

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Magíster en Matemática

Título

Estudio de Funciones de Variación Acotada sobre Conjuntos Fractales

Sustentante

Carola Adelaida Gómez Pérez

Asesor

Leomar Antonio Reyes Abreu

Cotuí, Prov. Juan Sánchez Ramírez

Año Académico, 2023.

TÍTULO

Estudio de Funciones de Variación Acotada sobre Conjuntos Fractales

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en la investigación, son responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han incluido respetando el derecho del autor.

Título

Estudio de Funciones de Variación Acotada sobre Conjuntos Fractales.

Tesis presentada por **Carola Adelaida Gómez Pérez** para la obtención del grado de
Magíster en Matemática.

Composición del tribunal evaluador

Danny Daniel Manzueta Pérez

Jurado de metodología

José Manuel Vloria

Jurado de Redacción

Wilfran Noel Rosario

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de Autoría.	II
Agradecimientos	VI
Dedicatoria	VII
RESUMEN	VIII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos de las Funciones de Variación Acotada . . .	1
1.2.2 Antecedentes históricos de los Conjuntos Fractales	3
1.2.3 Antecedentes académicos de Funciones de Variación Acotada y Conjuntos Fractales	4
1.3 Planteamiento del problema	5
1.4 Justificación	6
1.5 Objetivos	7
1.5.1 Objetivo general	7
1.5.2 Objetivos específicos	7
1.6 Alcance y límites	7
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	9
2.1 Introducción	9
2.2 Marco teórico	9
2.2.1 Conceptos básicos sobre funciones	9
2.2.2 Funciones de Variación Acotada	11
2.2.3 Propiedades de Funciones de Variación Acotada	12
2.2.4 Variaciones en Funciones de Variación Acotada	16
2.2.5 Fractales	18
2.2.6 Conjuntos Fractales	19
2.2.7 Dimensión topológica	20
2.2.8 Conjunto de Cantor	21

2.2.9	Conjunto de Mandelbrot	21
2.2.10	Triángulo de Sierpinski	22
2.2.11	Conjunto de Julia	23
2.2.12	Curva de von Koch	23
CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO		24
3.1	Introducción	24
3.2	Marco Metodológico	24
3.2.1	Diseño de la investigación	24
3.2.2	Tipo de investigación	24
3.2.3	Enfoque de la investigación	24
3.3	Método de la investigación	25
3.4	Procedimientos	25
CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE RESULTADOS		27
4.1	Introducción	27
4.2	Extensión del concepto de funciones de variación acotada definidas sobre conjuntos fractales	27
4.3	Propiedades de las funciones de variación acotada en conjuntos fractales . .	28
4.4	Caracterización de las funciones de variación acotada sobre conjuntos frac- tales	32
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES		35
5.1	Introducción	35
5.2	Conclusiones	35
5.3	Futuras líneas de investigación	37
Referencias		39
Anexo		I

Agradecimientos

Quiero en primer lugar agradecerme a mí misma por no haber abandonado esta maestría en una de las tantas veces que esta idea llegó a mi cabeza, en segundo lugar quiero agradecer a mi esposo por su apoyo incondicional y finalmente, a mis compañeros Yulenny y Yeraldys que fueron mis muletas durante todo este trayecto. Gracias.

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi padre José Rafael Gómez, donde quiera que esté, por ser el responsable de sembrar en mí el hambre por el conocimiento y por desprenderse de cualquier beneficio material para sí mismo cuando sabía que me hacía falta algún libro.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Facultad de Postgrado y Educación Continuada



Maestría en Matemática

Estudio de Funciones de Variación Acotada sobre Conjuntos Fractales

Carola Adelaida Gómez Pérez

Sutentante

Leomar Antonio Reyes Abreu

Asesor

RESUMEN

La presente tesis aborda el estudio de las funciones de variación acotada, con un enfoque en la extensión de su concepto, el análisis de sus propiedades y su caracterización sobre conjuntos fractales.

La metodología utilizada se fundamentó en un diseño no experimental y transversal, con un enfoque explicativo-descriptivo, aplicando para esto el método analítico-deductivo.

En primer lugar, se explora la extensión del concepto de funciones de variación acotada a conjuntos fractales. Se demuestra que es posible adaptar esta noción a estructuras fractales, lo que permite abordar problemas en contextos no euclidianos y ampliar el alcance de estas funciones en diversos campos de las matemáticas y otras disciplinas.

Seguido de esto, se plantean las propiedades de las funciones de variación acotada en conjuntos fractales. Se destaca que, a pesar de su definición no convencional, estas funcio-

nes mantienen características fundamentales similares a las definidas en conjuntos euclidianos. Además, se revelan propiedades relacionadas con la naturaleza fractal.

Finalmente, se presenta una caracterización de las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales mediante el uso de la función escalonada integral y se identifican futuras líneas de investigación.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

La historia de las funciones de variación acotada y los conjuntos fractales es interesante y va de la mano con el desarrollo de la matemática moderna. Estos conceptos surgieron como resultado de la exploración de fenómenos matemáticos que desafiaban las ideas convencionales y ampliaban los límites del conocimiento matemático. Por un lado, el desarrollo a lo largo del tiempo de las funciones de variación acotada se ha aplicado en el procesamiento de señales y el análisis de imágenes, mientras que los fractales han sido utilizados en la modelización de fenómenos naturales como la formación de costas, el crecimiento de estructuras biológicas y la generación de imágenes realistas en computación gráfica. Ambos conceptos han sido objeto de estudio y exploración por parte de matemáticos a lo largo de la historia y hacer un breve señalamiento de esta evolución temporal es lo que se persigue en este capítulo.

1.2 Antecedentes

1.2.1 Antecedentes históricos de las Funciones de Variación Acotada

La historia de las funciones de variación acotada se remonta a los desarrollos matemáticos en el siglo XIX y principios del siglo XX y al estudio del cálculo y el análisis matemático. Uno de los principales contribuyentes a este campo fue el matemático francés Henri Lebesgue, quien introdujo el concepto de integral de Lebesgue en 1902. Su trabajo sentó las bases para el estudio de las funciones de variación acotada. Se pueden ver detalles de cronología en las obras de (Jahnke, 2003) y (Stein y Shakarchi, 2005).

Una función de variación acotada es una función real que tiene una variación total finita en un intervalo determinado. La variación total de una función en un intervalo es la suma de las diferencias absolutas entre los valores de la función en puntos sucesivos. En otras palabras, mide cuánto varía la función en un intervalo dado.

El concepto de función de variación acotada se originó a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, con el trabajo de matemáticos como Émile Borel, Harald Cramér y Norbert Wiener. Estos matemáticos investigaron las propiedades de las funciones de variación acotada en el contexto del análisis funcional y la teoría de la medida. De igual manera también se vio enriquecido con el trabajo de matemáticos como Augustin-Louis Cauchy y Bernhard Riemann en el campo del análisis matemático. Estos últimos estudiaron las propiedades de las funciones que tenían una variación limitada en un intervalo dado. (Mejía, 2017).

Este concepto fue desarrollado para proporcionar una generalización del concepto de función continua. Mientras que una función continua puede tener variaciones infinitas en un intervalo, una función de variación acotada tiene una variación total finita. Esto es útil en muchos contextos, como el análisis de series de Fourier, la teoría de la medida y la teoría de probabilidad.

En el siglo XX, el estudio de las funciones de variación acotada se expandió aún más con el desarrollo de la teoría de funciones de una variable compleja y la teoría del potencial y se realizaron numerosas investigaciones en el campo de las funciones de variación acotada. Matemáticos como Stefan Banach, Stanislaw Saks y Laurent Schwartz hicieron importantes contribuciones al estudio de estas funciones y su relación con otros conceptos matemáticos, como las medidas y la teoría de la integración.

En la actualidad, las funciones de variación acotada siguen siendo un tema de investigación activo en matemáticas y tienen aplicaciones en diversos campos, como el análisis funcional, la teoría de la probabilidad y la teoría de la información. Estas funciones proporcionan una herramienta útil para analizar el comportamiento de las funciones en términos de su variación y continuidad.

1.2.2 Antecedentes históricos de los Conjuntos Fractales

En el trabajo de Rodríguez (1995), se puede encontrar un recorrido histórico completo sobre los fractales. Este inicia hablando de la teoría de los fractales y de su desarrollo cronológico haciendo las siguientes anotaciones:

Los orígenes de la teoría de fractales se remontan al siglo XIX con las ideas de Henri Poincaré y la misma se ha nutrido de la matemática (N. Wiener, B. Mandelbrot, L. F. Richardson) de la física (J.B. Perrin) y de otras disciplinas tan diversas que quedan contenidas en los trabajos de B. B. Mandelbrot.

Jean Baptiste Perrin fue uno de los científicos que observaron y publicaron con respecto a objetos familiares de forma irregular o interrumpida y se puede ver expresada en su obra *Les Atomes*:

“...si bien las funciones derivables son las más simples, las más fáciles de manejar, constituyen a su vez, la excepción, o bien, si se prefiere un lenguaje geométrico, las curvas que no admiten tangente son la regla, y las curvas regulares, tales como el círculo, son casos interesantes, pero particulares. Y como ocurre la mayoría de las veces, aquellas personas que se les habla de curvas sin tangente o funciones sin derivada piensan que la naturaleza no presenta tales complicaciones y que no nos sugiere esas ideas”.

En la realidad experimental si se mira a través de un microscopio, se observa el movimiento browniano que agita cualquier pequeña partícula en suspensión en un fluido y se quiere una tangente a su trayectoria, se tendría que encontrar un límite, por lo menos aproximado, a la dirección de la recta que une las posiciones de dicha partícula en dos instantes sucesivos muy próximos. Ahora bien, hasta donde permita llegar la experiencia, esta dirección varía localmente cuando se disminuye el tiempo transcurrido entre ambos instantes”. (Perrin, 1913).

Más adelante Norbert Wiener alrededor de 1920 retoma las ideas de Perrin y los usa para la construcción de su modelo probabilístico del movimiento browniano. Los trabajos de Wiener fueron la principal motivación para la creación de los objetos fractales y ya para 1967 estos se transformaron en una nueva disciplina llamada geometría fractal. Luego Lewis Fry Richardson estudiaría la variación de la longitud aproximada de las fronteras entre dos países, aunque en su momento no obtuviera la atención que merecía.

Finalmente, se tiene a Benoit B. Mandelbrot quien es considerado como el padre de la geometría fractal. En su libro “The Fractal Geometry of Nature 1982” se citan decenas de referencias que influyeron al desarrollo del concepto de fractal. Dichas publicaciones datan de 1951 a 1986. Mandelbrot es un experto en la aplicación de la probabilidad y la estadística a problemas concretos y reales en áreas tan diversas como termodinámica, sistemas de comunicación, teoría de la información, economía, psicología, climatología, cosmografía, mecánica de fluidos e ingeniería de materiales. (Rodríguez, 1995).

1.2.3 Antecedentes académicos de Funciones de Variación Acotada y Conjuntos Fractales

Las funciones de variación acotada y los conjuntos fractales tienen una base académica sólida y han sido objeto de estudio por parte de matemáticos y científicos durante décadas.

Bridges (2000) publica “A constructive look at functions of bounded variation” (Una mirada constructiva a las funciones de variación acotada) donde se examinan las funciones con variación acotada con las matemáticas constructivas de Bishop y se muestra que la propiedad de tener una variación es hereditaria hacia abajo en intervalos compactos y, por lo tanto, que una función de valor real f con una variación en un intervalo compacto puede expresarse como una diferencia de dos funciones crecientes. Además, si f es secuencialmente continua, entonces la función de variación correspondiente, y por lo tanto la propia f , es uniformemente continua. De igual manera Dávila (2002) hace su divulgación sobre la pregunta abierta propuesta por Bourgain, Brezis y Mironescu de si toda función

de variación acotada en el plano se puede escribir como la diferencia de dos funciones de variación acotada con valores en la recta real concluyendo que sí es posible.

Los conjuntos fractales también han sido estudiados, tal como lo muestran las investigaciones de Restrepo, Mesa y Arango (2001) sobre Conjuntos Fractales en el tiempo y en el espacio donde se exponen dos modelos de conjuntos fractales: el ruido fraccional Gaussiano (rfG) y el movimiento fraccional Browniano (mfB) y el método de síntesis espectral (MS) y el método de Davies Hart (DH) para generar dichos conjuntos.

También se tiene el trabajo presentado por Dragomir (2014) donde proporciona un complemento de la desigualdad de Ostrowski para funciones de variación acotada y aplicaciones.

En el trabajo de tesis de Toro (2014), se presenta una investigación exclusiva de los fractales matemáticos desde su concepción histórica hasta las aplicaciones de la dimensión fractal, entre las que resalta la comprensión de imágenes, el arte fractal, la dimensión fractal en la cromatina y el análisis de la estructura ósea.

Aistleitner et al., (2016) presentaron su artículo titulado “On functions of bounded variation” (Sobre funciones de variación acotada) donde se da una respuesta afirmativa a la pregunta abierta de si cada función de variación acotada de Hardy-Krause es Borel medible y tiene una variación D -acotada. Además, muestran que el espacio de funciones de variación D -acotada se puede convertir en un álgebra de Banach conmutativa.

1.3 Planteamiento del problema

La teoría de fractales ha ganado gran relevancia en las últimas décadas, ya que proporciona herramientas poderosas para describir y analizar estructuras complejas presentes en diversos campos científicos. Los conjuntos fractales son estructuras matemáticas que exhiben propiedades geométricas y topológicas interesantes, como la autosimilitud y la dimensión fractal, las cuales permiten modelar de manera efectiva una gran variedad de

fenómenos naturales y matemáticos que presentan patrones recurrentes en diferentes escalas, además de ofrecer una cuantificación de su grado de complejidad.

Por su parte, las funciones de variación acotada son fundamentales en múltiples áreas de las matemáticas, tales como el análisis de una variable real, las ecuaciones diferenciales y la probabilidad. Estas son particularmente útiles porque facilitan el tratamiento de las discontinuidades de una función, y el análisis de fenómenos que implican cambios bruscos, permitiendo así simular el comportamiento de fenómenos complejos presentes en la naturaleza.

Las funciones de variación acotada generalmente se definen en intervalos reales, es decir, subconjuntos de números reales. Sin embargo, existen estructuras complejas que no pueden ser tratadas considerando como dominio este conjunto numérico. En tal sentido, este estudio pretende enlazar las fundamentaciones y características de las funciones de variación acotada definidas sobre conjuntos fractales, por medio de la pregunta: ¿cómo analizar las funciones de variación acotada en conjunto fractales?

Esta interrogante se responderá por medio de las siguientes cuestionantes:

1. ¿Cómo se puede extender el concepto de funciones de variación acotada a conjuntos fractales?
2. ¿Cómo se pueden analizar ciertas propiedades de las funciones de variación acotada en conjuntos fractales?
3. ¿Cómo se caracterizan las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales?

1.4 Justificación

Las funciones de variación acotada son herramientas matemáticas utilizadas para medir el cambio en una función a medida que se recorre un intervalo. Los conjuntos fractales, por otro lado, son objetos geométricos altamente complejos y fascinantes que se caracterizan por exhibir autosimilitud a diferentes escalas. La combinación de ambos conceptos

abre un campo de estudio interesante y desafiante que puede proporcionar una comprensión más profunda de la estructura y el comportamiento de las funciones en contextos fractales.

Se pueden destacar varios aspectos de importancia en el estudio de estas funciones y los fractales, uno de ellos es la contribución al conocimiento matemático, ya que investigar las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales puede brindar nuevas perspectivas y avances en la teoría matemática de fractales y análisis funcional. Un segundo aspecto tiene que ver con las aplicaciones prácticas, por ejemplo, en el análisis de datos, las funciones fractales pueden ser utilizadas para modelar y analizar patrones complejos, como series temporales o imágenes. Entender cómo se comportan las funciones en conjuntos fractales puede proporcionar herramientas poderosas para el procesamiento y la interpretación de datos en diversas disciplinas. De igual manera, los trabajos enfocados en fractales y funciones de variación acotada contribuyen al conocimiento matemático de estas áreas que están poco exploradas.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Analizar las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales.

1.5.2 Objetivos específicos

1. Extender el concepto de funciones de variación acotada a conjuntos fractales.
2. Analizar diversas propiedades de las funciones de variación acotada en conjuntos fractales.
3. Caracterizar las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales.

1.6 Alcance y límites

El desarrollo de esta investigación se centró en el contexto de las Matemáticas Puras, ya que estuvo enfocada en caracterizaciones y análisis de propiedades topológicas, es-

pecíficamente de las funciones de variación acotada, cuando el dominio de las mismas son conjuntos fractales. Esto supone, que la presente propuesta investigativa no contempló la generación de fractales mediante algún método iterativo, que aunque plantee implicaciones prácticas interesantes, los resultados están centrados en condiciones puramente teóricas.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción

La investigación de las funciones de variación acotada y los conjuntos fractales ha implicado un papel fundamental en el análisis y la descripción de fenómenos complejos en diversas áreas del conocimiento. A continuación, se presenta un marco referencial para comprender estos conceptos y la relación que guardan entre ellos. Las funciones de variación acotada permiten medir y cuantificar la variabilidad de una función en diferentes intervalos, mientras que los conjuntos fractales son estructuras geométricas que exhiben propiedades de autosimilitud y una dimensión fractal no entera. Este capítulo tiene como objetivo proporcionar una base para comprender y aplicar estos conceptos.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Conceptos básicos sobre funciones

Definición 2.2.1 (Función) La definición de función puede variar ligeramente según diferentes autores o contextos matemáticos. A continuación, se presentan algunas definiciones de función según distintos autores reconocidos en el campo de las matemáticas:

1. Definición de función según (Georg Cantor, 1883): Una función es una correspondencia entre dos conjuntos A y B , que asigna a cada elemento a en A un único elemento b en B .
2. Definición de función según (Richard Courant y Fritz John, 1999): Una función f es una regla que asigna a cada número real x en un conjunto D (el dominio) un número real $y = f(x)$.
3. Definición de función según (Serge Lang, 1983): Una función es una relación entre dos conjuntos, en la cual, para cada elemento del dominio, se le asigna un único elemento del codominio.

4. Definición de función según (Kenneth H. Rosen, 2004): Una función f de un conjunto A a un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en A un único elemento $y = f(x)$ en B .

Definición 2.2.2 (Función continua) Una función $f(x)$ definida en un intervalo abierto (a, b) se dice que es continua en un punto c perteneciente al intervalo (a, b) si se cumple lo siguiente:

1. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c existe, es finito y es igual al valor de $f(c)$.
2. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la izquierda es igual al límite de $f(x)$ cuando x tiende a c por la derecha.

En otras palabras, una función $f(x)$ es continua en un punto c si los valores de la función se acercan cada vez más a $f(c)$ a medida que los valores de x se acercan a c desde ambos lados del punto. Además, se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo si es continua en cada punto del intervalo.

Definición 2.2.3 (Función monótona) Sea f una función real definida en un subconjunto S de $\mathbb{R}$. Entonces f es creciente (o no decreciente) en S si para todo par de x e y de S ,

$$x < y \text{ implica } f(x) \leq f(y).$$

Si $x < y$ implica $f(x) < f(y)$, entonces f se llama estrictamente creciente sobre S . (Las funciones decrecientes se definen análogamente). Una función se llama monótona en S si es creciente o decreciente en S . Si f es una función creciente, entonces $-f$ es una función decreciente. (Apóstol, 1996).

Definición 2.2.4 (Función acotada superiormente) Una función f está acotada superiormente si existe un número real k tal que para toda x es $f(x) \leq k$. El número k se llama cota superior.

Definición 2.2.5 (Función acotada inferiormente) Una función f está acotada inferiormente si existe un número real k' tal que para toda x es $f(x) \geq k'$. El número k' se llama cota inferior.

Definición 2.2.6 (Función acotada) Una función está acotada si lo está superior e inferiormente. $k' \leq f(x) \leq k$.

2.2.2 Funciones de Variación Acotada

Definición 2.2.7 (Funciones de Variación Acotada) Si $[a, b]$ es un intervalo compacto, un conjunto de puntos

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

que satisfaga las desigualdades

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

se llama partición de $[a, b]$. El intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se llama k -ésimo subintervalo de P y se escribe $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, con lo que $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$. La colección de todas las particiones se designará $\mathfrak{P}[a, b]$. (Mejía, 2017).

Definición 2.2.8 Sea f definida en $[a, b]$. Si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, se escribirá $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, para $k = 1, 2, \dots, n$. Si existe un número positivo M tal que

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M$$

para toda partición $[a, b]$, entonces se dirá que f es de variación acotada.

Teorema 2.1 Si f es monótona en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada en $[a, b]$. (Apóstol, 1996).

Demostración 2.2.1 (Quintero, 2013) Se considerará cuando f es creciente, P una partición de $[a, b]$, $x_{k-1}, x_k \in P$, entonces $x_{k-1} < x_k$. Luego: $f(x_{k-1}) < f(x_k)$. Notar que $a < b$, así $f(a) < f(b)$, por lo tanto $f(b) - f(a) > 0$, además $0 < |f(b) - f(a)| \leq 2|f(b) - f(a)|$. Sea $2|f(b) - f(a)| = M$.

Luego:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n |\Delta f(x)| &= \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = (f(x_1) - f(x_0)) + (f(x_2) - f(x_1)) + \dots \\
&+ (f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})) + (f(x_n) - f(x_{n-1})) = -f(x_0) + f(x_n) = f(x_n) - f(x_0) \\
&= f(b) - f(a) \leq 2 |f(b) - f(a)| = M.
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\sum_{k=1}^n |\Delta f(x)| \leq M.$

Definición 2.2.9 (Variación Acotada) Se denota por $\mathbb{R}^{[a,b]}$ a la colección de todas las funciones $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 2.2.10 (Variación de Jordan) Sean $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y una partición $\pi : a = t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$, se definen

$$\sigma(u) = \sigma_1(u, \pi) := \sum_{j=1}^{n-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)|$$

y

$$V(u) = V(u; [a, b]) := \sup_{\pi} \sigma(u, \pi)$$

donde el supremo se considera sobre todas las particiones π del intervalo $[a, b]$. $V(u; [a, b])$ se denomina variación en el sentido de Jordan (o simplemente variación) de la función u en el intervalo $[a, b]$. Si $V(u; [a, b]) < \infty$, se dice que la función u tiene variación acotada o finita en el intervalo $[a, b]$.

La clase de las funciones de variación acotada se denotará por $BV([a, b], \mathbb{R})$ o de una manera más abreviada $BV([a, b])$.

2.2.3 Propiedades de Funciones de Variación Acotada

A continuación, se presentan varias propiedades de las funciones de variación acotada y las demostraciones de cada una de ellas. Estas propiedades permiten darle una estructura de espacio normado a la clase $BV[a, b]$ de funciones de variación acotada.

Proposición 2.2.1 Para $u \in BV[a, b]$ se cumplen las siguientes propiedades:

- a) $V(u; [a, b]) \geq 0$.
- b) $V(u; [a, b]) = 0$ si y solo si $u = \text{cte}$.
- c) $V(u; [a, b]) = V(-u; [a, b])$.
- d) $|u(a) - u(b)| \leq V(u; [a, b])$.
- e) $\|u\|_\infty \leq |u(a)| + V(u; [a, b])$.
- f) $V(u + v; [a, b]) \leq V(u; [a, b]) + V(v; [a, b])$.
- g) Cada función monótona u pertenece a $BV[a, b]$ con $V(u; [a, b]) = |u(a) - u(b)|$. (Barrantes, 2010).

Demostración 2.2.2 Propiedad (a) En primer lugar, por definición del módulo se tiene que $|u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 0$ para cualquier $j = 0, 1, \dots, n$ con $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$V(u; [a, b]) = \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 0,$$

donde el supremo es considerado sobre todas la particiones $\Pi : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ del intervalo $[a, b]$.

Demostración 2.2.3 Propiedad (b) Suponga que:

$V(u; [a, b]) = \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})| = 0$, entonces por la definición de variación acotada se tiene que

$$V(u; [a, b]) = \sup_{\Pi} \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})| \geq 0,$$

donde el supremo es considerado sobre todas las posibles particiones $\Pi : a = t_0 < \dots < t_n = b$, del intervalo $[a, b]$.

En consecuencia, considerando $x \in [a, b]$ y la partición

$$\prod_x : a = t_0 < t_1 = x < t_2 = b,$$

resulta que

$$|u(x) - u(a)| = 0 \text{ y } |u(b) - u(x)| = 0;$$

por lo tanto

$$u(a) = u(x) = u(b) \text{ para todo } x \in [a, b],$$

y de esta manera se obtiene que u es constante en $[a, b]$. Recíprocamente si $u = c$ es constante, obtenemos que $V(u; [a, b]) = 0$.

Demostración 2.2.4 Propiedad (c) Consideremos $u \in BV[a, b]$. Entonces,

$$\begin{aligned} V(-u; [a, b]) &= \sup_{\prod} \sum_{j=1}^n |(-u(t_j)) - (-u(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\prod} \sum_{j=1}^n |-(u(t_j) - u(t_{j-1}))| \\ &= \sup_{\prod} \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\ &= V(u; [a, b]). \end{aligned}$$

Demostración 2.2.5 Propiedad (d) Consideremos la partición $\prod_{a,b}$ definida por $\prod_{a,b} : a = t_0 < t_1 = b$ del intervalo $[a, b]$ y la definición de variación se tiene que

$$|u(b) - u(a)| \leq V(u; [a, b]).$$

Demostración 2.2.6 Propiedad (e) Supongamos que $u \in BV[a, b]$, $t \in (a, b]$ y consideremos la partición

$$\prod_t : a = t_0 < t_1 = t < t_2 = b.$$

Entonces, de la definición de la noción de variación acotada se deduce que

$$|u(t) - u(a)| + |u(b) - u(t)| \leq V(u; [a, b]).$$

Así,

$$|u(t) - u(a)| \leq V(u; [a, b]).$$

y en consecuencia

$$|u(t)| \leq |u(a)| + V(u; [a, b]).$$

Luego la función u es acotada y además

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)| \leq |u(a)| + V(u; [a, b]).$$

Demostración 2.2.7 Propiedad (f) La variación es subaditiva, es decir,

$$V(u + v; [a, b]) \leq V(u; [a, b]) + V(v; [a, b]),$$

$\forall u, v \in BV[a, b]$ para $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

En efecto, para $u, v \in BV[a, b]$ se considera

$$\begin{aligned} V(u + v; [a, b]) &= \sum_{j=1}^n |(u + v)(t_j) - (u + v)(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^n |u(t_j) + v(t_j) - u(t_{j-1}) - v(t_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^n |(u(t_j) - u(t_{j-1})) + (v(t_j) - v(t_{j-1}))| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^n |v(t_j) - v(t_{j-1})| \\ &= V(u; [a, b]) + V(v; [a, b]). \end{aligned}$$

Demostración 2.2.8 Propiedad (g) Cada función monótona $(u; [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ pertenece a $BV[a, b]$ y

$$V(u; [a, b]) = |u(b) - u(a)|.$$

En efecto, la función $(u; [a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona creciente. Entonces,

$$\begin{aligned}
V(u; [a, b]) &= \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\
&= \sum_{j=1}^n |u(t_j) - u(t_{j-1})| \\
&= \sum_{j=1}^n (u(t_j) - u(t_{j-1})) \\
&= u(b) - u(a).
\end{aligned}$$

Así,

$$V(u) = u(b) - u(a) = |u(b) - u(a)|.$$

Ahora, si la función $u; [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona decreciente. Usando el mismo argumento anterior se obtiene que la variación es:

$$V(u) = u(a) - u(b) = |u(a) - u(b)| = |u(b) - u(a)|.$$

Lo cual concluye la demostración.

2.2.4 Variaciones en Funciones de Variación Acotada

Wiener (1924), generaliza el concepto de variación acotada dado por Jordan, hoy es conocido como p -variación acotada en el intervalo $[a; b]$. Trece años más tarde, Young (1937) generaliza la noción de Wiener al caso de φ -variación acotada en el intervalo $[a; b]$, donde φ es una φ -función.

Definición 2.2.11 (φ -función) Se dice que la función $\varphi : [0; 1) \rightarrow [0; 1)$ es una φ función si satisface las siguientes condiciones:

- a) φ es continua en $[0; +\infty)$,
- b) $\varphi(t) = 0$ solo para $t = 0$,
- c) $\varphi(t) \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \infty$,

d) φ es no decreciente ($t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$).

Definición 2.2.12 (Variación total) La variación total de f en $[a, x]$ donde $a \leq x \leq b$, se define por

$$T_F(a, x) = \sup \sum_{j=1}^N |F(t_j) - F(t_{j-1})|,$$

donde el sup esta sobre todas las particiones de $[a, x]$. (Stein y Shakarchi, 2005).

Definición 2.2.13 (p - variación) La variación p - variación de una función f en el intervalo $[a, b]$ denotada por $V_a^b(f)^p$ según Mejía (2017), se define como la suma de las diferencias absolutas elevadas a la potencia p :

$$V_a^b(f)^p = \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p.$$

Definición 2.2.14 (D - variación) La variación D - variación de una función f en el intervalo $[a, b]$ denotada por $V_D[a, b](f)$, se define como la suma de las distancias entre los valores de la función en el intervalo, considerando una partición del intervalo:

$$V_D[a, b](f) = \sum d(f(x_i), f(x_{i-1})).$$

donde la suma se toma sobre todos los puntos de una partición del intervalo $[a, b]$, y d representa la distancia entre los puntos. (Mejía, 2017).

2.2.5 Fractales

Definición 2.2.15 (Conjuntos) El concepto de conjuntos es fundamental en matemáticas y puede ser pensado como una colección de objetos llamados miembros o elementos del conjunto. En general, a menos que se especifique lo contrario, se denota un conjunto con letras mayúsculas como A , B , X , S , etc., y los elementos con letras minúsculas como a , b , x , etc. Si un elemento pertenece a un conjunto se escribe $a, b \in S$. Si a no pertenece a S se escribe $a \notin S$. Sinónimos de conjunto son *clase*, *colección* y *agregado*. (Spiegel, 1990).

Definición 2.2.16 (Fractal) Un fractal es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que la dimensión topológica. (Mandelbrot, 1982).

Un fractal ideal es una figura geométrica que los matemáticos crean por medio de un algoritmo iterativo o regla repetitiva que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada, y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. Los fractales matemáticos cumplen con la propiedad de autosimilitud. (Rodríguez, 1995).

Un fractal, creado originalmente por Benoit B. Mandelbrot, consiste en fragmentos geométricos con orientación y tamaño variables, pero que exhiben una apariencia similar. Los detalles de un fractal a una determinada escala se asemejan (aunque no necesariamente son idénticos) a las estructuras visibles en escalas mayores o menores. Se ha comprobado que son estadísticamente equiparables, lo cual implica que si se mide alguna propiedad, como la irregularidad, los valores promedio y la desviación estándar son idénticos.

Definición 2.2.17 (Autosimilitud) La propiedad de autosimilitud es una característica fundamental de los fractales. Se refiere a la capacidad de un fractal para exhibir patrones similares a diferentes escalas. Esto significa que cuando se observa un fragmento de un fractal, se pueden encontrar patrones similares a medida que se amplía o reduce la escala de observación.

En otras palabras, un fractal muestra una estructura interna repetitiva que se replica a sí misma a diferentes niveles de detalle. Cada parte del fractal es una versión reducida o ampliada del todo, conservando la misma forma o estructura básica. Esto da lugar a la autosimilitud, donde los detalles se repiten a diferentes escalas. Un ejemplo clásico de fractal autosimilar es el conjunto de Mandelbrot.

2.2.6 Conjuntos Fractales

Definición 2.2.18 (Fractales Geométricos) Los fractales geométricos son objetos matemáticos que exhiben autosimilitud en su estructura. Se caracterizan por tener fragmentos o partes que se asemejan a la forma total del objeto, pero en diferentes escalas. Estos fragmentos se repiten de manera recursiva, creando patrones complejos y detallados.

Los fractales geométricos se construyen utilizando algoritmos matemáticos y son representados gráficamente en forma de imágenes o figuras tridimensionales. Cada parte del fractal es una versión reducida o ampliada del objeto completo, manteniendo las mismas características y patrones a diferentes niveles de detalle.

Un ejemplo icónico de fractal geométrico es el conjunto de Mandelbrot, donde la forma general del conjunto se repite a diferentes escalas y regiones dentro de sí mismo. Otros ejemplos incluyen el triángulo de Sierpinski, el helecho de Barnsley y la curva de Koch.

Estos fractales geométricos tienen propiedades fascinantes, como perímetros y áreas infinitos, así como detalles cada vez más intrincados a medida que se amplían. Debido a su naturaleza autosimilar y su belleza visual, los fractales geométricos han capturado el interés tanto de los matemáticos como de los artistas, y se han utilizado en campos como la generación de gráficos por computadora, la teoría del caos y la modelización de fenómenos naturales.

2.2.7 Dimensión topológica

Definición 2.2.19 Según la definición dada por Afonso (2018), la dimensión de Hausdorff de un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como:

$$\dim_H(F) = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

Si se considera que $\sup \emptyset = 0$, se tiene:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F) \end{cases}$$

Cuando $s = \dim_H(F)$, la medida de Hausdorff $\mathcal{H}^s(F)$ puede tomar los valores de 0, ∞ , o $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Proposición 2.2.2 La dimensión de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:

1. Si $E \subseteq F$ entonces $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$ (Monotonía).
2. Si $\{F_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\} \text{ (Estabilidad numerable).}$$

3. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es numerable, entonces $\dim_H(F) = 0$ (Dimensión de conjuntos numerables).
4. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\dim_H(F) = n$ (Dimensión de conjuntos abierto).

Definición 2.2.20 Un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión topológica k si cada punto de éste tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras intersectan S en un conjunto de dimensión $k - 1$, siendo k el menor entero no negativo con esta propiedad (Afonso, 2018).

2.2.8 Conjunto de Cantor

George Cantor (1845-1918) fue un matemático alemán de la Universidad de Halle, fue el fundador de lo que se conoce hoy en día como Teoría de Conjuntos. El conjunto de Cantor fue publicado en 1883. Dicho conjunto juega un papel importante en varias ramas de las matemáticas, específicamente en el área de Sistemas Dinámicos Caóticos y sirve de modelo esencial para la interpretación de otros objetos fractales.

Se define al Conjunto de Cantor mediante la construcción inductiva en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Es decir, el intervalo cerrado $[0, 1]$ menos su tercio medio es la unión de dos intervalos cerrado ajenos los cuales son las componentes conexas de esta diferencia. Se denota por $T(B)$ al tercio medio de un intervalo cerrado. El conjunto de Cantor es definido como la intersección de la sucesión decreciente de conjuntos cerrados definida recursiva como sigue: $E_0 = [0, 1]$ y para cada número natural entonces $n \geq 1$, $E_n = E_{n-1} \setminus T(B)$ donde B es componente de E_{n-1} . (Sánchez, 2005).

2.2.9 Conjunto de Mandelbrot

El conjunto de Mandelbrot está considerado como el objeto geométrico más complicado creado hasta el momento por el hombre. La frontera que delimita este objeto en el plano complejo es fractal. Este conjunto fue descubierto por primera vez a finales de la década del 70, por Benoit B. Mandelbrot cuando trabajaba en el Centro de Investigación Thomas J. Watson. Con este, se pueden generar imágenes fractales, las cuales son aquellas que se repiten de forma indefinida, pero a una menor escala (Mandelbrot, 1983).

Por sus particularidades, este conjunto tiene aplicaciones en el campo de la ingeniería y la ciencia de la computación, principalmente en la creación de algoritmos criptográficos y el análisis de criptosistemas basados en caos. Esto permite mejorar la seguridad en los algoritmos simétricos y de clave pública mediante un nuevo enfoque para la generación de claves de cifrado en un criptosistema, basado en propiedades de los números en el plano complejo (Alia y Samsudin, 2007). Por lo caótico del proceso de generación de

estos números, se hace difícil predecir la estructura de la clave generada, lo que hace que el criptosistema obtenido sea más eficiente al generar la clave y más seguro (Toledano, O. et al., 2019).

2.2.10 Triángulo de Sierpinski

Otro fractal clásico es 40 años más joven que el conjunto de Cantor. Dicho fractal fue introducido por el gran matemático polaco Waclaw Sierpinski en 1916.

Para la construcción del triángulo de Sierpinski se procederá de la siguiente manera. Dado un triángulo equilátero, se aplica la siguiente regla: colóquense tres reducciones a la mitad de la original en los extremos de dicho triángulo. Si se vuelve a hacer uso de la misma regla se obtiene una ordenación triangular de tres ordenaciones triangulares reducidas, y así sucesivamente. Al cabo de seis repeticiones o iteraciones se empieza a observar con claridad la figura que caracteriza a este ejemplo. Se denominará figura límite, ya que se trata de un valor frontera matemático (el límite) resultante de la sucesión infinita de repeticiones de la regla sobre una determinada figura original. (Rodríguez, 1995).

Toro (2014) crea el conjunto de otra manera: parte de un triángulo equilátero de lado 1 (se puede utilizar para cualquier lado) al que se llamará S_0 . Se representa en el conjunto S_0 un nuevo triángulo, cuyos vértices son los puntos medios de los lados del conjunto S_0 , por lo tanto se obtienen cuatro triángulos equiláteros (de tamaño $\frac{1}{2}$ del triángulo del conjunto S_0) y se elimina el triángulo central, obteniendo el conjunto S_1 . Para crear el siguiente conjunto, en cada uno de los triángulos del conjunto S_1 , se representa un nuevo triángulo, cuyos vértices son los puntos medios de los lados del conjunto S_1 , por lo tanto se obtiene en cada triángulo del conjunto S_1 cuatro triángulos nuevos, se eliminan los triángulos centrales y se obtiene el conjunto S_2 , formado por nueve triángulos. Aplicando el procedimiento anterior k veces, se obtiene el conjunto S_k , tal como se muestra en el anexo 1, figura 3.

2.2.11 Conjunto de Julia

Los conjuntos de Julia, así llamados por el matemático Gaston Julia, son una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función holomorfa. El conjunto de Julia de una función holomorfa f esta construido por aquellos puntos que bajo la iteración de f tienen comportamiento “caótico”. El conjunto se denota $J(f)$. (Toro, 2014).

2.2.12 Curva de von Koch

Helge von Koch fue un matemático sueco quien, en 1904, introdujo lo que ahora se conoce como curva de von Koch; también conocida como curva copo de nieve o isla de von Koch. Existe un método para la construcción geométrica simple de la curva de von Koch. Se empieza con una línea recta, este es el objeto inicial y es llamado el iniciador. Luego se corta en tres partes iguales; se reemplaza la parte central por un triángulo equilátero y se toma esa parte como base. Esto completa la construcción básica. Una reducción de esta figura, hecha de cuatro partes, será reusada para el siguiente estado. A esto se le llama el generador. Así, ahora se repite tomando cada uno de los segmentos iniciales del generador y se vuelve a duplicar el proceso. En la figura 5 del anexo 1 se presenta la construcción de este fractal matemático. (Rodríguez, 1995).

CAPÍTULO III DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

En este capítulo se presenta una descripción de los componentes metodológicos que guiaron el proceso de elaboración de este proyecto de investigación, cuyo objetivo general planteó analizar las funciones de variación acotada en conjuntos fractales. Para esto, se hace referencia del método, diseño, tipo, enfoque y procedimientos requeridos para el desarrollo de la misma.

3.2 Marco Metodológico

3.2.1 Diseño de la investigación

Dada la naturaleza de los conjuntos fractales y las funciones de variación acotada, esta investigación estuvo fundamentada en un diseño no experimental, porque se procuró describir y analizar propiedades de las funciones de variación acotada, sin manipular el estado natural de las variables objeto de estudio. Paralelamente, se utilizó un diseño transversal ya que las propiedades de estas funciones se analizaron en un momento específico, para evitar la variabilidad que podría generar el cambio a lo largo del tiempo (Hernández-Sampieri y Mendoza, 2020).

3.2.2 Tipo de investigación

Esta tesis fue de tipo explicativa-descriptiva, ya que está centrada en proporcionar una caracterización de cómo están definidas estas funciones de variación acotada y analizar y describir su comportamiento al aplicarse sobre los conjuntos autosimilares cuya dimensión de Hausdorff es mayor que su dimensión topológica (Ramos-Galarza, 2020).

3.2.3 Enfoque de la investigación

Esta investigación asumió el enfoque cualitativo porque buscó explorar y analizar las funciones de variación acotada en conjuntos cuyas propiedades topológicas son alta-

mente complejas. Entender las características inherentes y las propiedades de los conjuntos fractales y sus funciones asociadas, que son fenómenos altamente complejos y con numerosas dimensiones (Urbina, 2020).

3.3 Método de la investigación

Este estudio se fundamentó en la aplicación del método analítico-deductivo, pues precisamente esta investigación analizó las funciones de variación acotada en conjuntos fractales. La utilización de este método se justifica en que tal como lo expresa Espinosa (2020), parte de proposiciones generales, y luego se procede a hacer inferencias y caracterizaciones en base a aspectos teóricos planteados.

3.4 Procedimientos

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso realizado en este trabajo de investigación:

1. Selección de un tema relevante en el área que sea viable y realizable.
2. Planteamiento del problema que se abordó en la investigación generando preguntas que fueron respondidas a través de la misma.
3. Establecimiento de los objetivos de la investigación que sirvieron para guiar el trabajo.
4. Revisión de literatura sobre el tema, incluyendo libros, artículos científicos, tesis anteriores y divulgaciones.
5. Presentación del tema de investigación ante la delegación seleccionada para estos fines en la Facultad de Postgrado de la UTECO.
6. Redacción de anteproyecto de tesis siguiendo las pautas y formatos establecidos por la institución.
7. Revisión del anteproyecto de tesis por parte del asesor.

8. Entrega del anteproyecto revisado y firmado por el asesor ante la Facultad de Postgrado.
9. Recepción de los ejemplares del anteproyecto revisados por el jurado de metodología, contenido y redacción.
10. Ejecución de recomendaciones planteadas de parte de los jurados a la revisión del anteproyecto.
11. Aplicación y utilización de las definiciones, proposiciones y demostraciones planteadas en el marco referencial para responder las interrogantes presentadas en el planteamiento del problema de esta investigación.
12. Evaluar los resultados obtenidos y emitir las conclusiones sobre estos.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo se estarán presentando los resultados de esta investigación; iniciando con una extensión del concepto de funciones de variación acotada definidas sobre conjuntos fractales, seguido de distintas demostraciones de propiedades de las funciones de variación acotada y finalizando con la caracterización de las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales por medio de la función escalonada integral.

4.2 Extensión del concepto de funciones de variación acotada definidas sobre conjuntos fractales

Las funciones de variación acotada fueron definidas en el marco referencial, que para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ debe existir un número positivo M tal que

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$$

para toda partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ de $[a, b]$.

Ahora bien, en el marco de los conjuntos fractales, se plantea la siguiente definición, la cual será tomada como referencia para las propiedades y caracterizaciones que se establecerán en las demás secciones de esta presentación de resultados.

Definición 4.2.1 Sea $\alpha \in (0, 1)$ y $1 < p < \infty$. Para un conjunto fractal F y una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, y una subdivisión P ,

$$V_F^{\alpha,p}(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|f(x_{i+1}) - f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}}.$$

La variación fractal p de la función f sobre $[a, b]$, escrita $V^{\alpha,p}(f, [a, b])$, se define como

$$V_F^{\alpha,p}(f, [a, b]) = \sup_P V_F^{\alpha,p}(f, P)$$

donde el supremo se toma sobre todas las subdivisiones P de $[a, b]$.

Una función f se dice que tiene una variación acotada fractal p en el conjunto fractal F de orden α , si $V_F^{\alpha,p}(f, [a, b]) < \infty$. El conjunto de todas las funciones de variación acotada p en F de orden α se denotará por $BV_F^{\alpha,p}[a, b]$. La función de variación fractal p se define como $v_F^{\alpha,p}(x) = V_F^{\alpha,p}(f, [a, x])$ para todo $x \in F$.

También, si $f \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$ entonces

$$BV_F^{\alpha,p}[a, b] = \sup_P \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \cdot |x_i - x_{i-1}|^\alpha \right)^{1/p}.$$

4.3 Propiedades de las funciones de variación acotada en conjuntos fractales

Las funciones de variación acotada presentan diferentes propiedades que han sido establecidas en términos del conjunto de los números reales. En la presente sección, se plantearán estas propiedades pero definidas sobre conjuntos fractales de la forma $\mathbb{R}^\alpha$ y a cualquier subconjunto de él. Aquí se considera

$$\mathbb{R}^\alpha = \mathbb{Q}^\alpha \cup \mathbb{J}^\alpha \quad (\text{números reales de tipo } \alpha).$$

donde $0 < \alpha \leq 1$ y

$$\mathbb{Z}^\alpha = \{0^\alpha, \pm 1^\alpha, \pm 2^\alpha, \dots, \pm n^\alpha, \dots\}$$

(números enteros de tipo α),

$$\mathbb{Q}^\alpha = \left\{ m^\alpha = \left(\frac{p}{q} \right)^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

(números racionales de tipo α),

$$\mathbb{J}^\alpha = \left\{ m^\alpha \neq \left(\frac{p}{q} \right)^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

(números irracionales de tipo α).

Proposición 4.3.1 Sea $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$. Si $F \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$, entonces

$$BV_F^{\alpha,p}[a, b] \geq 0.$$

Demostración Se tiene que $F \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$ entonces se cumple que:

$$BV_F^{\alpha,p}[a, b] = \sup_P \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \cdot |x_i - x_{i-1}|^\alpha \right)^{1/p}$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones P de $[a, b]$, y $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$. Para demostrar que $BV_F^{\alpha,p}[a, b] \geq 0$, se notará que dado que f está en $BV_F^{\alpha,p}[a, b]$, la suma en $(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \cdot |x_i - x_{i-1}|^\alpha)$ no puede ser negativa para ninguna partición P , ya que las potencias p -ésimas de los valores absolutos aseguran que todos los términos son no negativos. Además, $0 < \alpha < 1$ asegura que también los términos que involucran $|x_i - x_{i-1}|^\alpha$ son no negativos. Por lo tanto, cada término en la suma es no negativo. Dado que la suma de términos no negativos también es no negativa, y el supremo de números no negativos siempre es mayor o igual que cero, se puede concluir que $BV_F^{\alpha,p}[a, b] \geq 0$.

Proposición 4.3.2 Sea $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$. Si $f \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$, entonces

$$V_F^{\alpha,p}[a, b] = 0 \text{ si y solo si } F = \text{constante}.$$

Demostración Dado que $f \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$ y $V_F^{\alpha,p}[a, b] = 0$, existe una secuencia de particiones $\{P_n\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|^\alpha \leq \frac{1}{n},$$

para toda partición $P_n = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ y algún n lo suficientemente grande. Como $f \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|^\alpha \leq \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}}.$$

Si se toma el límite cuando n tiende a infinito, se obtiene:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|^\alpha \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{p}}} = 0.$$

Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |F(x_i) - F(x_{i-1})|^\alpha = 0,$$

y, por lo tanto, F tiene variación nula. Dado que F tiene variación nula y $0 < \alpha < 1$, se concluye que F es constante.

Proposición 4.3.3 Sea $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$. Si $f \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$, entonces

$$V_F^{\alpha,p}(F, [a, b]) = V_{-F}^{\alpha,p}(-F, [a, b]).$$

Demostración Sea $f \in BV_f^{\alpha,p}[a, b]$. Se desea demostrar que $V_f^{\alpha,p}(f, [a, b]) = V_{-f}^{\alpha,p}(-f, [a, b])$.

Para simplificar la notación, se denota $V_f = V_f^{\alpha,p}(f, [a, b])$ y $V_{-f} = V_{-f}^{\alpha,p}(-f, [a, b])$.

En primer lugar, notar que la función $-f$ también está en $BV_f^{\alpha,p}[a, b]$, ya que f cumple con la condición de variación acotada. Entonces, se puede escribir la variación acotada de $-f$ como:

$$\begin{aligned} V_{-f} &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n | -f(x_i) - (-f(x_{i-1})) |^\alpha : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^n | f(x_i) - f(x_{i-1}) |^\alpha : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\} = V_f. \end{aligned}$$

Proposición 4.3.4 Sea $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$. Si $f \in BV_f^{\alpha,p}[a, b]$, entonces

$$|f(a) - f(b)| \leq V_f^{\alpha,p}(f, [a, b]).$$

Demostración Sea $f \in BV_f^{\alpha,p}[a, b]$. Considerando una partición finita $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|f(a) - f(b)| &= |f(a) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) - f(b)| \\
&\leq |f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \dots + |f(x_{n-1}) - f(b)| \\
&= \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.
\end{aligned}$$

Ahora, para cualquier partición P , implica que:

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^\alpha \leq \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}}$$

Tomando el supremo sobre todas las particiones P , se obtiene:

$$|f(a) - f(b)| \leq \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^\alpha : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\} = V_f^{\alpha,p}(f, [a, b]).$$

$$\text{Por tanto } |f(a) - f(b)| \leq V_f^{\alpha,p}(f, [a, b]).$$

Proposición 4.3.5 Sea $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$. Si $f \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$, entonces

$$\|f\|_\infty \leq |f(a)| + V_f^{\alpha,p}[a, b].$$

Demostración Sea $f \in BV_F^{\alpha,p}[a, b]$. Para cualquier punto x en el intervalo $[a, b]$, se tiene:

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \\
&\leq |f(x) - f(a)| + |f(a)|.
\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre todos los puntos x en el intervalo $[a, b]$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &\leq \sup_{x \in [a, b]} (|f(x) - f(a)| + |f(a)|) \\
&\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f(a)| + |f(a)|.
\end{aligned}$$

Ahora, nótese que para cualquier partición P del intervalo $[a, b]$, se tiene

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^\alpha \leq \left(\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{\frac{\alpha}{p}} \leq \sup_P \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|^\alpha.$$

Por tanto,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f(a)| \leq V_f^{\alpha, p}[a, b].$$

Finalmente, al combinar las desigualdades anteriores, se tiene que

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_f^{\alpha, p}[a, b] + |f(a)|.$$

4.4 Caracterización de las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales

Teorema 4.1 Sea $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \alpha$. Si $f \in BV_F^{\alpha, p}[a, b]$, entonces f es acotada en $[a, b]$.

Demostración Sea $x \in [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x)| - |f(a)| &\leq |f(x) - f(a)| \\ &= \frac{|f(x) - f(a)|}{|S_F^\alpha(x) - S_F^\alpha(a)|^{\frac{p-1}{p}}} \left(|S_F^\alpha(x) - S_F^\alpha(a)|^{\frac{p-1}{p}} \right) \\ &\leq (V_F^{\alpha, p}(f; [a, x]))^{\frac{1}{p}} (S_F^\alpha(x) + S_F^\alpha(a))^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq (V_F^{\alpha, p}(f; [a, b]))^{\frac{1}{p}} (2S_F^\alpha(b))^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Se concluye que

$|f(x)| \leq |f(a)| + (V_F^{\alpha, p}(f; [a, b]))^{\frac{1}{p}} (2S_F^\alpha(b))^{1-\frac{1}{p}}$ para todo $x \in [a, b]$. Por tanto, f es acotada en $[a, b]$.

Teorema 4.2 Sea $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \alpha$. Si $f \in BV_F^{\alpha, p}[a, b]$ y $c \in (a, b)$, entonces $(V_F^{\alpha, p}(f; [a, b])) = (V_F^{\alpha, p}(f; [a, c])) + (V_F^{\alpha, p}(f; [c, b]))$.

Demostración Si $P = \{a = x_0, \dots, x_{k-1} \leq c \leq x_k, \dots, x_n = b\}$ es cualquier partición de $[a, b]$ y $x_{k-1} \leq c \leq x_k$, entonces

$$\frac{|f(k_x)| - |f(k_{x-1})|^p}{|S_F^\alpha(x) - S_F^\alpha(k_x)|^{p-1}} \leq \frac{|f(k_x)| - |f(c)|^p}{|S_F^\alpha(x) - S_F^\alpha(c)|^{p-1}} \frac{|f(c)| - |f(k_{x-1})|^p}{|S_F^\alpha(c) - S_F^\alpha(k_{x-1})|^{p-1}}.$$

de modo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} &\leq \sum_{i=0}^{k-2} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} + \frac{|f(x_k)| - |f(c)|^p}{|S_F^\alpha(x_k) - S_F^\alpha(c)|^{p-1}} \\ &+ \frac{|f(c)| - |f(k_{x-1})|^p}{|S_F^\alpha(c) - S_F^\alpha(k_{x-1})|^{p-1}} + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} \\ &\leq (V_F^{\alpha,p}(f; [a, c])) + (V_F^{\alpha,p}(f; [c, b])) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$V_F^{\alpha,p}(f; [a, b]) = V_F^{\alpha,p}(f; [a, c]) + V_F^{\alpha,p}(f; [c, b]). \quad (4.1)$$

Para demostrar la otra desigualdad, se tiene que $\varepsilon > 0$ y se selecciona una partición $P = \{a = x_0, x_1, \dots, k_x = c\}$ de $[a, c]$ para el cual

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} \geq V_F^{\alpha,p}(f; [a, c]) - \frac{\varepsilon}{2}$$

y una partición $P' = \{c = x_k, x_{k+1}, \dots, x_n = b\}$ de $[c, b]$ para la que

$$\sum_{i=k}^{n-1} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} \geq V_F^{\alpha,p}(f; [c, b]) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, para la partición $P \cup P'$ de $[a, b]$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} &= \sum_{i=0}^{k-2} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} \\ &+ \sum_{i=0}^{k-2} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} + \frac{|f(x_k)| - |f(c)|^p}{|S_F^\alpha(x_k) - S_F^\alpha(c)|^{p-1}} \\ &+ \frac{|f(c)| - |f(k_{x-1})|^p}{|S_F^\alpha(c) - S_F^\alpha(k_{x-1})|^{p-1}} + \sum_{i=k}^{n-1} \frac{|f(x_{i+1})| - |f(x_i)|^p}{|S_F^\alpha(x_{i+1}) - S_F^\alpha(x_i)|^{p-1}} \\ &\geq V_R^{\alpha,p}(f; [a, c]) + V^{\alpha,p}(f; [c, b]) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto asegura que

$$V_F^{\alpha,p}(f; [a, b]) \geq V_F^{\alpha,p}(f; [a, c]) + V_F^{\alpha,p}(f; [c, b]) - \varepsilon. \quad (4.2)$$

para todo $\varepsilon > 0$ y por lo tanto que

$$V_F^{\alpha,p}(f; [a, b]) \geq V_F^{\alpha,p}(f; [a, c]) + V_F^{\alpha,p}(f; [c, b]). \quad (4.3)$$

De las desigualdades (4.1) y (4.2) se concluye que

$$V_F^{\alpha,p}(f; [a, b]) = V_F^{\alpha,p}(f; [a, c]) + V_F^{\alpha,p}(f; [c, b]).$$

La demostración está completa. Se muestra que $f \in AC_F^\alpha [a, b]$.

Sea $f \in BV_F^{\alpha,p} [a, b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ cualquier subdivisión de $[a, b]$. Sea $\varepsilon > 0$. En el intervalo $[x_1, x_{i+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ se puede encontrar una subdivisión $P_i = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $t_{i,l} < t_{i,l+1}$ para $l = 0, \dots, m_i-1$ tal que

$$\sum_{l=0}^{m_i-1} \frac{|f(t_{i,l+1})| - |f(t_{i,l})|^p}{(S_F^\alpha(t_{i,l+1}) - S_F^\alpha(t_{i,l}))^{p-1}} + \frac{\varepsilon}{n} \geq V_F^{\alpha,p}(f; [x_i, x_{i+1}])$$

esto sigue

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} |v_F^{\alpha,p}(x_{i+1}) - v_F^{\alpha,p}(x_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} V_F^{\alpha,p}(f; [x_i, x_{i+1}]) \\ v_F^{\alpha,p} &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{m_i-1} \frac{|f(t_{i,l+1})| - |f(t_{i,l})|^p}{(S_F^\alpha(t_{i,l+1}) - S_F^\alpha(t_{i,l}))^{p-1}} + \frac{\varepsilon}{n} \right) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Esto muestra que $v_F^{\alpha,p}$ es V_F^α absolutamente continua en un conjunto fractal F .

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En el marco referencial de esta investigación se aborda la extensión del concepto de funciones de variación acotada a conjuntos fractales, analizando sus propiedades y caracterizándolas a través de la función escalonada integral. A continuación, se presentan las principales conclusiones obtenidas:

5.2 Conclusiones

En lo que respecta al objetivo general, analizar las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales, este pudo lograrse de manera satisfactoria sabiendo que este involucra una exploración de propiedades y comportamientos en relación con funciones definidas en conjuntos fractales y que estos pueden diferir de los observados en conjuntos euclidianos.

1. En cuanto a extender el concepto de funciones de variación acotada a conjuntos fractales, esta investigación ha demostrado que el concepto de funciones de variación acotada puede ser extendido y adaptado a conjuntos fractales con la variación fractal p de la función f sobre $[a, b]$, escrita $V^{\alpha,p}(f, [a, b])$, y que se define como

$$V_F^{\alpha,p}(f, [a, b]) = \sup_P V_F^{\alpha,p}(f, P)$$

donde el supremo se toma sobre todas las subdivisiones P de $[a, b]$.

Se ha establecido que es posible definir estas funciones en contextos no euclidianos, lo cual amplía considerablemente su aplicabilidad en diversos campos de las matemáticas y otras disciplinas.

2. Sobre las propiedades de las funciones de variación acotada en conjuntos fractales, durante el estudio, se han analizado detalladamente varias propiedades de las funciones de variación acotada en conjuntos fractales. Se ha observado que conservan

características fundamentales similares a las definidas en conjuntos convencionales, pero también se han identificado propiedades únicas relacionadas con la estructura fractal, lo que enriquece la comprensión de estos objetos matemáticos.

Estas propiedades se demostraron partiendo de las proposiciones:

- a) Dado un número real $0 < \alpha < 1$ y otro número real $1 < p < \infty$, si se considera una función F que pertenece al conjunto de funciones de variación acotada con los parámetros α y p en el intervalo $[a, b]$. Entonces, la función F tiene una variación acotada no negativa en el intervalo $[a, b]$. La variabilidad de la función F en el intervalo $[a, b]$ no puede ser negativa.
- b) Si se tienen dos números reales, tal que 0 es menor que α y α es menor que 1, y también se tiene otro número real 1 que es menor que p y p es menor que infinito y se toma una función f que pertenece al conjunto de funciones de variación acotada con los parámetros α y p en el intervalo $[a, b]$, entonces la variación de f en ese intervalo, con respecto a los parámetros α y p , es igual a 0 si y solo si la función f es una constante en ese intervalo. Es decir, si la variación de f con estos parámetros es nula, entonces la función f se comporta como una constante en ese intervalo.
- c) Con un número real $0 < \alpha < 1$ y otro número real $1 < p < \infty$, si se tiene una función f que pertenece al conjunto de funciones de variación acotada con los parámetros α y p en el intervalo $[a, b]$, entonces la variación de la función F con respecto a los parámetros α y p , en el intervalo $[a, b]$, es igual a la variación de la función $-F$ con los mismos parámetros en el mismo intervalo.
- d) Para el intervalo $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$, si se tiene una función f que pertenece al conjunto de funciones de variación acotada con los parámetros α y p en el intervalo $[a, b]$; la diferencia absoluta entre los valores de la función f en los puntos a y b es menor o igual a la variación de la función f en el intervalo $[a, b]$, calculada con los parámetros α y p .
- e) Para $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$, si la función f que pertenece al conjunto de funciones de variación acotada con los parámetros α y p en el intervalo $[a, b]$,

entonces se puede afirmar que la norma infinito de la función f es menor o igual a la suma de la magnitud del valor de f en el punto a y la variación de la función f en el intervalo $[a, b]$, calculada con los parámetros α y p .

3. Con relación a la caracterización de las propiedades de las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales, se ha presentado una caracterización de las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales, haciendo uso de la función escalonada integral. Este enfoque ha permitido una descripción más precisa y concisa de las propiedades esenciales de dichas funciones en contextos fractales.

Se demuestra que para el intervalo $0 < \alpha < 1$ y $1 < p < \infty$, si se tiene una función f que pertenece al conjunto de funciones de variación acotada con los parámetros α y p en el intervalo $[a, b]$, entonces la variación de f en el intervalo $[a, b]$ es igual a la suma de la variación de f en el intervalo $[a, c]$ y la variación de f en el intervalo $[c, b]$, donde c es un punto intermedio dentro del intervalo $[a, b]$. Es decir, la variación total de f en todo el intervalo es la suma de las variaciones en dos subintervalos disjuntos que cubren el intervalo completo.

5.3 Futuras líneas de investigación

Las funciones de variación acotada definidas sobre conjuntos fractales tienen el potencial de encontrar aplicaciones en diversas áreas interdisciplinarias. Por ejemplo, en la física, la biología y la ingeniería, donde la naturaleza fractal de ciertos fenómenos puede ser modelada y analizada más adecuadamente mediante estas funciones.

Aunque se ha avanzado significativamente en la comprensión de las funciones de variación acotada en conjuntos fractales, quedan desafíos y preguntas abiertas que merecen futuras investigaciones. Entre ellos se encuentran:

- La relación de las funciones de variación acotada sobre conjuntos fractales con otros conceptos matemáticos.

- Propiedades de convergencia de series de funciones de variación acotada en conjuntos fractales.
- Análisis de funciones de variación acotada en espacios métricos fractales.
- Caracterización de funciones de variación acotada en conjuntos específicos.
- El estudio de funciones de variación acotada con variaciones específicas (p - variación, D - variación, variación total y otras) sobre conjuntos fractales.
- La generalización de estos conjuntos a espacios métricos más generales.
- La aplicación a problemas específicos en distintas disciplinas.

Referencias

Afonso, A. (2018). Medida, dimensión y fractales. Universidad de la Laguna.

Alia, M. y Samsudin, A. (2007). New Public-Key Cryptosystem Based on Mandelbrot and Julia Fractal Sets. Asian Journal of Information Technology, 6: 567-575. Barcelona.

Apóstol, T. (1996). Análisis Matemático, segunda edición. Editorial Reverté. Barcelona.

Arenzana, V. (22 de junio de 2023). El Conjunto de Cantor. El paso del conjunto. <https://vicmat.com/conjunto-cantor-paso-conjunto-patologico-modelo-fisico-i/>.

Barrantes, T. y Merentes, N. (2010). Funciones de Variación Acotada Generalizada y un Teorema de Representación Canónica de Chistyakov. Trabajo de tesis. Venezuela.

Bridges, D. (2000). A constructive look at functions of bounded variation. Divulgación. Cambridge University Press. Londres.

Cantor, G. (1883). Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Editorial Crítica.

Courant, R. y John, F. (1999). Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, Vol. I. Editorial Limusa. México.

Dávila, J. (2002). On an open question about functions of bounded variation. Divulgación. Springer-Verlag.

Dragomir, S. (2014). A Companion of Ostrowski's Inequality for Functions of Bounded Variation and Applications. Divulgación. Sudáfrica.

Espinosa, E. (2020). La investigación formativa. Una reflexión teórica. Conrado, 16(74), 45-53.

- Hernández-Sampieri, R., y Mendoza, C. (2020). Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. McGraw-Hill.
- Lang, S. (1983). Real and Functional Analysis. Springer-Verlag. Estados Unidos.
- Mandelbrot, B. (2021). La Geometría Fractal de la Naturaleza. Tusquets Editores. España.
- Mejía, O. (2017). Espacios de Funciones de Variación Acotada Generalizada y Temas Relacionados. Trabajo de tesis doctoral. Venezuela.
- Peitgen, H.; Jurgens, H.; Saupe, D. (1992). Chaos and Fractals. Springer-Verlag.
- Perrin, J. (1913). Les Atomes. Editora Félix Alcan. Francia.
- Quintero, J. (2013). Funciones de Variación Acotada. Trabajo de tesis. México.
- Ramos-Galarza, C. A. (2020). Los alcances de una investigación. CienciAmérica, 9(3), 1-6.
- Restrepo, D.; Mesa, O. y Arango, H. (2001). Conjuntos fractales en el tiempo y en el espacio. Divulgación. Colombia.
- Rodríguez, R. (1995). La Teoría de Fractales: Aplicación Experimental e Implicaciones en la Metodología de la Ciencia. Trabajo de tesis. Estados Unidos.
- Rosen, K. et al (2004). Matemática discreta y sus aplicaciones. McGraw-Hill. España.
- Sánchez, A. (2005). Propiedades del Conjunto de Cantor. Divulgación. México.
- Spiegel, M. (1990). Theory and Problems of Real Variables. McGraw-Hill. Colombia.

Stein, E. y Shakarchi, R. (2005). Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. Princeton University Press. Estados Unidos.

Toro, V. (2014). Fractales matemáticos. Tesis de grado. España.

Urbina, E. C. (2020). Investigación cualitativa. Applied Sciences in Dentistry, 1(3).

Wiener, N. (1924). The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, Massachusetts J. Math. And Phys. Estados Unidos.

Young, L.C. (1937). Sur une generalization de la notion de variation de puissanc p-ième bornée au sens de N. Wiener, et sur la convergence des séries de Fourier, C. R. Acad. Sci. Paris.

ANEXO

Anexo 1 Conjuntos Fractales comunes.

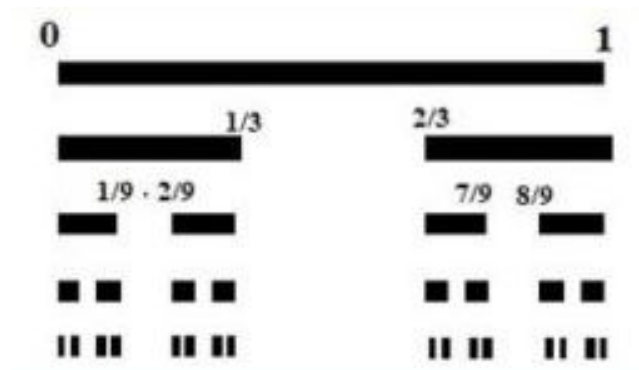


Figura 1. Conjunto de Cantor (vicmat.com).

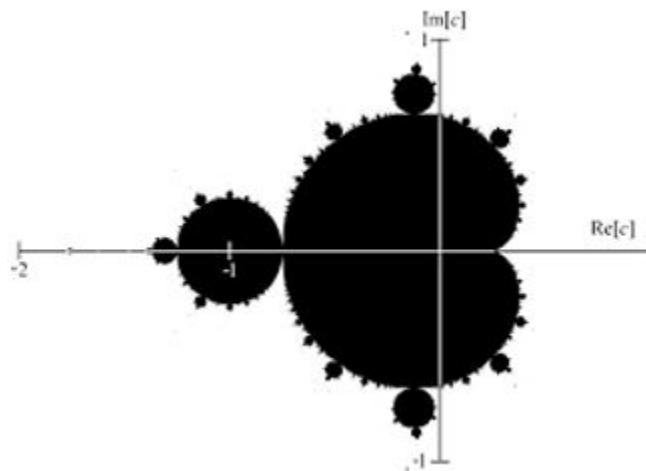


Figura 2. Conjunto de Mandelbrot (Alia y Samsudin, 2007).

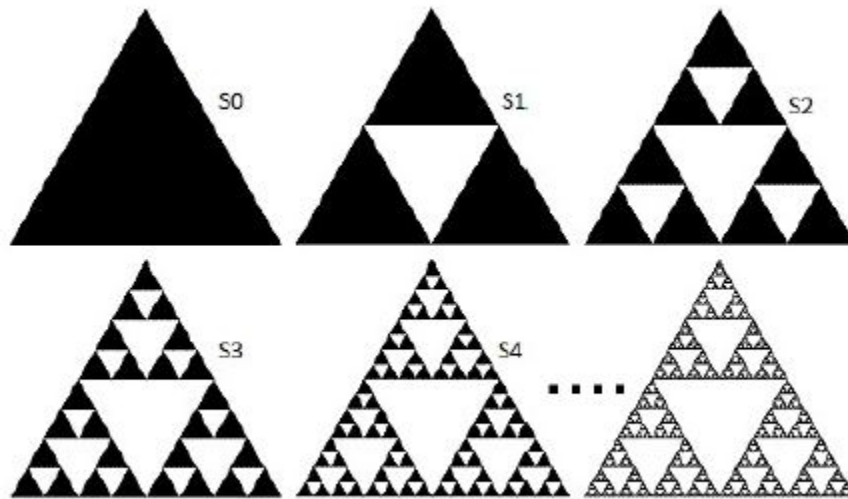


Figura 3. Triángulo de Sierpinski (Toro, 2014).

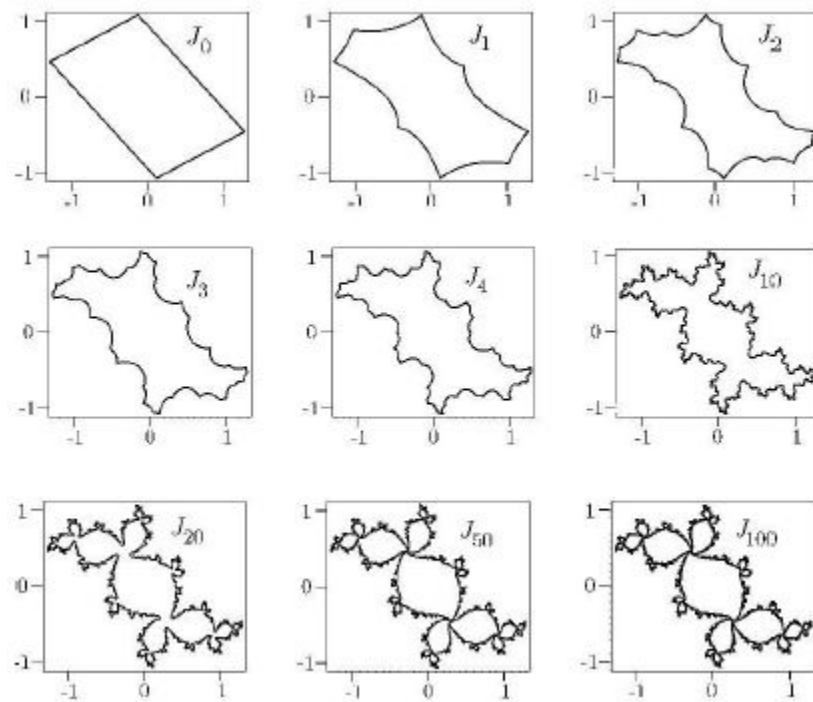


Figura 4. Conjunto de Julia (Toro, 2014).

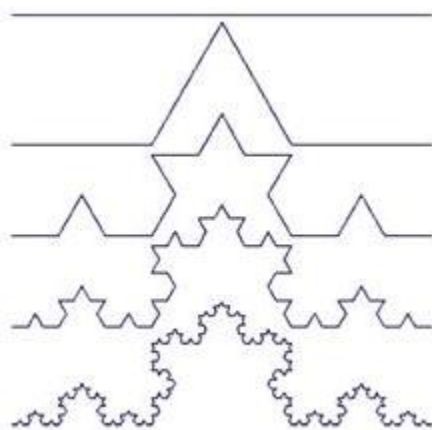


Figura 5. Curva de von Koch (prepa8.unam.mx).