sum_{i=1}^k \gamma_i = 1$. Por lo

tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}
& f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \\
&= f\left((1 - \lambda_{k+1}) \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k}{1 - \lambda_{k+1}} + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\
&\leq (1 - \lambda_{k+1})^\alpha f(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_k x_k) + \lambda_{k+1}^\alpha f(x_{k+1}) \\
&\leq (1 - \lambda_{k+1})^\alpha [\gamma_1^\alpha f(x_1) + \gamma_2^\alpha f(x_2) + \cdots + \gamma_k^\alpha f(x_k)] \\
&\quad + \lambda_{k+1}^\alpha f(x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i^\alpha f(x_i).
\end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración.