

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de postgrado para Optar por el Título de Magister en Matemática

TÍTULO

Convergencia semilocal del método de Chun aplicado a la ecuación de Kepler

SUSTENTANTE

Diosmery Castro Villa De Geraldino

ASESOR

José Miguel Gómez Guzmán, MA

Cotuí, Prov. Sánchez Ramírez, Rep. Dom.

Año Académico 2023.

TÍTULO
CONVERGENCIA SEMILOCAL DEL MÉTODO DE CHUN APLICADO
A LA ECUACIÓN DE KEPLER

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación , es responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y consultas bibliográfica se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que, se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo se requiere de su autorización.

Convergencia semilocal del método de Chun aplicado a la ecuación de Kepler

Composición del tribunal evaluador

Inocencia Merejo

Julio Manzueta

Nelson Sánchez

Índice general

AGRADECIMIENTOS	VI
DEDICATORIA	VII
Resumen	VIII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	1
1.2.2 Antecedentes académicos	4
1.3 Planteamiento del problema	5
1.4 Justificación	6
1.5 Objetivos	7
1.5.1 Objetivo general	7
1.5.2 Objetivos específicos	7
1.6 Alcances y límites	7
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	8
2.1 Introducción	8
2.2 Marco teórico	8
2.2.1 Métodos iterativos	8
2.2.2 Intervalo de existencia	8
2.2.3 Intervalo de unicidad	9
2.2.4 Convergencia	9
2.2.5 Excentricidad elíptica (e)	9
2.2.6 Anomalías	10
2.2.7 Obtención de la ecuación de Kepler	11
2.2.8 Polinomios de Adomian	14
2.3 Descripción del método de Chun	15
2.3.1 Construcción del método	16
2.3.2 Convergencia semilocal del método de Chun	18

CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO	19
3.1 Introducción	19
3.2 Marco metodológico	19
3.2.1 Diseño de la investigación	19
3.2.2 Tipo de investigación	19
3.2.3 Método de la investigación	19
3.2.4 Enfoque de la investigación	20
CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE RESULTADOS	21
4.1 Introducción	21
4.2 Resultados principales condiciones de García	21
4.3 Existencia de Solución Para la ecuación de Kepler	25
4.4 Unicidad de soluciones para la ecuación de Kepler	26
4.5 Existencia de Soluciones para la Ecuación de Kepler con Casos Reales . . .	26
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	27
5.1 Introducción	27
5.2 Conclusiones	27
5.3 Líneas futuras de investigación	27
Bibliografía	28
Anexo	30
Calculo de los intervalo de existencia y unicidad	31
Imágenes y gráficos	33

AGRADECIMIENTOS

A Dios: A ti señor y grandísimo padre que has sido guía, consejero, amigo y ante todo sostén primordial, la luz que ha iluminado todo el camino permitiéndome alcanzar esta meta, para seguir avanzando cada día mas a la cima del éxito con humildad.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO): Por abrirme la puerta de esta alta casa de estudio, y por la oportunidad de poder mejorar y seguir ampliando mis conocimientos de una manera constructiva y significativa.

A mi asesor José Miguel Gómez Guzmán : Por guiarme con sabiduría y por la entrega absoluta de su persona para la eficiencia y calidad en la realización de esta investigación.

Al coordinador Manuel Arismendy Batista: Por su apoyo y entrega en todo el transcurso de esta maestría.

A los facilitadores: Por brindarme siempre su cariño, su apoyo y su respeto. Por estar siempre dispuestos y colaborar con mi formación académica, con la ampliación de mis conocimientos para aportar mucho más a la sociedad en sentido general, muy especialmente a los alumnos.

A mi familia: por siempre estar ahí apoyándome en cada momento y tener plenamente confianza en mí, además de motivarme en los momentos difíciles.

DEDICATORIA.

A Dios: Señor omnipotente por ser un guía y amigo que siempre estuvo ahí apoyándome en todo momento. A pesar de que hubo dificultades me diste fortaleza para seguir adelante. Te dedico este proyecto a ti DIOS.

A mis padres Camilo Castro y Sonia Villa Santos: por ser unos padres ejemplares y darme esos consejos que me ayudaron a seguir luchando para alcanzar mis sueños. Por su apoyo incondicional y su compañía. Los amo.

A mis hermanos Kelvin, Jhony, Feliz, Williams y Daniel: Porque a pesar de que no estuvieron conmigo siempre de una manera u otra aportaron su granito de arena.

A mi esposo Faustino Geraldino De La Cruz: Por estar siempre a mí lado, brindándome todo tu amor y comprensión. Este logro también es tuyo mí vida, te amo.

A mis hijos Diosmerlyn Sophia y Diorlyn De Jesús: por ser mi motor de lucha para seguir adelante y ser motivo de bendición para lograr este meta. Este logro es de ustedes. Los amo mis bebés.

A mi equipo de estudio (T.E.A.M.): Yoemily, Wilmer y Solenny por ser parte de este gran proceso de formación, no tengo palabras para expresar el agradecimiento y el amor que siento por todos ustedes.

A mis facilitadores: Gracias por guiarme para ser cada día mejor persona, gracias por ejercer tan bella profesión y sembrar siempre conocimiento, por compartir ante mí vivencias únicas y enseñanzas magníficas, quiero expresar mí más sinceros sentimientos de gratitud y mi infinitas gracias.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
UTECO

Facultad De Postgrado y Educación Continuada



Maestría en matemáticas

Título: Convergencia Semilocal del Método de Chun Aplicado a la Ecuación de Kepler

Sustentante: Diosmery Castro Villa De Geraldino

Dirigido por: José Miguel Gómez Guzmán

RESUMEN

La resolución de ecuaciones no lineales es un aspecto esencial en diversas áreas de estudio, como en el caso de la ecuación de Kepler en astronomía. Por esta razón, esta investigación tiene como objetivo aplicar el método de Chun y su convergencia semilocal a dicha ecuación. Específicamente, se busca caracterizar los valores de la excentricidad para los cuales esta ecuación tiene solución, y también determinar los intervalos donde existen soluciones únicas, utilizando la convergencia semilocal del método de Chun en la ecuación de Kepler. A través de un enfoque analítico y explicativo, se busca brindar respuestas sobre por qué ocurren estos fenómenos, utilizando el método deductivo. Se demostrará que el punto de partida y el método utilizado convergen, y se presentarán los intervalos donde se garantiza la existencia y unicidad de la solución.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se expone el progreso histórico de la ecuación de Kepler, junto con los antecedentes académicos relacionados. Se verifica la validez de los estudios previos en relación a la convergencia semilocal. También se presenta el planteamiento y formulación del problema, así como los objetivos generales y específicos que esta investigación busca lograr. Además, se proporciona una justificación para llevar a cabo este estudio.

1.2 Antecedentes

1.2.1 Antecedentes históricos

1.2.1.1 Desarrollo histórico de método de Chun

Prabook (2021), Changbum Chun, profesor de matemáticas coreano, investigador. Los logros incluyen primero diseñar muchos métodos iterativos novedosos para resolver ecuaciones no lineales, proponer métodos numéricos para resolver problemas no lineales en física matemática. Nació el 28 de octubre de 1964 en la ciudad de Wonju, Kangwon-do, República de Corea. Hijo de Seomann Chun y Oksoon Jung. Es profesor Universidad de Tecnología y Educación de Corea, Cheonan, República de Corea, desde 2002, Departamento de Matemáticas Universidad Sungkyunkwan, Suwon, República de Corea, desde 2008.

Chun (2005), Considera el método de Newton como uno de los métodos iterativos más poderosos y conocidos, que converge de forma cuadrática. El mismo establece que ha habido avances en métodos iterativos con un mayor orden de convergencia que requieren el cálculo de derivadas de orden inferior tanto como sea posible. En esta dirección, desarrolla otro enfoque basado en el método de descomposición de Adomian para desarrollar métodos iterativos para resolver la ecuación $f(x) = 0$. Sabiendo que el método de descomposición de Adomian considera la solución como una serie infinita que suele converger hacia una

solución precisa, y ha sido aplicado con éxito a una amplia clase de ecuaciones funcionales en los últimos 20 años. El método de Adomian también ha sido modificado para construir esquemas numéricos, como lo que utiliza Chun para la construcción del mismo. **Desarrollo**

histórico de la Ecuación de Kepler

Colwell (1993), Desde los tiempos remotos el hombre ha presentado inconvenientes para determinar la posición de los planetas en los firmamentos, ya sea por la controversia religiosa como también por la parte práctica.

Actualmente, por el avance del Cálculo Infinitesimal y la Mecánica Celeste, para determinar la posición, ya sea de un planeta o satélite, o algún cuerpo que se encuentre sometido a la atracción gravitacional de otros y se hace necesario darle solución a la ecuación de Kepler:

$$M = E - e \sen E$$

Si conociendo los valores de M y e , entonces sólo resta encontrar el valor de E . Los criterios que pertenecen a esta ecuación tienen una buena interpretación física. Donde: M es la anomalía media o lo que se conoce como el ángulo girado por un planeta cuyo movimiento es circular uniforme desde un punto conocido, por tanto, $M \in [0, 2\pi]$; e es la excentricidad de la elipse, la cual describe el planeta bajo el intervalo $0 \leq e < 1$; E es la anomalía excéntrica, es decir, el ángulo que le corresponde a la posición del planeta en los parámetros de una elipse.

Dada la situación de que esta ecuación no tiene un carácter lineal, pues por tal razón se convirtió en una de las primeras que se intentó resolver de forma numérica. Brahe, quizás el observador más grande de la historia a simple vista se traslada a Praga y toma a Kepler como su asistente. Aunque ellos tenían punto de vista de manera científica diferentes. Una de ella era que Kepler creía en el modelo de Copérnico, con el sol en el centro mientras que

Brahe creía en que la Tierra era el centro del universo.

Al fallecer Brahe y quedando en el poder las tablas de observaciones de Marte, Kepler se lanza al reto de domar la órbita de este planeta, el más díscolo de todos, ya que era el que más se desviaba de su posición predicha. Luego se da cuenta de que hay que rechazar la teoría de los movimientos circulares uniformes, después de probar con una órbita circular donde el Sol se encontraba en el punto ecuante. Kepler renuncia a la hipótesis de que la órbita tenía que ser circular cuando observó que la mayoría de las posiciones de Marte encajaban perfectamente en la nueva órbita así definida, dos observaciones se separaban unos 8 grados de la posición teórica.

Luego tras probar con varias curvas, concluye que los planetas se movían en elipses. De esta manera, establece tres leyes empíricas, que se conocen como las tres leyes de Kepler las cuales se enuncian de la siguiente forma:

1. Un planeta gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica con el Sol ubicado en uno de los focos.
2. La recta imaginaria que une al Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período orbital del planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.

Una implicación inmediata de estas tres leyes, en particular la segunda, es que el planeta no se mueve con movimiento uniforme, desplazándose más rápido cuando se encuentra cerca del Sol que cuando se encuentra más alejado. Lo cual dificulta el cálculo de la posición del planeta en su órbita y para este caso Kepler dedujo lo que se denomina Ley Horaria del movimiento planetario, que trata de dar la posición del planeta en función del tiempo. Y es aquí donde tiene origen la ecuación de Kepler, ya que es preciso resolverla para poder determinar la posición de un planeta para un instante de tiempo dado.

1.2.2 Antecedentes académicos

Al analizar las investigaciones previas sobre la convergencia semilocal de métodos iterativos aplicados a ecuaciones, se ha descubierto que:

Argyros & Hillout (2011), en su investigación titulada “On the semilocal convergence of the Halley”, presentaron nuevos resultados de convergencia semilocal para el método Halley, con el propósito de aproximar una solución local única de una ecuación no lineal en un espacio de Banach. Estos resultados muestran condiciones de convergencia suficientes que pueden ser menos restrictivas, mientras que los límites de error en las distancias involucradas son más precisos. Se emplea un primer enfoque basado en el análisis de tipo Kantorovich, y un segundo enfoque que utiliza una nueva idea de funciones recurrentes, permitiendo así una comparación entre ambos enfoques. Además, se proporciona un ejemplo numérico para validar los resultados teóricos obtenidos.

Diloné (2013), en su tesis doctoral “Método iterativos aplicados a la ecuación de Kepler”, estableció un punto de partida del valor $E_0 = M$ en los teoremas de convergencia semilocal de Kantorovich, Gutiérrez, α -teoría de Smale y la α -teoría de Wang-Zhao, en los cuales se garantiza la convergencia del método de Newton-Raphson, así obtuvo resultados sobre su existencia y unicidad lo cuales aseguran que la ecuación de Kepler tiene solución.

Diloné & Veras (2017), en su artículo científico titulado “Semilocal Convergence Newton Method Applied to Kepler Equation: New Results” consideraron un punto de partida del valor $E_0 = \pi$ en los teoremas de convergencia semilocal de Kantorovich, Gutiérrez, α -teoría de Smale y la α -teoría de Wang-Zhao, los cuales compararon las condiciones de convergencia obtenidas.

Gómez (2019b), en su tesis titulada “Convergencia Semilocal del Método de Whitaker aplicado a la ecuación de Kepler” utilizó los casos de $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$ de la

convergencia semilocal bajo las condiciones de Raluca en el método de Whittaker aplicada a la ecuación de Kepler, para los cuales se obtiene que $e \leq 0.5858$ y $e \leq 0.1761$ respectivamente. Siendo el de mayor rango de solución el caso de $E_0 = M$.

Gómez (2019a), En su tesis de maestría realizó una investigación titulada “Convergencia Semilocal del Método de Halley aplicado a la ecuación de Kepler”, en la cual determinó que el método de Halley tiene convergencia en los caso de $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$ para los cuales obtuvo diferentes puntos de inicio. Caracterizando los valores de la excentricidad, para el teorema de Zhen el cual dio el valor más alto en el caso del punto de inicio $E_0 = M$ mientras que para el punto de inicio $E_0 = \pi$ lo obtuvo bajo el teorema de Zhen-Robbie.

Almonte (2022), En su investigación “Convergencia Semilocal del Método de Steffensen aplicado a la ecuación de Kepler”, examinó los casos de $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$ para analizar la convergencia semilocal bajo las condiciones de Velasco en el método de Steffensen aplicado a la ecuación de Kepler. Los resultados mostraron que, para el caso de $E_0 = M$, se obtuvo una solución con $e \leq 0.42749$, mientras que para el caso de $E_0 = \pi$, se obtuvo una solución con $e \leq 0.011422$. Por lo tanto, se encontró que el caso de $E_0 = M$ tiene un rango de solución mayor en comparación con el caso de $E_0 = \pi$.

1.3 Planteamiento del problema

En el campo del análisis numérico, una de las cuestiones más importantes es la localización de las raíces de una ecuación de la forma

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

donde $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable con raíces simples, es decir, si $f(\alpha) = 0$, entonces $f'(\alpha) \neq 0$.

Esta necesidad surge no solo en matemáticas, sino también en diversas ramas de la

ciencia como la física, ingeniería, astronomía, entre otras, que a menudo requieren resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales.

Una de estas ecuaciones relevantes es la ecuación de Kepler, que es fundamental en astronomía. Esta ecuación se puede expresar en términos de funciones, por ejemplo, como $f(E) = E - e \sin(E) - M$, donde la excentricidad e juega un papel vital en la descripción de órbitas planetarias, satelitales, cometas y el lanzamiento de proyectiles.

Otro aspecto destacado es la convergencia semilocal de un método iterativo, la cual permite determinar, a partir de un punto inicial, si el método utilizado converge o no. Esta propiedad es de gran importancia, ya que a partir de dicho punto se pueden construir intervalos de unicidad y de solución cuando se aplica a una función específica, como en el caso de la ecuación de Kepler.

A través de la aplicación de la convergencia semilocal del método de Chun a la ecuación de Kepler, surgen las siguientes preguntas e interrogantes:

- ¿Cuáles valores de la excentricidad elíptica aseguran la convergencia del método de Chun?
- A partir de la obtención del punto de excentricidad e , ¿cuáles serían los intervalos de existencia y unicidad de solución que presentaría este método iterativo?

1.4 Justificación

Las ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales se encuentran en diversos campos de la ciencia. Estos problemas no tienen una solución analítica conocida, por lo que se requiere utilizar técnicas numéricas para obtener una solución aproximada.

Las técnicas numéricas utilizadas para resolver ecuaciones y sistemas no lineales se basan en métodos iterativos. En este contexto, la investigación presentada tiene como objetivo determinar la convergencia semilocal del método de Chun aplicado a la ecuación de Kepler, que es una ecuación importante en astronomía. La ecuación de Kepler utiliza

la anomalía para describir la posición de los cuerpos celestes en su órbita. Por lo tanto, la elección de este tema se justifica por su aplicación en la determinación de las órbitas planetarias, donde es crucial conocer el valor de la excentricidad e .

Además, es importante destacar la relevancia de la convergencia semilocal de un método iterativo cuando se aplica a una función. Este tipo de convergencia permite conocer el punto de excentricidad de la ecuación de Kepler en el que se asegura que se obtendrá un resultado positivo.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Aplicar la convergencia semilocal del método de Chun a la ecuación de Kepler.

1.5.2 Objetivos específicos

- Caracterizar, mediante la aplicación de la convergencia semilocal del método de Chun, los valores de la excentricidad para los cuáles la ecuación de Kepler tiene solución.
- Determinar los intervalos de existencia y unicidad de solución, mediante la aplicación de la convergencia semilocal del método de Chun a la ecuación de Kepler.

1.6 Alcances y límites

Esta investigación se centra en el campo de la Matemática Pura, específicamente en el área del Análisis Funcional, con un enfoque en el estudio de la convergencia. En particular, se explorará la convergencia semilocal del método de Chun aplicado a la ecuación de Kepler. Se enfocará en esta modalidad de convergencia, excluyendo tanto la convergencia global como la local, para analizar de manera específica la eficacia y el comportamiento del método de Chun en relación con la ecuación de Kepler.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta el marco teórico, donde expone un conjunto de definiciones, teoremas y métodos, el cual va servir de soporte para el desarrollo de esta investigación.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Métodos iterativos

Según Chicharro (2017), los métodos iterativos son aquellos que permiten ciertas condiciones para lograr una raíz n de una ecuación de la forma $f(x) = 0$, donde f es una función definida en los reales bajo un intervalo abierto I , es decir, $f : I \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$.

Los métodos iterativos son aquellos que calculan aproximaciones de forma progresiva, para lo que sería la solución de un problema. Matemáticamente expresado, este consiste en establecer un proceso de mejora sobre una solución aproximada. Es decir, repetir un proceso sobre cada una de las soluciones obtenidas hasta que se pueda dar respuesta a los requisitos establecido. Por lo general, en los métodos iterativos se parte con una solución que sea aproximada, para luego utilizar este resultado y construir otra aproximación por medio de recurrencia, así sucesivamente hasta obtener la aproximación a la solución buscada.

2.2.2 Intervalo de existencia

Cascales (2012), plantea que sea g una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b] \rightarrow g$ tendrá un punto fijo.

De acuerdo con la figura Anexo B 1, x tendrá los valores entre a y b , por lo que $g(x)$ también debe contener los valores en el mismo intervalo, para así cumplir que tiene un punto fijo.

2.2.3 Intervalo de unicidad

En el 2012, Cascales expresa que si se tiene $|g'(x)| < 1, \forall x \Rightarrow y = g(x)$ no puede cortar la recta $y = x$ más de una vez, por lo que el punto fijo deberá ser único, como se puede observar en la figura Anexo B 2.

Teorema 2.1 Existencia y unicidad de soluciones Según Cascales (2012) manfiesta que tanto la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $D_y f(x, y)$ son continuas en algún rectángulo R en un plano xy que contienen el punto (a, b) en su interior, entonces, para algún intervalo abierto I conteniendo el punto a el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b$ tiene una y sólo una solución que está definida en el intervalo I .

2.2.4 Convergencia

Diloné (2013) indica que debemos ser lo más reflexivo posible para saber que la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ hacia un punto x_p no siempre llegaría a suceder. Es por eso que se deben de establecer ciertas condiciones sobre la función para que esto ocurra , ya sea partiendo desde un punto x_0 o la propia raíz x_p . En tal sentido, se pueden establecer 3 tipos de convergencia para obtener estos resultado los cuales son:

- **Local:** En la cual se establecen condiciones sobre la raíz x_p .
- **Semilocal:** Se establecen condiciones sobre el punto de partida x_0 .
- **Global:** Se establecen condiciones sobre un intervalo.

2.2.5 Excentricidad elíptica (e)

Requena (2021), La excentricidad de una elipse (e) es un valor que determina la forma de la elipse, en el sentido de si es más redondeada o si se aproxima a un segmento. Sea c la semi-distancia focal y a el semieje mayor.

La excentricidad puede tomar valores entre 0 y 1 ($0 < e < 1$). Tiende a 0 cuando la elipse tiende a una circunferencia. En este caso el semieje menor tiene a igualarse al mayor y los focos (F_1 y F_2) tienden a confundirse con el centro de la elipse. Cuando la excentricidad crece y tiende a 1, la elipse se aproxima a un segmento.

2.2.6 Anomalías

Roy (2005). La posición de instantánea del satélite dentro de la órbita se describe por medio de una cantidad angular conocida como anomalía. Existen varios tipos de anomalías según considere el ángulo medido desde el foco de la órbita (geocentro) o bien desde el centro de la órbita:

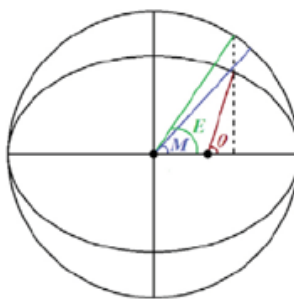


Figura 2.1: Descripción de las anomalías verdadera θ , excéntrica E y media M de la órbita de un planeta.

2.2.6.1 Anomalía verdadera (θ),

Es el ángulo, medido en el plano orbital y desde el geocentro, entre la línea de ápsides (perigeo-geocentro-apogeo) y la posición del satélite (Ver 2.1).

2.2.6.2 Anomalía excéntrica (E)

Es el ángulo, medido en el plano orbital y desde el centro de la órbita, entre la línea de ápsides y la posición del satélite proyectada a una circunferencia de radio del semieje mayor de la elipse (Ver 2.1).

2.2.6.3 Anomalía media (M)

Es el ángulo descrito con vértice en el foco, en sentido antihorario y a partir de la dirección del periastro, por un astro ficticio que gira con velocidad angular igual al movimiento medio (Ver 2.1).

2.2.7 Obtención de la ecuación de Kepler

Colwell (1993). De la forma que existen para obtener la ecuación de Kepler, aquí se centrará en la geométrica, haciendo uso de las transformaciones en coordenadas polares, las cuales parte desde el foco de la elipse, mientras que otra parte desde el centro de la elipse. Si partimos de que los planetas se mueven describiendo una órbita elíptica con una excentricidad e y partimos de que el Sol está en el foco de una elipse con centro en $S = (0, 0)$, usando la figura Anexo B 3, Sea a el semieje mayor de la elipse, b el semieje o lado menor, llamando C al centro de dicha elipse, al punto más cercano de la órbita de un planeta con respecto al Sol (S) o perihelio lo llamaremos A , siendo T el período que tarda este en dar una vuelta completa. Si tomamos las coordenadas Cartesianas (x, y) y las polares en su forma r, θ y llamamos lugar o posición que ocupa el planeta en un tiempo t a la función $P = P(t)$ es decir,

$$P = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Como se observa en la figura Anexo B 3, θ recibe el nombre de anomalía verdadera el cual corresponde al ángulo girado por el planeta desde su perihelio. En la ecuación de Kepler se busca como objetivo relacionar el ángulo θ con el tiempo t , el cual hace referencia a lo que ha transcurrido desde que el planeta paso por el perihelio. En tal sentido, se debe introducir la denominada anomalía media M como un ángulo auxiliar, para así poder establecer el desplazamiento del planeta desde el perihelio, todo esto pensando en que se lleva una velocidad uniforme. Si se le llama τ al tiempo en el cual el planeta pasa por el punto A , nos arrojaría que:

$$M = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) \quad (2.1)$$

Si dibujamos una circunferencia de radio a y centro C y luego trazando un ángulo reto al eje mayor que pase por P y a este recto lo nombramos con Q en su intersección con la circunferencia, entonces puede observarse la anomalía excéntrica nombrada para este caso como E que sería lo mismo que $\angle QCA$ Ver figura Anexo B 3. Plasmando un punto Y sobre la circunferencia de centro C y radio a de tal forma que el $\angle YCA$ corresponda con la anomalía media M , ya que ésta no posee relación muy clara con la elipse, tal como la pueden tener la excéntrica y la verdadera que se pueden notar geométricamente más rápido. Ahora bien si aplicamos la ley de las áreas o mejor conocida como la segunda ley de Kepler al sector de la elipse que corresponde a PSA y lo denotamos como A_1 para el área, nos resultaría como

$$\frac{A_1}{\pi ab} = \frac{t - \tau}{T} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} abM \quad (2.2)$$

Si usamos el área de un sector circular y la aplicamos sobre la figura Anexo B 3 bajo la coordenada de YCA nos resultaría como $\frac{1}{2}a^2M$ lo que nos lleva a afirmar que el sector elíptico PSA estaría contenido $\frac{a}{b}$ veces en el sector YCA . Aplicando Geometría en la Figura Anexo B 3 se puede determinar que el $\cos E = \frac{x+CS}{a}$, luego por definición de excentricidad se tiene que $e = \frac{CS}{CA}$ de donde $CA = a$, por tanto:

$$x = a(-e + \cos E). \quad (2.3)$$

Si tomamos un centro para la elipse en $C = (-CS, 0)$, podríamos escribir la ecuación en su forma de coordenada cartesiana de la siguiente manera :

$$\frac{(x + CS)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 = \frac{(a \cos E)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Sabiendo que $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ y retomando la figura Anexo B 3 para determinar que $y = b \sin E$, se puede decir que:

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (2.4)$$

Podemos escribir la distancia que existe entre el foco S y el punto P de la elipse, es decir:

$$r = x^2 + y^2 \quad (2.5)$$

para luego sustituir (2.3) y (2.4) en la ecuación (2.5) para así ilustrar la distancia entre el foco S y P de la siguiente manera:

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.6)$$

Recordemos que la ecuación de una elipse en coordenada polar se expresa de la siguiente manera:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad (2.7)$$

Luego si igualamos (2.6) y (2.7) podemos determinar que:

$$\cos \theta = \frac{1}{e} \left(\frac{1 - e^2}{1 + e \cos E} - 1 \right) = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad (2.8)$$

luego de la expresión (2.8) podemos escribir las siguientes identidades:

$$1 - \cos \theta = \frac{(1 + e)(1 - \cos E)}{1 - e \cos E} \quad (2.9)$$

$$1 + \cos \theta = \frac{(1 - e)(1 + \cos E)}{1 - e \cos E} \quad (2.10)$$

luego si usamos la identidad trigonométrica de la tangente de ángulo medio, y usamos (2.9) y (2.10) podemos deducir la igualdad:

$$\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \left(\frac{E}{2} \right). \quad (2.11)$$

La identidad mostrada en (2.11) nos da la correspondencia que existe en la anomalía verdadera y la excéntrica, ahora lo que nos resta determinar es la conexión de la anomalía media M , con una de las dos, ya relacionada. Para poder establecer esta conexión vamos a considerar el segmento SA de la Figura Anexo B 3 localizando el punto R , el cual se puede obtener trazando una perpendicular desde $Q \perp SA$ y que pase por P . Ahora bien, si describimos el área de la regiones $PSA = A_1$, $PSR = A_2$ y $PRA = A_3$. Luego A_1 estará

dada por 2.2. Para determinar A_2 vamos a utilizar (2.3) y (2.4) para así escribir a

$$A_2 = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2}ab \sin E(-e + \cos E) \quad (2.12)$$

Si expresamos $QRA = A_4$, $QCA = A_5$ y $QCR = A_6$. Sin pérdida de generalidad sigue que el área bajo la curva (circunferencia) es $x^2 + y^2 = a^2$ y para la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ así

$$A_3 = \frac{b}{a}A_4 = \frac{b}{a}(A_5 - A_6) = \frac{ba}{2}(E - \sin E \cos E). \quad (2.13)$$

Luego $A_1 = A_2 + A_3$, si utilizamos la equivalencia (2.2), (2.12) y (2.13) sigue que

$$M = E - e \sin E,$$

La cual sería la grandiosa ecuación de Kepler.

2.2.8 Polinomios de Adomian

Según Cisneros(2017) se debe Considerar la ecuación no lineal de la forma $f(x) = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ un cero simple de f . Se supone que la ecuación no lineal puede ser transformada de la siguiente manera

$$h = c + N(h)$$

donde c es una constante y N es una función no lineal. La técnica de descomposición de Adomian consiste en calcular la solución de h mediante una serie convergente de la forma:

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$$

y la función no lineal N se descompone como:

$$N(h) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

donde los A_n son funciones llamadas polinomios de Adomian, que dependen de $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n$ y están dados por:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Los primeros tres polinomios de Adomian son

$$\begin{aligned} A_0 &= N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i \right)_{\lambda=0} = N(h_0) \\ A_1 &= \frac{d}{d\lambda} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i \right) \right]_{\lambda=0} \\ &= N' \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} i \lambda^{i-1} h_i \right)_{\lambda=0} = h_1 N'(h_0) \\ A_2 &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i \right) \right]_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{2} \left[N'' \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} i \lambda^{i-1} h_i \right)^2 + N' \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \lambda^{i-2} h_i \right) \right]_{\lambda=0} \\ &= \frac{1}{2} [h_1^2 N''(h_0) + 2h_2 N'(h_0)] = \frac{1}{2} h_1^2 N''(h_0) + h_2 N'(h_0) \end{aligned}$$

de esta manera, otros polinomios de Adomian pueden ser generados de manera similar.

Como

$$h = c + N(h)$$

se tiene :

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n = c + \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Por ser la serie h convergente, se tiene la siguiente importante relación

$$h_0 = c \quad \text{y} \quad h_{n+1} = A_n, \quad \text{para } n \geq 0$$

2.3 Descripción del método de Chun

Chun (2005). El método de Chun, en realidad podría considerarse como una variante del método de Newton, el mismo está basado en el método de descomposición de

Adomian. Este método presenta una convergencia de orden cuatro.

El esquema iterativo del método está dado por

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - 2 \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} + \frac{f(y_n)f'(y_n)}{[f'(x_n)]^2}, n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

2.3.1 Construcción del método

El siguiente planteamiento esta tomado de Cisneros(2017). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^2 en I y $\alpha \in I$ una solución de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Aplicando el Teorema de Taylor a $f(x - h)$ alrededor de x , se tiene,

$$f(x - h) = f(x) + f'(x)(x - h - x) + O(h^2)$$

llamando $g(h) = O(h^2)$, tenemos

$$g(h) = hf'(x) - f(x) + f(x - h)$$

$$g'(h) = f'(x) - f(x) + f(x - h)$$

para un h tal que $f(x - h) \approx 0$, obtenemos

$$h = \frac{g(h)}{f'(x)} + \frac{f(x)}{f'(x)}$$

y tomando

$$c = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$N = \frac{g(h)}{f'(x)}$$

tenemos que

$$h = c + N(h)$$

Aplicando el método de descomposición de Adomian a h , para $n = 2$, se tiene que,

$$h \approx h_0 + h_1 + h_2$$

de aquí, se obtiene que, $h_0 = c$, $h_1 = A_1 y$, $h_2 = A_2$, donde

$$h_0 = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$h_1 N(h_0) = \frac{g(h_0)}{f'(x)} = \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} = \frac{f(y)}{f'(x)}$$

$$h_2 = h_1 N'(h_0) = h_1 \frac{g'(h_0)}{f'(x)} = \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} \left[\frac{f'(x) - f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} \right]$$

$$h_2 = \frac{f\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)}{f'(x)} \left[f'(x) - f'\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) \right]$$

$$h_2 = \frac{[f(y)]}{[f'(x)]^2} [f'(x) - f'(y)]$$

como $f(x - h) \approx 0$, se tiene

$$\alpha = x - h \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(y)}{f'(x)} + \frac{f(y)f'(y)}{[f'(x)]^2}$$

para x_0 suficientemente cerca de α , el método iterativo de Chun está dado por

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - 2 \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} + \frac{f'(y_n)}{[f'(x_n)]^2}, n \geq 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.3.2 Convergencia semilocal del método de Chun

El siguiente teorema se presenta a modo de ilustración en los reales, ya que el mismo fue escrito para convergencia semilocal en espacios de Banach. En los cuales el autor García(2017) utiliza condiciones de Kantorovich para emplearlas al método de Chun .

Teorema 2.2 *Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en el intervalo abierto I . Se asume sin perdida de generalidad que $f(x_0) \neq 0$, $f'(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{f'(x_0)} \in I$ y que $x_0 \in I$. Además*

$$a. \left| \frac{1}{f'(x_0)} \right| \leq \beta,$$

$$b. \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \eta$$

$$c. \left| \frac{f'(x) - f'(y)}{f'(x_0)} \right| \leq \lambda |x - y|, \quad \forall x, y \in I$$

$$d. a_0 = \lambda \beta \eta \text{ donde } 0 < a_0 < 0.3$$

$$e. t^* = \frac{1 + \frac{1}{2}h(a_0)}{1 - f(a_0)g(a_0)}$$

donde t^* es la raíz positiva más pequeña de la composición de funciones auxiliares

$$h(t) = t + t^2 \tag{2.16}$$

$$f(t) = \frac{1}{1 - t(1 + \frac{1}{2}h(t))} \tag{2.17}$$

$$g(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\eta} + 1 \right) h(t) + \frac{t}{8} (h(t))^2 \tag{2.18}$$

donde $t \in [x_0, t^* \eta]$, entonces el método de Chun (2.14) está bien definido y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $x^* \in I \left(x_0, \frac{2}{\eta \beta} t^* \eta \right)$ donde $f(x^*) = 0$

CAPÍTULO III DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

A continuación, se presenta la metodología utilizada durante el desarrollo de esta investigación, tomando en cuenta el diseño, tipo y método de investigación. De donde se ha tomado como referencia las definiciones de Sampieri (2003).

3.2 Marco metodológico

3.2.1 Diseño de la investigación

Esta investigación según la intervención es no experimental, ya que no hubo intervención ni manipulación en su desarrollo. Según la búsqueda de la causa es un diseño analítico, porque se debe analizar minuciosamente el todo descomponiéndolos en sus partes para así observar la naturaleza de éste. Con relación al tiempo de estudio, es de carácter transversal, ya que se va a desarrolla en período de tiempo definido.

3.2.2 Tipo de investigación

Respecto a las características de esta investigación, es del tipo exploratoria-explicativa, ya que se considera que es exploratoria porque aborda y se examina un tema que es poco estudiado anteriormente y a la vez es explicativa porque su objetivo principal está enfocado en explicar por qué ocurre un fenómeno, es decir, pretende mostrar la convergencia semilocal del método de Chun aplicado a la ecuación de Kepler.

3.2.3 Método de la investigación

El método utilizado para el desarrollo de esta investigación es el analítico-deductivo, pues éste pretende analizar de forma general los teoremas de convergencia semilocal para así ir a una forma más específica y deducir dicha convergencia a la ecuación de Kepler mediante un método iterativo como lo es el de Chun.

3.2.4 Enfoque de la investigación

El enfoque es de carácter cualitativo, porque esta se orienta en profundizar casos específicos de la convergencia semilocal y a no generalizar, a su vez, describe y cualifica fenómenos a partir de rasgos determinantes.

CAPÍTULO IV PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos de la convergencia semilocal bajo las condiciones de García (2017) aplicado a la ecuación de Kepler.

4.2 Resultados principales condiciones de García

Teorema 4.1 Si $e \leq 0.31123$ entonces la ecuación de Kepler tiene solución , esta localizada en el intervalo

$$[E - t^*, E + t^*]$$

y es única en

$$(E - t^{**}, E + t^{**})$$

, donde t^* y t^{**} son las condiciones impuesta por la composición de funciones (2.16),(2.17) y (2.18).

Además, el método de Chun definido en (2.15) iniciando en $E_0 = M$ converge a dicha solución.

Demostración

Al aplicar el teorema de convergencia semilocal del método de Chun, que se encuentra en el capítulo II, se pueden establecer las condiciones necesarias para determinar las raíces correspondientes que aseguran la existencia de soluciones para la ecuación de Kepler a partir de la excentricidad e .

Según lo establecido en el teorema de convergencia semilocal, se puede afirmar en la ecuación de Kepler bajo la condiciones de $E_0 = M$ sigue que:

$$f(E) = E - e \operatorname{sen} E - M \quad (4.1)$$

$$f(E_0) = -e \operatorname{sen} E_0 \quad (4.2)$$

$$f(E_0) \leq |-e \operatorname{sen} E_0| \leq e \quad (4.3)$$

$$f'(E_0) = 1 - e \cos E_0 \Rightarrow |f'(E_0)| \geq 1 - e \quad (4.4)$$

$$f(x) = x - e \operatorname{sen} x - M \quad (4.5)$$

$$f'(x) = 1 - e \cos x \quad (4.6)$$

$$f(y) = y - e \operatorname{sen} y - M \quad (4.7)$$

$$f'(y) = 1 - e \cos y \quad (4.8)$$

Al tomar en cuenta las condiciones del teorema 2.2 de García(2017) sigue que:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad & \left| \frac{1}{f'(E_0)} \right| \leq \beta \Rightarrow \left| \frac{1}{1-e} \right| \leq \beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{1-e} \\ \text{II)} \quad & \left| \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} \right| \leq \eta \Rightarrow \left| \frac{e}{1-e} \right| \leq \eta \Rightarrow \eta = \frac{e}{1-e} \\ \text{III)} \quad & \left| \frac{f'(x) - f'(y)}{f'(x_0)} \right| \leq \lambda |x - y| = \left| \frac{(1 - e \cos x) - (1 - e \cos y)}{1 - e} \right| \leq \lambda |x - y| \\ & \Rightarrow \lambda = \frac{e}{1-e} \end{aligned}$$

Para la condición d. del teorema de García (2017) el cual establece que:

$a_0 = \lambda\beta\eta$ donde $0 < a_0 \leq 0.3$

$$\begin{aligned}
 a_0 &\leq 0.3 \\
 &\rightarrow \left(\frac{e}{1-e}\right) \left(\frac{1}{1-e}\right) \left(\frac{e}{1-e}\right) \leq 0.3 \\
 \frac{e^2}{(1-e)^3} &\leq 0.3 \\
 e^2 &\leq 0.3(1-e)^2 \\
 e^2 - 0.3(1-e)^2 &\leq 0 \\
 0.3e^3 + 0.1e^2 + 0.9e - 0.3 &\leq 0 \\
 0.3(e - 0.312337) (e^2 + 0.645671e + 3.20167) &\leq 0 \\
 \therefore e &\leq 0.312337
 \end{aligned}$$

La condición $e \leq 0.312337$ nos garantiza que:

1. La ecuación de Kepler tiene solución E^* .
2. La composición de funciones definida por (2.16), (2.17) y (2.18) tienen soluciones reales t^* y t^{**}
3. E^* está localizada en el intervalo $[E_0 - t^*, E_0 + t^*]$ y es única en $(E - t^{**}, E + t^{**})$.
4. El método de Chun definido por (2.15), iniciando en $E_0 = M$ converge a E^* .

Teorema 4.2 Si $e \leq 0.142356$ entonces la ecuación de Kepler tiene solución, esta localizada en el intervalo

$$[E - t^*, E + t^*]$$

y es única en

$$(E - t^{**}, E + t^{**})$$

, donde t^* y t^{**} son las condiciones impuesta por la composición de funciones (2.16), (2.17) y (2.18).

Además, el método de Chun definido en (2.15) iniciando en $E_0 = \pi$ converge a dicha solución.

Demostración

Al cumplir con las condiciones del teorema de convergencia semilocal presentado por García y aplicándolo a la ecuación de Kepler bajo la condición de $E_0 = \pi$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f(E) &= E - e \operatorname{sen} E - M \\ f(E_0) &= E_0 - e \operatorname{sen} E_0 - M = \pi - M \leq \pi \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$f'(E_0) = 1 - e \cos E_0 = 1 + e \quad (4.10)$$

$$f'(y) = 1 - e \cos y \quad (4.11)$$

$$f'(x) = 1 - e \cos x \quad (4.12)$$

Tomando en cuenta la condiciones de García y la expresiones (4.9),(4.10),(4.11),(4.12)se calculan los parámetros correspondiente:

$$\text{I) } \left| \frac{1}{f'(E_0)} \right| \leq \beta \rightarrow \beta = \frac{1}{1+e}$$

$$\text{II) } \left| \frac{f(E_0)}{f'(E_0)} \right| \leq \eta \rightarrow \frac{\pi}{1+e} = \eta$$

$$\text{III) } \left| \frac{f'(x) - f'(y)}{f'(x_0)} \right| \leq \lambda |x - y| \rightarrow \frac{e}{1+e} |\cos x - \cos y| \leq \lambda |x - y| \therefore \lambda = \frac{e}{1+e}$$

Dada la condición d. del teorema de García(2017) el cual establece que:

$$a_0 = \lambda \beta \eta \text{ donde } 0 < a_0 \leq 0.3$$

$$\begin{aligned} a_0 &\leq 0.3 \\ &\rightarrow \left(\frac{e}{1+e} \right) \left(\frac{1}{1+e} \right) \left(\frac{\pi}{1+e} \right) \leq 0.3 \\ \frac{\pi e}{(1+e)^3} &\leq 0.3 \\ \pi e &\leq 0.3(1+e)^2 \\ \pi e - 0.3(1+e)^2 &\leq 0 \\ -0.3e^3 - 0.9e^2 + \pi e - 0.9e - 0.3 &\leq 0 \\ 0.3(e^3 + 3e^2 - 7.47198e + 1) &\leq 0 \\ \therefore e &\leq 0.142356 \end{aligned}$$

La condición $e \leq 0.142356$ nos garantiza que:

1. La ecuación de Kepler tiene solución E^* .
2. La composición de funciones definida por (2.16), (2.17) y (2.18) tienen soluciones reales t^* y t^{**} .
3. E^* está localizada en el intervalo $[E_0 - t^*, E_0 + t^*]$ y es única en $(E - t^{**}, E + t^{**})$.
4. El método de Chun definido por (2.15), iniciando en $E_0 = \pi$ converge a E^* .

4.3 Existencia de Solución Para la ecuación de Kepler

Cuadro 4.1: Valores que garantizan la existencia de solución para la ecuación de Kepler mediante la aplicación de la técnica de convergencia semilocal del método de Chun, según los puntos de inicio de $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$

Condiciones	e	t^*	Intervalos
^a $E_0 = M$	$e \leq 0.31123$	4.7321	$[M - 2.1383, M + 2.1383]$
$E_0 = \pi$	$e \leq 0.142356$	2.8442	$[\pi - 7.82183, \pi + 7.82183]$

^a Cálculo de la sustentante

4.4 Unicidad de soluciones para la ecuación de Kepler

Cuadro 4.2: Intervalo de unicidad de solución para la ecuación de Kepler mediante la aplicación de técnica de convergencia semilocal de García al método de Chun , según los puntos de inicio de $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$

Condiciones	e	Intervalos
^a $E_0 = M$	$e \leq 0.31123$	$(E_0 - 2.94552, E_0 + 2.94552)$
$E_0 = \pi$	$e \leq 0.142356$	$(E_0 - 143.405, E_0 + 143.405)$

^aCalculo de la sustentante

4.5 Existencia de Soluciones para la Ecuación de Kepler con Casos Reales

Cuadro 4.3: Radios de existencia para la composición de funciones aplicadas a casos reales con $E_0 = M$

Caso	t^*
^a Tritón ($e = 0.00002$)	1
Venus ($e = 0.0068$)	1.00007
Luna ($e = 0.0549$)	1.00551
Satélite Charon ($e = 0.0035$)	1.00002
Neptuno ($e = 0.0086$)	1.00011
Satélite Amaltea($e = 0.003$)	1.00001
Satélite Enseladus($e = 0.004$)	1.00002

^aCalculo de la sustentante

Cuadro 4.4: Radios de existencia para la composición de funciones aplicadas a casos reales con $E_0 = \pi$

Caso	t^*
^a Tritón ($e = 0.00002$)	1.00009
Venus ($e = 0.0068$)	1.03309
Luna ($e = 0.0549$)	1.34384
Neptuno ($e = 0.0086$)	1.04221
Satélite Charon ($e = 0.0035$)	1.01677
Satélite Amaltea($e = 0.003$)	1.01434
Satélite Enseladus($e = 0.004$)	1.01921

^aCalculo de la sustentante

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En este capítulo se exponen las técnicas investigada que se utiliza para abordar los objetivos planteados, haciendo hincapié en la aplicación de la convergencia semilocal a la ecuación de Kepler. Además, se menciona la dirección futura de investigación en este campo.

5.2 Conclusiones

A partir de los objetivos específicos establecidos en esta investigación se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- El teorema presentado por García aplicado al método de Chun tiene convergencia en los caso de $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$ en los cuales se determinan los valores de la excen- tricidad de $e \leq 0.31123$ y $e \leq 0.142356$ respectivamente. De tal forma que el de mayor rango de solución el caso de $E_0 = M$. Los cuales Garantizan la solución de la ecuación de Kepler.
- En los intervalos de existencias se determinaron los parámetro, que garantizan dicha soluciones para $E_0 = M$ y $E_0 = \pi$ Ver cuadro 4.1.

5.3 Líneas futuras de investigación

- La convergencia semilocal de otros teoremas para ser aplicado a la ecuación de Ke- pler.
- Aplicar diversas condiciones de convergencia semilocal a la ecuación de Kepler con valores iniciales: $E_0 = e$, $E_0 = M + e$, entre otros.

Referencias bibliográficas

- Almonte Jerez, Scarlen (2022), Convergencia Semilocal del Método de Steffensen aplicado a la ecuación de Kepler, UTECO, Cotuí.
- Argyros, I. C., & Hillout. (2011), On the semilocal convergence of the Halley. S. J. Appl. Math. Comput, 37, 221.
- Cascales, B. (2012), El teorema del Punto Fijo. Universidad de Murcia, La Manga.
- Chun, C. (2005), Iterative Methods Improving Newton's Method by the Decomposition Method, Computers and Mathematics with Applications 50 1559-1568
- Chun, C. (2006) , Construction of Newton-like iterative methods for solving nonlinear equations, Numerische Mathematik 104 297-315
- Chicharro López, F. I. (2017), Análisis dinámico y aplicaciones de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales. Valencia, España: Universidad Politécnica de Valencia.
- Cisneros Díaz, Iván A. (2017), Algoritmos basados en los Polinomios de Adomian e Iteración Variacional para la resolución de ecuaciones no lineales, Managua, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua.
- Colwell, P. (1993). Solving Kepler's equation over three centuries, Willmann-Bell. EEUU.
- Diloné Alvarado, M. A. (2013). Métodos iterativos aplicado a la ecuación de Kepler. Universidad de la Rioja.
- Diloné, M. A., Gutiérrez, J., & Veras, E. (2017). Semilocal Convergence Newton Method Applied to Kepler Equation: New Results. British Journal of Mathematics & Com-

puter Science 21(3), 1-13.

García Maimó, Javier (2017). Análisis Dinámico y Numérico de Familias de Métodos Iterativos para la Resolución de Ecuaciones No Lineales y su Extensión a Espacios de Banach, Universitat Politècnica de València

Gómez Guzmán, J.M (2019a). Convergencia Semilocal del Método de Halley aplicado a la ecuación de Kepler, UASD, Santo Domingo.

Gómez Guzmán, J.M (2019b). Convergencia Semilocal del Método de Whittaker aplicado a la ecuación de Kepler, UTECO, Cotuí.

[Prabook.com/web/changbum.chun/440087](https://prabook.com/web/changbum.chun/440087)

Rodríguez López, J. M. (2017). Métodos numéricos para la aproximación de raíces múltiples de ecuaciones no lineales. España: Universidad de Salamanca.

Roy, A. (2005). Movimiento orbital (4ta. ed.). Bristol, Reino Unido.

Sampieri, R. H. (2003). Metodología de la investigación.

Velasco del Olmo, A. I. (2013). Mejoras de los dominios de puntos de salida de métodos iterativos que no utilizan derivadas. Logroño, España: Universidad de la Rioja.

ANEXO

Calculo de los intervalo de existencia y unicidad

De acuerdo a las condiciones impuesta en el teorema 2.2 para determinar la raíz de la composición de funciones:

$$\begin{aligned}h(t) &= t + t^2 \\f(t) &= \frac{1}{1 - t(1 + \frac{1}{2}h(t))} \\g(t) &= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\eta} + 1 \right) h(t) + \frac{t}{8} (h(t))^2\end{aligned}$$

de donde se establece que

$$t^* = \frac{1 + \frac{1}{2}h(a_0)}{1 - f(a_0)g(a_0)}$$

y

$$a_0 = \lambda\beta\eta \quad \text{donde} \quad 0 < a_0 \leq 0.3$$

La existencia se de la forma $t \in [x_0, t^*\eta]$ y la unicidad por $x^* \in I\left(x_0, \frac{2}{\eta\beta}t^*\eta\right)$

Tomando los datos del teorema 4.1, sigue que :

$$(e = 0.312337)$$

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{1}{1 - e} \\ \eta &= \frac{e}{1 - e} \\ \lambda &= \frac{e}{1 - e} \\ a_0 &= \beta\eta\lambda = 0.3\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}t^* &= \frac{\frac{h(a_0)}{2} + 1}{1 - f(a_0)g(a_0)} = 4.73209 \\ t^*Eta &= 2.1383\end{aligned}$$

y

$$\frac{2}{\eta\beta}t^*\eta = 2.94552$$

Imágenes y gráficos

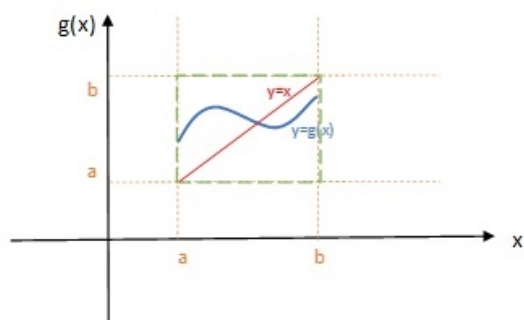


Figura Anexo B 1: Existencia del punto fijo

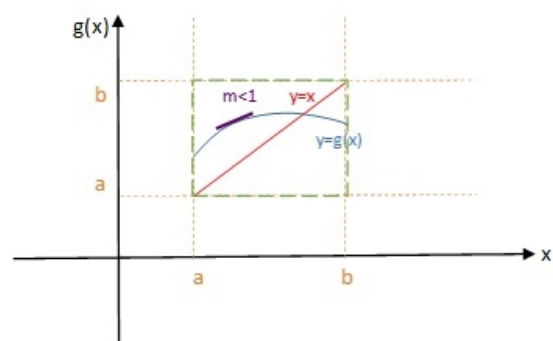


Figura Anexo B 2: Unicidad del punto fijo

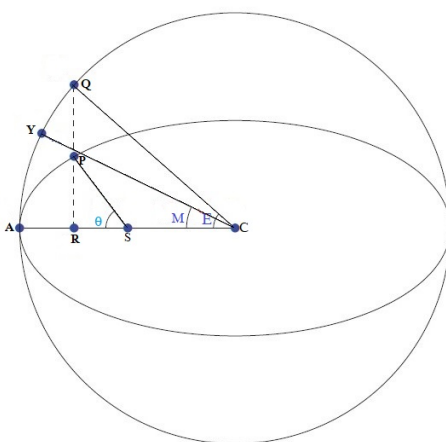


Figura Anexo B 3: Descripción Geométrica de la excentricidad E , media M y anomalía verdadera θ .