

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemáticas

Título

Comparación de los métodos iterativos de Newton y Halley para resolver ecuaciones
de orden superior.

Sustentante

Sorivel Veras Veras

Asesor

MA. Danny Daniel Manzueta Pérez

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico 2023.

Título

Comparación de los métodos iterativos de Newton y Halley para
resolver ecuaciones de orden superior.

Declaración de autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Comparación de los métodos iterativos de Newton y Halley para resolver ecuaciones de orden superior.

Proyecto de Postgrado presentado por **Sorivel Veras Veras** para optar por el título de Magister en Matemáticas

Composición del tribunal

MA. Wilson Heredia Amparo

Jurado de metodología

MA. José Manuel Vilorio

Jurado de Redacción

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos.	VIII
Dedicatoria.	IX
RESUMEN.	X
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Antecedentes	1
1.1.1 Antecedentes históricos	1
1.1.2 Antecedentes académicos	3
1.2 Planteamiento del problema.	5
1.3 Justificación.	7
1.4 Objetivos.	8
1.4.1 General.	8
1.4.2 Específicos.	8
1.5 Alcance y límites	8
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.	9
2.1 Introducción.	9
2.2 Ecuaciones de orden superior.	9
2.3 Método iterativo	10
2.3.1 Orden de convergencia	11
2.3.2 Errores	12
2.3.3 Índices de eficiencia	15
2.3.4 Orden de convergencia computacional	17
2.4 Método de Newton	17
2.4.1 Construcciones y variantes del método de Newton	19
2.5 Método de Halley	20
2.5.1 Obtención del método usando desarrollos de Taylor	21
2.5.2 Construcción geométrica del método de Halley	22
2.5.3 Orden de convergencia del método de Halley	25

CAPÍTULO III. DISEÑO METODOLÓGICO.	27
3.1 Introducción.	27
3.2 Marco metodológico.	27
3.2.1 Diseño.	27
3.2.2 Método.	27
3.2.3 Tipo.	27
3.2.4 Enfoque.	27
3.3 Procedimientos.	28
CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	29
4.1 Introducción	29
4.2 Aplicación de los métodos iterativos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden Superior	29
4.2.1 Método de Newton	29
4.2.2 Método de Halley	32
4.3 Análisis del comportamiento de los métodos de Newton y Halley . . .	35
4.3.1 Análisis del método de Newton	35
4.3.2 Análisis del método de Halley	42
4.4 Comparación de los métodos iterativos de Newton y Halley	44
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	49
5.1 Introducción	49
5.2 Análisis comparativo de los métodos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior	49
5.3 Conclusiones	50
5.4 Futuras líneas de investigación	51
Referencias	53
ANEXOS	56

Índice de figuras

4.1	Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$	30
4.2	Gráfica de la función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 1$	31
4.3	Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$	33
4.4	Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$	36
4.5	Gráfica de la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ en el intervalo [−2, 2]	43

Índice de cuadros

4.1	Iteraciones del método de Newton para $f_1(x) = x^2 - 2$	45
4.2	Iteraciones del método de Halley para $f_1(x) = x^2 - 2$	45
4.3	Comparación de iteraciones para los métodos de Newton y Halley con $f_2(x) = x^3 - 2$	46
4.4	Método de Newton para $f_3(x) = x^6 - x - 1$ con $x_0 = -1,5$	46
4.5	Método de Newton para $f_3(x) = x^6 - x - 1$ con $x_0 = 1,5$	47
4.6	Método de Halley para $f_3(x) = x^6 - x - 1$ con $x_0 = -1,5$	47
4.7	Método de Halley para $f_3(x) = x^6 - x - 1$ con $x_0 = 1,5$	48
4.8	Número de iteraciones y raíces aproximadas para los métodos de New- ton y Halley.	48

Agradecimientos.

A Dios: Por su inmenso amor y todas sus bendiciones, por nunca abandonarme y darme la fuerza y la valentía de no rendirme y llegar hasta aquí, porque sin él nada es posible.

A Honoria Veras y Wellington Veras (Padres): Porque han sido mi motor de arranque para llegar hasta donde he llegado, por su apoyo incondicional, por su inmenso amor y porque siempre han creído en mí y mi capacidad, por ser mi ejemplo a seguir.

A mis hermanos, Sorileidy y Elinson: Por estar siempre a mi lado dándome apoyo y confianza de éxito, por siempre contar con ellos en todo momento.

A mis hijas Sheila y Camila: Por ser un motivo más en este proceso, una de mis mejores bendiciones durante esta trayectoria.

A mi esposo Carlos Armando: Por siempre estar ahí para mí, por su comprensión y apoyo incondicional, siempre está conmigo.

A mis amigas y equipo de trabajo: las emprendedoras. Candy María Rosario, Lucia Bautista, Anyelina Suarez, Julissa Diaz, Marileida Bautista, Rosa María Adames. Por haber pasado este trayecto juntas y superando cada obstáculo siempre unidas, las quiero muchísimo, excelente equipo.

A mi amiga Rosa María Adames: por hacer de estos dos años, los más dinámicos, porque siempre está ahí para mí, un gran ser humano.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO): Por brindarme esta oportunidad de desarrollarme ante la sociedad, por darme la confianza para demostrar de que si se puede.

Dedicatorias.

A Dios: Por nunca desampararme durante el transcurso de esta maestría y de mi vida, porque sin él nada es posible, gracias porque en los momentos difíciles me dió la fortaleza y la voluntad para seguir adelante.

A mis familias: Por el apoyo incondicional que siempre me brindaron, por confiar en mis capacidades y siempre darme la fuerza para no rendirme y llegar hasta donde estoy.

A mis maestros: Por la trayectoria recorrida durante dos años, por todos los conocimientos transmitidos, por brindarme su confianza y apoyo como maestros dispuestos a enseñar.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO): Por acogerme como su estudiante durante estos dos años y brindarme la oportunidad de capacitarme más en mis estudios.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Sustentante
Sorivel Veras Veras

Asesor
MA. Danny Daniel Manzueta Pérez

RESUMEN

Este proyecto presenta un análisis comparativo de los métodos de Newton y Halley para resolver ecuaciones de orden superior. Para esto, los objetivos investigativos estuvieron basados en aplicar, analizar el comportamiento y comparar estos métodos iterativos en la solución de ecuaciones de orden superior.

Esta investigación se fundamentó en una metodología no experimental y transversal, basada en el método analítico-deductivo para comparar los métodos de Newton y Halley. Se caracterizó por ser de tipo explicativo-descriptiva, enfocándose en la descripción y comparación de estos métodos para resolver ecuaciones de grado superior.

Este estudio determinó que los métodos iterativos de Newton y Halley son eficaces al aplicarse a la solución de ecuaciones de orden superior. Sin embargo, su selección depende de las características específicas de la ecuación y las condiciones iniciales. Newton, aunque rápido en términos de convergencia local, puede verse afectado por puntos iniciales cercanos a singularidades o mínimos locales. Por otro lado, Halley, con información adicional en su cálculo, presenta una mayor tasa de convergencia y una mejor estabilidad en puntos críticos, aunque implica una mayor carga computacional por iteración.

Al comparar ambos, se concluye que Newton, por su sencillez de implementación y menor demanda computacional, es útil para ecuaciones menos complejas o cuando se busca una solución rápida y aproximada. Halley, a pesar de su mayor demanda computacional, ofrece convergencia más rápida y mayor estabilidad en puntos críticos, siendo más adecuado para ecuaciones que requieran alta precisión, aunque pueda ser más lento en términos de tiempo de ejecución. Por tanto, la elección del método más adecuado es una cuestión de precisión requerida y características de la ecuación.

Palabras claves: Convergencia, métodos iterativos, método de Newton, método de Halley, ecuaciones de orden superior.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Este capítulo presenta los aspectos introductorios de esta investigación. Aquí se muestran los antecedentes históricos y académicos de los métodos de Newton y Halley, así como el planteamiento, objetivos y la justificación que describen las grandes intenciones y metas de este proyecto, además de plantear los alcances y límites del mismo.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Antecedentes históricos

1.1.1.1. Método de Newton

El método de Newton es probablemente el proceso más antiguo y famoso de iteración, tiene sus primeras versiones en la antigua Babilonia, reino de Mesopotamia, hoy Irak (Bailey, 1989). Este método numérico fue descrito por Sir Isaac Newton en “Sobre el análisis mediante ecuaciones con un número infinito de términos”, escrito en 1669, y en “Método de las fluxiones”, escrito en 1671 pero traducido y publicado en 1736 por John Colson. Sin embargo, su descripción difiere en forma sustancial de la descripción moderna. Newton aplicaba el método solo a polinomios, y no consideraba las aproximaciones sucesivas X_n , sino que calculaba una secuencia de polinomios para llegar a la aproximación de la raíz x . Finalmente, Newton ve el método como puramente algebraico y falla al no ver la conexión con el cálculo (Silva y Martins, 2003).

En el escrito realizado por Isaac Newton en una carta a sus colegas Barrow y Collins en 1669, este mostraba un ejemplo para resolver numéricamente una ecuación. Newton ilustraba su técnica con el ejemplo $x^3 - 2x - 5 = 0$ y argumentaba de la siguiente manera: Por tanteo, se ve que la solución está cerca de 2 (Fernández y Jiménez, 2001).

Haciendo $x = 2 + \varepsilon$ y sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 10\varepsilon - 1 = 0 \quad (1.1)$$

Ignorando los términos $\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2$ con el pretexto de que ε es pequeño, se llega a que $10\varepsilon - 1 = 0$ ó $\varepsilon = 0.1$. Entonces $x = 2.1$ es una aproximación de la solución mejor que la inicial.

Haciendo ahora $\varepsilon = 0.1 + \nu$ y sustituyendo en (1.1) se sigue que

$$\nu^3 + 6.3\nu^2 + 11.23\nu + 0.061 = 0.$$

Ignorando de nuevo los términos en ν de grado mayor o igual que dos, se llega a que $\nu = -0.0054$ y, por tanto, $x = 2.0946$ es una aproximación que mejora las anteriores. Newton indicaba que el proceso se puede repetir las veces que sean necesarias.

La idea de Newton consiste en añadir un término corrector a una aproximación inicial dada. Para obtener esta aproximación, lo que hace es truncar el binomio de Newton en el segundo término en expresiones del tipo

$$(a + \varepsilon)^n \simeq a^n + na^{n-1}\varepsilon$$

De esta manera, para obtener el valor aproximado de ε simplemente hay que resolver una ecuación lineal.

Escribiendo el problema con la notación actual y llamando $p(x) = x^3 - 2x - 5$, la nueva aproximación es

$$2 - \frac{p(2)}{p'(2)} = 2 + \frac{1}{10} = 2.1$$

que se corresponde con la conocida formulación del método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}.$$

Ahora bien, no se tiene constancia de que Newton usara el cálculo diferencial ni de que expresara el proceso como un método iterativo en el sentido de que una aproximación pueda ser considerada como punto de partida de la siguiente.

1.1.1.2. Método de Halley

Edmond Halley, nacido el 8 de noviembre de 1656 en Haggerston, cerca de Londres, y fallecido el 14 de enero de 1742 en Greenwich, Inglaterra, fue un destacado científico con un profundo interés en la ciencia desde una edad temprana. Realizó estudios de Astronomía en la Universidad de Oxford, donde se distinguió por sus habilidades en Matemáticas y su dominio del latín y el griego (Fernández y Jiménez, 2001).

Durante su trayectoria, Halley se encontró con los trabajos del matemático francés Thomas Fautet de Lagny, quien en 1691 presentó fórmulas (tanto racionales como irracionales) para aproximar la raíz cúbica de un número. Impresionado por estas fórmulas, Halley escribió en 1708 en la revista londinense *Miscellanea* una nota donde mencionaba su intención de encontrar una demostración para las mismas. En este sentido, se dedicó a demostrar la fórmula racional, buscando aproximar la raíz cúbica de un número natural expresado en la forma $a^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

No obstante, Halley también intentó extender sus métodos para obtener aproximaciones incluso en el caso de ecuaciones definidas por funciones trascendentes. En un trabajo suyo de 1694, se pueden encontrar aproximaciones implícitas del tipo

$$L_f(x_n) = \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$$

También presentó aproximaciones basadas en fórmulas irracionales. Sin embargo, estas ideas de Halley pasaron desapercibidas durante casi un siglo y medio hasta que en 1870, en un trabajo de Schröder, se descubrió la iteración de Halley tal y como se conoce en la actualidad (Scavo y Thoo, 1995).

1.1.2. Antecedentes académicos

Ali, Haq, y Ahmad (2017) publicaron un artículo titulado “A comparison of numerical methods for solving ordinary differential equations”, que tuvo como objetivo general comparar distintos métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, y concluyeron que el método de Newton es una opción viable para resolver

estas ecuaciones, aunque puede ser más lento que otros métodos en ciertos casos.

Chen (2018) en su estudio titulado “On the Newton method for nonlinear complementarity problems”, cuyo objetivo general fue aplicar el método de Newton a problemas complementarios no lineales; llegó a la conclusión que el método de Newton es una buena opción para resolver estos tipos de problemas, aunque puede ser sensible a la elección de los puntos iniciales.

En la investigación realizada por Ramezani (2019), titulada “Comparación de métodos iterativos con orden de convergencia tres y cuatro”, cuyo objetivo fue realizar experimentos con cuatro métodos iterativos para encontrar la raíz real de una ecuación no lineal. En este estudio, tres de los métodos están en orden de convergencia 3 y uno de orden de convergencia 4. Dos de los métodos requieren el cálculo de una segunda derivada. Al comparar los dos métodos que no requieren el cálculo de una segunda derivada, los experimentos muestran que el método Homeier realiza menos iteraciones que el método Kou. Y al comparar los otros dos métodos, el método de Halley es más rápido que el método propuesto por Farooq.

Said y Hashim (2019), realizaron un estudio titulado “Eficacia de métodos óptimos para ecuaciones no lineales con aplicaciones de ingeniería química”, cuyo objetivo fue diseñar un método predictor-corrector modificado de Newton-Halley (MPCNH) para resolver ecuaciones no lineales. Se probaron diferentes problemas para demostrar la aplicabilidad del método propuesto. El método implementado exhibe una convergencia más rápida y precisa a la solución exacta que los otros métodos y la dinámica de los métodos propuestos mostró un área de convergencia más grande que algunos de los métodos óptimos utilizados en la comparación. Hay muchos factores que afectan la eficiencia y la dinámica de los métodos iterativos además del número de evaluaciones funcionales por iteración, como el número de operaciones algebraicas en cada iteración y el número de pasos necesarios para el método iterativo.

En su estudio “Nonlinear and stochastic optimization with applications to finance”, Naranjo (2019) utiliza el método de Newton para resolver problemas de optimización no lineales en finanzas. Concluye que el método de Newton es útil y efectivo para resolver este tipo de problemas, aunque puede ser sensible a la elección de los puntos iniciales y requiere ajustes cuidadosos para obtener resultados precisos.

Por otro lado, Aljoufie y Althobaiti (2019), en su artículo titulado “Newton’s method and its modifications for finding zeros of nonlinear equations” investigan varias variantes del método de Newton para resolver ecuaciones no lineales. Concluyen que las variantes mejoradas del método de Newton pueden ofrecer una convergencia más rápida y precisa que el método original.

La investigación realizada por C. Rodríguez (2020), titulada “Optimización de la selección de aproximaciones iniciales en el método de Newton y el método de Halley”, cuyo objetivo general fue optimizar la selección de las aproximaciones iniciales de los métodos de Newton y Halley, concluyó que se centró en mejorar la elección de las aproximaciones iniciales en los métodos de Newton y Halley, además de proponer un algoritmo de selección de aproximaciones iniciales basado en técnicas de optimización y evaluar su impacto en la convergencia y la eficiencia de ambos métodos.

1.2. Planteamiento del problema.

Las ecuaciones algebraicas de orden superior desempeñan un papel esencial en el amplio campo de las matemáticas, y su relevancia se extiende a diversas disciplinas científicas y de ingeniería. La resolución exacta de estas ecuaciones puede resultar compleja, y en muchos casos, se requiere recurrir a métodos numéricos iterativos para obtener soluciones aproximadas. Entre estas técnicas, destacan los métodos iterativos de Newton y Halley, que aunque parten de una base teórica similar, existen diferencias importantes en su implementación y en su desempeño en la solución de ecuaciones de orden superior.

Por un lado, el método iterativo de Newton se basa en la aproximación de la solución mediante una serie de iteraciones sucesivas. Este método es conocido por su convergencia rápida en muchas situaciones, especialmente cuando la estimación inicial se encuentra lo suficientemente cerca de la solución real. Sin embargo, en algunos casos, el método de Newton puede converger hacia soluciones erróneas o diverger si la estimación inicial está lejos de la solución (Smith, 2022). Por su parte, el método iterativo de Halley se basa en la utilización de información adicional de la función y sus derivadas de orden superior para mejorar la convergencia hacia la solución deseada. A diferencia del método de Newton, que se basa únicamente en la derivada de la función, el método de Halley utiliza tanto la primera como la segunda derivada (Ortega y Rheinboldt, 2000).

A pesar de su similitud en la estructura y enfoque, tanto el método de Halley como el método de Newton presentan diferencias significativas en términos de convergencia, precisión y eficiencia computacional. Adicionalmente, existe una falta de estudios comparativos detallados que evalúen de manera exhaustiva y sistemática estas dos técnicas iterativas cuando se aplican a ecuaciones de orden superior. En tal sentido, es por esto que determinar cuál de los dos métodos es más adecuado para resolver determinadas ecuaciones polinómicas, permitirá seleccionar la estrategia más eficiente y precisa para abordar problemas específicos en diferentes campos científicos y de ingeniería.

En correspondencia con esto, este estudio plantea la pregunta de investigación: ¿Cómo se compara el método de Newton y Halley en la resolución de ecuaciones de orden superior?

Para dar respuesta a esta interrogante es necesario responder las preguntas siguientes:

1. ¿Cuál de los métodos iterativos de Newton y Halley es más efectivo en la solución de ecuaciones de orden superior?

2. ¿Cómo se aplican los métodos iterativos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior?
3. ¿Cuál es el comportamiento de los métodos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior?

1.3. Justificación.

En el campo de la resolución numérica de ecuaciones, los métodos iterativos desempeñan un papel fundamental al proporcionar técnicas eficientes y precisas para encontrar soluciones aproximadas. Los métodos de Newton y Halley han sido ampliamente estudiados por separado, es un tema menos explorado en la literatura científica. Los resultados obtenidos permitirán determinar cuál de ellos es más eficiente y converge más rápidamente en diferentes situaciones. La velocidad de convergencia es un factor crítico en muchos problemas computacionales, ya que influye directamente en el tiempo necesario para obtener una solución precisa. Al determinar las ventajas y limitaciones de cada método, es posible seleccionar el más adecuado según las características del problema en cuestión.

Por otro lado, la relevancia de esta investigación está sustentada en que se evaluó la estabilidad de cada uno en diferentes escenarios y se determinó cuál proporciona resultados más estables y menos propensos a errores numéricos. Esta comparación ayuda a garantizar que las soluciones obtenidas sean confiables y precisas, evitando posibles divergencias o inestabilidades numéricas.

Los métodos iterativos de Halley y Newton son reconocidos por su rapidez y eficiencia en la aproximación de soluciones. Sin embargo, su rendimiento puede variar en ecuaciones de orden superior, donde la complejidad aumenta. Comparar estos métodos en este contexto permite determinar cuál de ellos logra una convergencia más rápida y precisa en términos de tiempo de cálculo y número de iteraciones requeridas.

1.4. Objetivos.

1.4.1. General.

Analizar comparativamente los métodos iterativos de Newton y Halley para resolver ecuaciones de orden superior.

1.4.2. Específicos.

1. Aplicar los métodos iterativos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden Superior.
2. Analizar el comportamiento de los métodos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior.
3. Comparar los métodos iterativos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior.

1.5. Alcance y límites

La presente investigación estuvo centrada en el estudio de las ecuaciones algebraicas de grado superior, lo que implica que los resultados y conclusiones obtenidos pueden no ser aplicables a otros tipos de ecuaciones, como las ecuaciones diferenciales o ecuaciones trascendentales. Por otro lado, solo considera la convergencia, estabilidad y precisión de los métodos iterativos de Newton y Halley, dejando fuera de la comparación otros métodos iterativos que también son utilizados en la resolución de estas ecuaciones.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.

2.1. Introducción.

En este capítulo se plantean los fundamentos conceptuales que sustentan las bases teóricas de los métodos de Newton y Halley en la resolución de ecuaciones de orden superior.

2.2. Ecuaciones de orden superior.

Definición 2.1 Una ecuación algebraica de grado n es una expresión matemática de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde x es la variable incógnita y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes reales o complejas. El grado de la ecuación es n , que es el mayor exponente de x en la ecuación.

El objetivo de la teoría de ecuaciones algebraicas de grado n es estudiar las propiedades de estas ecuaciones, incluyendo la existencia y unicidad de soluciones, y desarrollar métodos para encontrar soluciones exactas o aproximadas. Esta teoría ha sido estudiada desde hace siglos y ha sido una fuente de importantes avances en matemáticas, como la teoría de grupos y la teoría de Galois (Cox, Little, y O'Shea, 2007).

Teorema 2.1 Teorema fundamental del álgebra. Toda ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas, contando multiplicidades. En términos matemáticos, el teorema puede formularse de la siguiente manera:

Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ una ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos $a_0, a_1, \dots, a_n$. Entonces, existe al menos una raíz compleja z_1 de $P(z)$, es decir, $P(z_1) = 0$. Además, si se cuentan las raíces con multiplicidades, $P(z)$ tiene exactamente n raíces complejas distintas (Grinberg, 2020).

Teorema 2.2 Teorema de la existencia de raíces reales. Establece que toda función polinómica con coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una raíz real. En términos matemáticos, se puede enunciar como:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado impar con coeficientes reales $a_0, a_1, \dots, a_n$. Entonces, existe al menos un número real r tal que $P(r) = 0$ (Garrido, 2009).

2.3. Método iterativo

Un método iterativo es una técnica utilizada en matemáticas para encontrar una solución numérica aproximada de un problema. Se parte de un valor inicial y se utiliza una fórmula o algoritmo iterativo para producir una secuencia de valores cada vez más cercanos a la solución deseada (Kincaid y Cheney, 2012).

Matemáticamente hablando, si se quiere encontrar una solución x^* de una ecuación $f(x) = 0$, se comienza con una aproximación inicial x_0 y utilizar una fórmula iterativa de la forma:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

donde $g(x)$ es una función que produce una nueva aproximación x_{n+1} a partir de la aproximación anterior x_n . Se espera que la secuencia de valores x_n converja a la solución deseada x^* cuando n se hace lo suficientemente grande.

Existen diferentes tipos de métodos iterativos, algunos de los cuales se basan en la derivación analítica de la función $f(x)$, mientras que otros son métodos numéricos que solo utilizan los valores numéricos de $f(x)$.

La elección del método iterativo a utilizar depende de la naturaleza del problema, la disponibilidad de información analítica sobre la función $f(x)$, y la eficiencia computacional. En general, los métodos iterativos pueden ser una herramienta poderosa para resolver problemas numéricos en matemáticas, ingeniería, física, ciencias de la computación, y otras áreas afines (Burden y Faires, 2011).

Definición 2.2 Sea $f : X \rightarrow X$ una función definida en un conjunto X . Un punto $x^* \in X$ es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$. Un punto fijo es un valor en el dominio de una función en el cual la función mapea el valor en sí mismo. Es decir, un punto fijo de una función f es un valor x tal que $f(x) = x$ (Bartle y Sherbert, 2011).

Definición 2.3 La iteración de punto fijo es una técnica general de gran importancia en distintos ámbitos de las matemáticas (ecuaciones diferenciales, integrales, derivadas parciales, ...), que consiste en generar aproximaciones sucesivas x_n a la raíz buscada r con la esperanza de acercarse cada vez más a ella. Matemáticamente se desea que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

lo que garantiza que fijada una tolerancia, exista un valor finito n para el que los iterantes $x_n, x_{n+1}, \dots$ disten de r menos que la tolerancia.

Cada aproximación $x_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$ se obtiene de la aproximación precedente x_n a partir de una función F real llamada función de iteración,

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Si la función de iteración F es continua debe cumplir $F(r) = r$, es decir, la raíz r de f tiene que ser un punto fijo de F .

Definición 2.4 Sea x_n una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión converge a un número real L si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$, se tiene que $|x_n - L| < \epsilon$. Es decir, la sucesión x_n se aproxima arbitrariamente a L cuando n tiende a infinito (Rudin, 1976).

2.3.1. Orden de convergencia

En análisis numérico, el orden de convergencia es una medida de la velocidad con la cual una sucesión converge a su límite. Este concepto es muy importante desde el punto de vista práctico si se necesita trabajar con la sucesión de sucesivas aproximaciones de un método iterativo (Sánchez y Batlle, 2001).

Definición 2.5 Suponga que la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a α y sea $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ para cada $n \geq 0$, el error en cada iteración. Si existen dos constantes positivas $A > 0$ y $R > 0$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^R} = A, \text{ siendo } A \neq 0, \infty$$

entonces se dice que la sucesión converge a α con orden de convergencia R y el número A se llama constante asintótica del error.

Siendo $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ el error en la n -ésima iteración obtenida a partir de la sucesión $\{x_n\}$, se tiene que para un n suficientemente grande, poner

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^R} \simeq A \Leftrightarrow |\varepsilon_{n+1}| \simeq A |\varepsilon_n|^R$$

lo cual se puede escribir en la forma

$$\varepsilon_{n+1} = A\varepsilon_n^R + O(\varepsilon_n^{R+1}) = O(\varepsilon_n^R)$$

donde R es el orden de convergencia del método, que nos da una medida de la disminución del error entre una iteración y la iteración siguiente. Según sea el valor de R , se tienen distintos nombres para el tipo de convergencia:

- Si $R = 1$, se dice que la convergencia es lineal.
- Si $1 < R < 2$ se dice que la convergencia es superlineal.
- Si $R = 2$, se dice que la convergencia es cuadrática.
- Si $2 < R < 3$ se dice que la convergencia es supercuadrática.
- Si $R = 3$, se dice que la convergencia es cúbica.

y así sucesivamente.

Cuanto mayor sea el orden de convergencia, o para el mismo orden, cuanto menor sea la constante asintótica, mayor será la rapidez con que la sucesión de aproximaciones converge a la raíz buscada.

2.3.2. Errores

Uno de los objetivos principales de la computación científica es desarrollar métodos precisos y eficientes para calcular aproximaciones de modelos que son imposibles

o muy costosos de resolver por métodos analíticos. Sin embargo, es necesario poder controlar las diferentes fuentes de error a fin de no modificar los resultados calculados. Los errores se propagan desde el inicio del cómputo hasta el resultado final, a veces con una considerable amplificación, otras veces observándose oscilaciones. Es importante poder distinguir entre el nuevo error producido durante cada cálculo en particular (error de procesamiento) y el error heredado (propagado) desde los datos durante todos los cálculos (Hernández, 2018). Los siguientes son los errores más comunes:

1. Error en los datos iniciales. Los datos iniciales ó de entrada pueden ser el resultado de mediciones influenciadas por errores sistemáticos ó por perturbaciones temporales. Un error de redondeo ocurre, por ejemplo, cada vez que un número irracional es recortado para utilizar una cantidad fija de decimales. También puede ocurrir cuando una fracción es convertida al tipo de números usados por la PC.
2. Error de redondeo. La limitación de los números de punto flotante en una PC lleva asociada una pérdida frecuente de información que, de acuerdo al contexto, puede ó no ser importante. Dos casos típicos son: si el procesador utilizado no tiene la capacidad de operar con números de más de s dígitos, entonces el producto exacto de dos números de s dígitos de longitud (que tiene $2s$ ó $2s - 1$ dígitos) no puede ser utilizado en cálculos siguientes porque el resultado debe ser recortado. Si, en un procesador que opera con punto flotante, un número relativamente pequeño b es sumado a otro número a , entonces algunos dígitos de b se pierden y no tendrán efecto en futuros cálculos que dependan del valor de $a + b$. El efecto de redondeos por la capacidad del procesador puede ser notorio durante un cálculo de muchos pasos, ó en un algoritmo numéricamente inestable.
3. Error de truncamiento. Este tipo de error ocurre cuando un proceso límite es truncado antes de llegar al valor límite. Por ejemplo, cuando una serie infinita es truncada después de un número finito de términos, ó cuando una derivada es

aproximada a través de un cociente en diferencias. Otro ejemplo es cuando una función no lineal es aproximada con una función lineal en un intervalo definido.

4. Simplificaciones en el modelo matemático. En la mayoría de las aplicaciones de la matemática se hacen idealizaciones. En un problema de mecánica, por ejemplo, es habitual asumir que la cuerda que sostiene un péndulo carece de masa. En otros tipos de problemas, puede ser una complicación considerar un cuerpo como un objeto homogéneo y lleno completamente de materia, en vez de estar compuesto por átomos. Este tipo de error es más complicado de estimar que los descritos anteriormente.
5. Error humano. En cualquier trabajo que se necesite operar con números, son comunes los errores de administración de información, errores en cálculos manuales y discrepancias en los datos procesados. A veces las rutinas computacionales también contienen errores, asociados al programador ó a la falta de consideración del procesador a utilizar.

2.3.2.1. Error relativo y absoluto

El concepto de aproximación es central en la mayoría de las aplicaciones matemáticas. Lo ideal es trabajar con valores aproximados que satisfagan los requerimientos establecidos. Con el fin de poder analizar las aproximaciones, se introduce la siguiente definición tomada de (Hernández, 2018):

Definición 2.6 Sea $\tilde{x}$ una aproximación del valor correcto x . Entonces se define como error absoluto a:

$$\epsilon_A = |\tilde{x} - x|$$

y, si $x \neq 0$ el error relativo se define como:

$$\epsilon_R = \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

2.3.2.2. Redondeo y truncamiento

Cuando se cuenta el número de dígitos en un valor numérico, no deben incluirse los ceros al comienzo del número, ya que estos ceros sólo marcan la posición del punto

decimal. Sin embargo, al contar el número de decimales, sí deben incluirse los ceros ubicados a la derecha del punto decimal. Por ejemplo, el número 0.00147 está expresado con tres dígitos pero tiene cinco decimales. El número 12.34 está expresado con cuatro dígitos y con sólo dos decimales (Hernández, 2018).

Si la magnitud del error en $\tilde{a}$ no excede $\frac{1}{2}10^{-t}$, entonces $\tilde{a}$ tiene t decimales correctos. Los dígitos de $\tilde{a}$ que ocupan posiciones donde la unidad es mayor ó igual a 10^{-t} son llamados dígitos significativos (los ceros iniciales no se cuentan). Siguiendo esto, el número 0.001234 ± 0.000004 tiene cinco decimales correctos y tres dígitos significativos, mientras que 0.001234 ± 0.000006 tiene cuatro decimales correctos y sólo dos dígitos significativos. El número de decimales correctos da una idea de la magnitud del error absoluto, mientras que el número de cifras significativas da una idea aproximada de la magnitud del error relativo. Ibídem.

Existen dos formas de redondear un número x a t decimales. En el proceso denominado truncamiento (o redondeo hacia el cero) simplemente se eliminan todos los números ubicados a la derecha del t -ésimo decimal. La magnitud del error de este proceso puede ser tan grande como 10^{-t} . El redondeo al más cercano (también llamado redondeo óptimo), debe elegirse el número con s decimales que sea más cercano a x . Aquí, si p es la parte del número ubicada a la derecha del s -ésimo decimal el decimal t ésimo permanece sin cambios si y sólo si $|p| < \frac{1}{2}10^{-s}$. En el otro caso, debe aumentarse el s -ésimo decimal en 1. Ibídem.

2.3.3. Índices de eficiencia

La eficiencia de un método iterativo está relacionada con el tiempo que se requiere para obtener la solución del problema en cuestión. Este tiempo depende de la cantidad de operaciones aritméticas que se tengan que realizar, es decir, un algoritmo será más eficiente cuantas menos operaciones se tengan que realizar para obtener la solución (Sánchez y Batlle, 2001).

Definición 2.7 De acuerdo con Moreno y Trujillo (1999), para un método de orden $p > 1$, en el que cada iteración necesita r unidades de trabajo (en nuestro caso

r evaluaciones de la función o sus derivadas), se define el índice de eficiencia del método por:

$$\varepsilon(p, r) = p^{1/r}$$

Suponga que se tiene un método A de orden $p > 1$ que utiliza r unidades de trabajo en cada iteración (el tiempo de calculo es proporcional a r) y otro método B de orden p^2 que necesita $2r$ unidades de trabajo por iteración.

Cuando se realizan r unidades de trabajo con el primer método, es decir, una iteración, el número de cifras exactas se multiplica por p . Entonces si se realiza otra iteración, se tendría un total de $2r$ unidades de trabajo y el número de cifras exactas se multiplicaría de nuevo por p . En total, el número de cifras exactas queda multiplicado por p^2 . Por tanto, los dos métodos son equivalentes en cuanto a eficiencia computacional.

Teniendo en cuenta la definición de Índice de eficiencia, se tiene que en general es:

$$\varepsilon(p^n, nr) = \varepsilon(p, r) = p^{1/r}$$

Cuanto mayor sea el índice de eficiencia de un método, mejor es el método. Es importante resaltar que para obtener unos buenos índices de eficiencia se deben comenzar las iteraciones en puntos iniciales x_0 cercanos a la raíz buscada, para que el procedimiento sea convergente. Por tanto la convergencia y la eficiencia están relacionadas entre sí. Mayor será la eficiencia del método cuanto más cerca esté el punto inicial de la raíz.

Por otra parte, Kung y Traub (1974) conjeturaron que un método multipaso iterativo que necesita n evaluaciones en cada paso puede alcanzar como mucho un máximo orden de convergencia igual a 2^{n-1} . A los métodos que alcanzan dicho orden se les llama métodos óptimos, éstos son los más interesantes desde el punto de vista

de la eficiencia computacional y, por ello, se han ido desarrollando una gran multitud en los últimos años.

El índice de eficiencia de un método óptimo es

$$\varepsilon(2^{n-1}, n) = (2^{n-1})^{1/n} = 2^{\frac{n-1}{n}},$$

cuyo límite cuando $n \rightarrow \infty$ es 2, así que asumiendo la conjetura de Kung y Traub, el índice de eficiencia de cualquier método será menor que 2.

2.3.4. Orden de convergencia computacional

Cuando no sea posible hallar el orden de convergencia de un método, para conocer el comportamiento real del mismo en cuanto a la rapidez de convergencia, se puede utilizar el llamado orden de convergencia computacional. Es una aproximación al orden de convergencia teórico del método.

Definición 2.8 Sea α la raíz de una ecuación $f(x) = 0$ y suponga que x_{k+1}, x_k y x_{k-1} son tres iteraciones consecutivas que aproximan el valor de α . Se define el orden de convergencia computacional de la siguiente forma (Petkovic y Neta, 2012):

$$\rho = \frac{\ln |(x_{k+1} - \alpha) / (x_k - \alpha)|}{\ln |(x_k - \alpha) / (x_{k-1} - \alpha)|}$$

Pero, como la mayoría de la ocasiones se desconoce el valor exacto de α , que es la raíz que se quiere calcular, en la práctica se suele utilizar la aproximación introducida por Cordero y Torregrosa (2007):

$$\rho \approx ACOC = \frac{\ln |(x_{k+1} - x_k) / (x_k - x_{k-1})|}{\ln |(x_k - x_{k-1}) / (x_{k-1} - x_{k-2})|} \quad (2.1)$$

2.4. Método de Newton

El método de Newton implica elegir una aproximación inicial x_0 , y luego, a través de un proceso iterativo, encontrar una serie de números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, que converjan a una solución $x = \alpha$. El objetivo es aproximar la raíz $x = \alpha$ de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, una vez que se elige el punto x_0 , se espera encontrar un punto x_1 (relacionado con x_0) que sea una mejor aproximación para la raíz $x = \alpha$ de

la función. La relativa cercanía necesaria del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor cercano a la raíz (Hernández-Sánchez, 2020).

Ahora, suponiendo que $f(x)$ es una función diferenciable en un intervalo $[a, b]$ para el que se desea aproximar la raíz. A partir de x_0 se determina x_1 como el punto del eje de abscisas donde la recta tangente a f en $(x_0, f(x_0))$ corta al eje X . Usando la posición inicial x_0 , el valor de la función $f(x_0)$ y la pendiente de la recta tangente que es $f'(x_0)$, permite encontrar la ecuación de la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ utilizando la fórmula de punto-pendiente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.2)$$

Para hallar x_1 se sustituye $y = 0$ en la ecuación de la recta y se obtiene

$$\begin{aligned} 0 - f(x_0) &= f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ x_1 - x_0 &= \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

siempre que $f'(x_0) \neq 0$, y finalmente

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.4)$$

Aplicando el mismo proceso iterativo a cada valor obtenido, se obtiene una sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ en la que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.5)$$

siempre que $f'(x_n) \neq 0$, para cada $n \geq 1$

Definición 2.9 Se define la expresión iterativa como la función de iteración de Newton $N(x)$. dada una función diferenciable f , la función de Newton para f es

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.6)$$

de donde

$$\begin{aligned} x_1 &= N(x_0) \\ x_2 &= N(x_1) = N(N(x_0)) = N^2(x_0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

por lo que se concluye, en general, que para cada $n \geq 1$:

$$x_n = N(x_{n-1}) = N^n(x_0) \quad (2.8)$$

donde la notación N^n significa la aplicación iterada n veces de la función N .

Definición 2.10 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable definida en el intervalo real $[a, b]$, y $x_0 \in [a, b]$. Aplicar el método de Newton a f en x_0 que consiste en obtener la sucesión $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ mediante el proceso iterativo:

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ para } n \geq 1 \quad (2.9)$$

y estudiar la convergencia de dicha sucesión (Hernández-Sánchez, 2020).

2.4.1. Construcciones y variantes del método de Newton

2.4.1.1. Construcción geométrica

El método de Newton tiene una clara interpretación geométrica basada en la aproximación de la función $f(x)$ por una recta tangente. Por este motivo, dicho método suele denominarse también método de la tangente. Partiendo de una aproximación inicial x_0 de la solución α , la siguiente aproximación x_1 , se obtiene como la intersección de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0 con el eje de abscisas. Así, x_1 es la intersección de las rectas $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ e $y = 0$, es decir, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$. Reiterando este procedimiento se obtiene una sucesión de aproximaciones que converge a la solución (Plaza y Gutiérrez, 2013).

2.4.1.2. Construcción a partir del desarrollo de Taylor

A partir de x_0 se busca una aproximación mejor de α que sea de la forma $x_0 + \varepsilon$. Lo ideal sería que $f(x_0 + \varepsilon) = 0$, en cuyo caso se obtendría la solución exacta. Usando el desarrollo de Taylor, se llega a

$$0 = f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\varepsilon^3 + \dots \quad (2.10)$$

Linealizando la ecuación 2.10 en el segundo sumando, se obtiene:

$$0 \simeq f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \simeq -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.11)$$

De aquí se deduce la siguiente aproximación de $\alpha : x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$. Ibídem.

2.4.1.3. Construcción a partir de la interpolación racional inversa.

El problema de aproximar una solución, se puede transformar en el de aproximar $\phi(0)$, donde $x = \phi(y)$ denota la función inversa de $y = f(x)$. Suponga que x_0 es una aproximación inicial de la solución α y sea $y_0 = f(x_0)$. Considerando el desarrollo de Taylor de orden uno de la función $\phi(y)$ en torno al punto y_0 ,

$$\phi(0) \simeq \phi(y_0) - \phi'(y_0)y_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

se obtiene una nueva aproximación para $\alpha = \phi(0)$ que coincide, una vez más, con la expresión del método de Newton. Ibídem.

2.5. Método de Halley

La función de iteración de Halley para aproximar las raíces de una función de una sola variable tiene una larga historia que se remonta a 1694. Este método se conoce con frecuencia como el método de las hipérbolas tangentes, y puede ser descrito de manera sencilla de la siguiente manera: Dada una función $f(x)$ y un valor inicial x_0 lo suficientemente próximo a la raíz de la función, consiste en la construcción de una hipérbola que es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto x_0 hasta el segundo orden. El punto en que la hipérbola tangente corta al eje de las abscisas, será la primera estimación x_1 . Una vez obtenida esta, se vuelve a hacer otra vez el mismo proceso,

pero en lugar de partir del valor x_0 , ahora se parte del último valor estimado x_1 , y así se procede sucesivamente. Evidentemente, cuanto mayor número de estimaciones, mayor precisión se obtendrá en el resultado, es decir, se tendrá un menor error en relación al valor real α , el cuál debe estar dentro de los límites establecidos por el método (A. Rodríguez, 2017).

La proximidad a la raíz de $f(x)$ del valor inicial x_0 dependerá de la naturaleza intrínseca de la función, ya que esta puede presentar distintos puntos de inflexión o pendientes muy pequeñas, lo que hace que aumenten las probabilidades de que el algoritmo diverja. *Ibidem*.

La función de iteración que utiliza el método de Halley es:

$$H(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} \quad (2.12)$$

2.5.1. Obtención del método usando desarrollos de Taylor

La idea de obtener el método de Halley a partir del polinomio de Taylor es, probablemente, la manera más habitual de “redescubrirlo”. No obstante, se debe prestar atención a que Taylor enunció el teorema en 1712, es decir, el teorema de Taylor es posterior al método de Halley (Frey, 2022).

Dada una aproximación inicial x_0 a la raíz buscada r , se puede considerar el polinomio de Taylor de f de grado menor o igual que N para aproximar la función f en un entorno de x_0 , y aproximar la raíz buscada de f por una raíz del polinomio de Taylor, resolviendo

$$f(x_0) + \sum_{k=1}^N f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!}. \quad (2.13)$$

Truncando la serie en $N = 1$ se obtiene el método de Newton. Pero si esta se trunca en $N = 2$ se obtiene la ecuación que hay que resolver para hallar las raíces del polinomio interpolador de Taylor de grado 2

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Hallando las raíces de este polinomio se obtiene el conocido como método de Halley irracional o método de Euler. Sin embargo, el método de Halley tiene la característica de evitar el uso de raíces cuadradas. Para ello, usa la corrección del método de Newton para aproximar el polinomio de Taylor de grado dos por una función lineal en x y hallar así la nueva aproximación x_1 sin tener que calcular raíces cuadradas. Más precisamente, si en

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x_1 - x_0)(x_1 - x_0)$$

el último factor $(x_1 - x_0)$ se aproxima, es decir,

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

entonces queda la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \left(\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \right) (x_1 - x_0) \\ &= f(x_0) + \left(f'(x_0) - \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2f'(x_0)} \right) (x_1 - x_0) \end{aligned}$$

Con esta técnica llamada remplazamiento se obtiene un polinomio de grado uno, cuya raíz se usará como nueva aproximación

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\left(1 - \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2f'(x_0)^2} \right) f'(x_0)}$$

obteniendo así la fórmula del método de Halley

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{(1 - L_f(x_0))} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

2.5.2. Construcción geométrica del método de Halley

La construcción geométrica del método de Halley o también llamado el método de las hipérbolas tangentes consiste en usar una función oscultriz de la forma

$$g(x) = \frac{x + c}{ax + b} \quad (2.14)$$

Definición 2.11 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en un entorno de un punto x_n . Se dice que otra función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dos veces derivable en un entorno de x_n es una curva oscultriz de grado dos a f en x_n si para $k = 0, 1, 2$, se tiene

$$g^{(k)}(x_n) = f^{(k)}(x_n)$$

Por conveniencia, en vez de 2.14 se usa una forma equivalente

$$g(x) = \frac{(x - x_n) + c}{a(x - x_n) + b}, \quad (2.15)$$

$$g'(x) = \frac{b - ac}{(a(x - x_n) + b)^2}, \quad (2.16)$$

$$g''(x) = \frac{2a(ac - b)}{(a(x - x_n) + b)^3}, \quad (2.17)$$

que permite evaluar la función g y sus derivadas en x_n de manera más directa.

Como se busca que g sea una función oscultriz a f en x_n hay que elegir los coeficientes a, b y c para que se cumplan las tres condiciones fijadas en 2.11.

$$g(x_n) = f(x_n), \quad g'(x_n) = f'(x_n), \quad g''(x_n) = f''(x_n). \quad (2.18)$$

Evaluando 2.15 - 2.17 en x_n , las condiciones 2.18 llevan al siguiente sistema de

$$f(x_n) = \frac{c}{b}, \quad (2.19)$$

$$f'(x_n) = \frac{b - ac}{b^2}, \quad (2.20)$$

$$f''(x_n) = \frac{2a(ac - b)}{b^3}. \quad (2.21)$$

Por 2.19 se tiene que

$$c = bf(x_n).$$

Sustituyendo c por su valor en 2.20 se llega a

$$f'(x_n) = \frac{b - abf(x_n)}{b^2} = \frac{1 - af(x_n)}{b},$$

que permite despejar

$$a = \frac{1 - bf'(x_n)}{f(x_n)}$$

Se sustituye en 2.21 a y c para obtener

$$f''(x_n) = \frac{2 \left(\frac{1 - bf'(x_n)}{f(x_n)} \right) \left(\frac{1 - bf'(x_n)}{f(x_n)} \right) f(x_n) - 1}{b^2} = \frac{2 [1 - bf'(x_n)]^2 - 2 (1 - bf'(x_n))}{b^2 f(x_n)}.$$

Desarrollando $[1 - bf'(x_n)]^2$ y simplificando se obtiene

$$f(x_n) f''(x_n) b = 2b (f'(x_n))^2 - 2f'(x_n),$$

que implica

$$b = \frac{2f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}$$

Por tanto se puede obtener fácilmente

$$a = \frac{-f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}, \quad c = \frac{2f(x_n) f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}.$$

Ahora que se ha obtenido la hipérbola oscultriz $g(x)$, se busca su raíz para obtener el siguiente iterante, es decir, se busca x_{n+1} tal que

$$g(x_{n+1}) = \frac{(x_{n+1} - x_n) + c}{a(x_{n+1} - x_n) + b} = 0$$

De aquí se obtiene que $(x_{n+1} - x_n) = -c$, es decir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n) f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}.$$

Dividiendo el numerador y el denominador por $2(f'(x_n))^2$ se llega de nuevo a la expresión del método de Halley

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{(1 - L_f(x_n))} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2.5.3. Orden de convergencia del método de Halley

De acuerdo a Pérez (2012), suponga que α es una raíz de f pero no de su derivada. Suponga también que existe la derivada tercera de f y que esta es continua en un entorno de α y que x_n se encuentra en este entorno. Entonces el teorema de Taylor implica que:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(\alpha - x_n)^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}(\alpha - x_n)^3$$

Y también:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\eta)}{2}(\alpha - x_n)^2$$

siendo ξ, η números situados entre α y x_n . Multiplicando la primera ecuación por $2f'(x_n)$ y restándole la segunda multiplicada por $f''(x_n)(\alpha - x_n)$ resultará:

$$\begin{aligned} 0 = & 2f(x_n)f'(x_n) + 2[f'(x_n)]^2(\alpha - x_n) + f'(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n)^2 \\ & + \frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3}(\alpha - x_n)^3 - f(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n) \\ & - f'(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n)^2 - \frac{f''(x_n)f''(\eta)}{2}(\alpha - x_n)^3 \end{aligned}$$

donde el término $f'(x_n)f''(x_n)(\alpha - x_n)^2$ se anula, y reorganizando el resto de los términos queda

$$\begin{aligned} 0 = & 2f(x_n)f'(x_n) + \left(2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)\right)(\alpha - x_n) \\ & + \left(\frac{f'(x_n)f'''(\xi)}{3} - \frac{f''(x_n)f''(\eta)}{2}\right)(\alpha - x_n)^3. \end{aligned}$$

Poniendo el segundo término en la parte izquierda de la igualdad y dividiendo por $2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)$ en ambos lados, queda

$$\begin{aligned} \alpha - x_n = & \frac{-2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \\ & - \frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{6(2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n))}(\alpha - x_n)^3 \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la ecuación del método de Halley, se puede poner

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{2f'(x_n)f'''(\xi) - 3f''(x_n)f''(\eta)}{12[f'(x_n)]^2 - 6f(x_n)f''(x_n)}(\alpha - x_n)^3$$

Siendo $\{x_n\}$ una sucesión que se aproxima a la raíz α el límite cuando $n \rightarrow \infty$ del coeficiente del lado derecho que multiplica a $(\alpha - x_n)^3$ es

$$-\frac{2f'(\alpha)f'''(\alpha) - 3f''(\alpha)f''(\alpha)}{12[f'(\alpha)]^2}$$

Si se toma un valor K que sea un poco mayor que el valor absoluto de éste valor, se pueden tomar valores absolutos a ambos lados de la fórmula y reemplazar el valor absoluto del coeficiente por el de su límite superior cerca de (K) para obtener la acotación

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq K |\alpha - x_n|^3$$

lo que demuestra que el método de Halley tiene convergencia cúbica.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO.

3.1. Introducción.

En el presente capítulo se ilustran una serie de elementos que enmarcan los componentes metodológicos de esta investigación; los cuales hacen referencia al método, diseño, tipo, enfoque y procedimientos requeridos para el desarrollo de la misma.

3.2. Marco metodológico.

3.2.1. Diseño.

El diseño que contempla esta investigación es el no experimental, ya que tal como lo plantea (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010), las variables no se manipulan de forma intencionada. Según el tiempo de estudio, el diseño es el transversal, el cual es definido por el mismo autor como aquel en el que se recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único.

3.2.2. Método.

En esta investigación, se utilizó el método analítico-deductivo, ya que se compararon los métodos de Newton y Halley. De acuerdo con (Espinoza, 2020), el método analítico es aquel método de investigación que consiste en la desmembración de un todo, descomponiéndolo en sus partes o elementos para observar las causas, la naturaleza y los efectos. Además, es deductiva debido a que se extrayeron conclusiones sobre resultados importantes para la verificación de los objetivos del trabajo (Rodríguez et al., 2017).

3.2.3. Tipo.

De acuerdo a las características, esta investigación es de tipo explicativa-descriptiva, ya que se pretendió describir, mostrar y comparar los métodos iterativos de Newton y Halley en la resolución de ecuaciones de grado superior. (Ramos-Galarza, 2020).

3.2.4. Enfoque.

Conforme a lo planteado por Ortega (2018), debido a que en esta investigación no se buscó medir las variables, el enfoque utilizado es el cualitativo, ya que su desarrollo estuvo basado en un análisis comparativo de los métodos de Newton y Halley.

3.3. Procedimientos.

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso a realizar en este trabajo de investigación:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, sobre los aspectos básicos y fundamentaciones de los métodos de Newton y Halley en la resolución de las ecuaciones de orden superior.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos constitutivos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada del borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

Este capítulo se dedica a la presentación de resultados derivados de la aplicación de los métodos de Newton y Halley, a los fines de dar respuesta al objetivo general de “Analizar comparativamente estos métodos iterativos en la resolución de ecuaciones de orden superior”.

4.2. Aplicación de los métodos iterativos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden Superior

4.2.1. Método de Newton

El método de Newton se fundamenta en la idea de aproximar las soluciones de $f(x) = 0$, utilizando rectas tangentes al gráfico de la función para iterativamente acercarse a la raíz real. El proceso comienza con una estimación inicial de la raíz, denotada como x_0 . A partir de esta estimación, se traza la recta tangente a la función en el punto $(x_0, f(x_0))$. La intersección de esta recta con el eje x proporciona una nueva aproximación de la raíz, denotada como x_1 . La ecuación de esta recta tangente está dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Por lo tanto, x_1 debe cumplir con

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación para x_1 , se tiene que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

En general, para $n > 0$, x_n satisface

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (4.1)$$

Inicialmente, se establecen algunos resultados numéricos de la aplicación del método de Newton para solucionar ecuaciones de orden superior, y así, posteriormente generalizar el comportamiento, la convergencia y el margen de error de dicho método.

Ejemplo 4.1 Aproximar una raíz de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[1, 2]$.

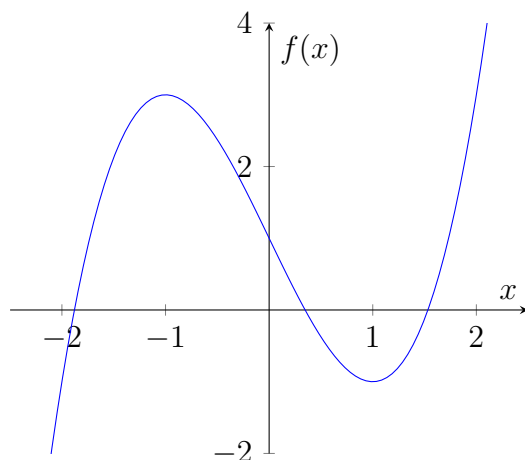


Figura 4.1: Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Tal como se muestra en la figura 4.1, f tiene una raíz en el intervalo $[1, 2]$. Por lo tanto, $x_0 = 2$ parece ser una primera aproximación razonable. Dado que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$. Para encontrar la siguiente aproximación, se utiliza la ecuación (4.1) con $n = 1$, de la que se obtiene

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{3}{9} \approx 1.666666667.$$

Para encontrar la siguiente aproximación, x_2 , se utiliza nuevamente la ecuación (4.1) con $n = 2$ y el valor de x_1 . Se obtiene que,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1.548611111.$$

Continuando de esta manera, se obtienen los siguientes resultados:

a) $x_1 \approx 1.666666667$

b) $x_2 \approx 1.548611111$

c) $x_3 \approx 1.532390162$

d) $x_4 \approx 1.532088989$

e) $x_5 \approx 1.532088886$

f) $x_6 \approx 1.532088886$.

Se observa que se obtuvo el mismo valor para x_5 y x_6 . Por lo tanto, cualquier aplicación posterior del método de Newton probablemente dará el mismo valor para x_n .

Ejemplo 4.2 Suponga la función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 1$, la cual tiene raíces reales, tal como se muestra en la gráfica de la figura 4.2.

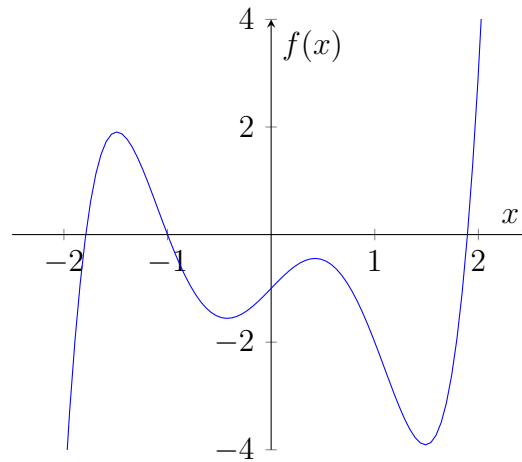


Figura 4.2: Gráfica de la función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 1$

Dado que la función es de grado 5, será difícil visualizar todas las raíces en un gráfico, ya que algunas de las cuales, pueden ser complejas y conjugadas. Para determinar un rango inicial donde se encuentre una raíz real, se tomará el intervalo $[-2, -1]$. Primero, se necesita calcular la derivada de la función:

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2.$$

Ahora se tomará $x_0 = -2$ (el extremo inferior del intervalo) como la aproximación inicial. Entonces, x_1 estará dado por:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -2 - \frac{f(-2)}{f'(-2)} \approx -1.5.$$

De la misma forma se obtiene x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx -1.53.$$

continuando este proceso iterativo para obtener las siguientes aproximaciones:

- $x_1 \approx -1.5$
- $x_2 \approx -1.53$
- $x_3 \approx -1.529$
- $x_4 \approx -1.529$
- $x_5 \approx -1.529$
- $x_6 \approx -1.529$.

de forma que las estimaciones convergen a $x \approx -1.529$ después de un número de iteraciones. Esto significa que una de las raíces reales de la función $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 1$ es $x \approx -1.529$. La elección del punto inicial x_0 puede llevar a diferentes raíces de la función, y solo puede ser usado para encontrar raíces reales.

4.2.2. Método de Halley

Al igual que el método de Newton, el método de Halley es un proceso iterativo que permite obtener una solución aproximada de una ecuación en la forma $f(x) = 0$. Para ello, se comienza con una aproximación inicial de la solución x_0 y se construye una secuencia de aproximaciones utilizando la fórmula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (4.2)$$

En esta sección se presentan algunos ejemplos para ilustrar y comprender los pasos necesarios para resolver una ecuación no lineal utilizando este método, y así establecer posteriormente caracterizaciones mas generales.

Ejemplo 4.3 Determinar las raíces de la ecuación $x^2 = 3x - 1$ en el intervalo $[-2, 2]$, utilizando el método de Halley.

Para aplicar el método de Halley, se siguen los siguientes pasos:

1. En primer lugar, se debe expresar la función en la forma $f(x) = 0$. En este caso, la función es $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

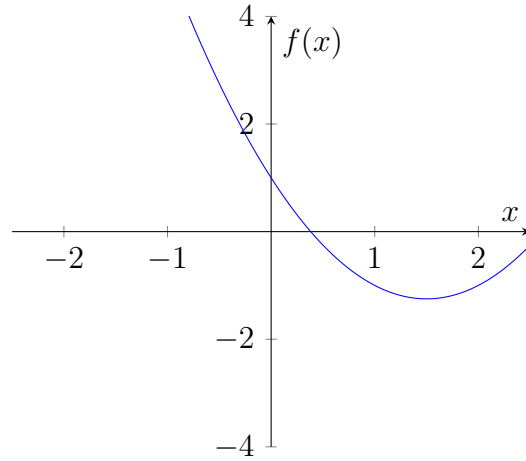


Figura 4.3: Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 3x + 1$

2. A continuación, se calcula la derivada primera de la función, que resulta ser $f'(x) = 2x - 3$.
3. Luego, se calcula la derivada segunda de la función, que es $f''(x) = 2$.
4. Con estos datos, se obtiene la ecuación de recurrencia del método:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} = x_n - \frac{2(x_n^2 - 3x_n + 1)(2x_n - 3)}{2(2x_n - 3)^2 - (x_n^2 - 3x_n + 1)(2)}$$

5. Para poder aplicar el método, se necesita una aproximación inicial de la solución de la ecuación. En este caso, se tomará el valor $x_0 = -20$. A partir de esta aproximación inicial, se obtienen las diferentes aproximaciones de la solución hasta que la diferencia entre dos aproximaciones consecutivas sea menor que 10^{-10} . Para este caso en particular, se tienen las siguientes aproximaciones:

$$x_0 = -20$$

$$x_1 = -5.71829971181556296$$

$$x_2 = -1.05880847214655293$$

$$x_3 = 0.238813963592403778$$

$$x_4 = 0.381478854771233262$$

$$x_5 = 0.381966011226997723$$

$$x_6 = 0.381966011250105152$$

La diferencia entre la última aproximación obtenida (x_6) y la anterior (x_5) es 2.3×10^{-11} , lo cual es menor que 10^{-10} .

6. Finalmente, se toma como solución de la ecuación $x_6 = 0.381966011250105152$.

Es preciso notar en la gráfica 4.3, que aunque el punto inicial $x_0 = -20$ era relativamente lejano de la raíz encontrada, el método converge a la solución.

Ejemplo 4.4 Considerar la función polinómica de tercer grado $f(x) = P_3(x) = (x-1)(x+1)(x+1) = x^3 + x^2 - x - 1$, calcular la raíz doble $x = -1$.

Se procede inmediatamente a calcular las derivadas primera y segunda de la función

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1, \quad f''(x) = 6x + 2$$

Tomando como valor inicial $x_0 = -2$, se obtiene

$$f(x_0) = -3, \quad f'(x_0) = 7, \quad f''(x_0) = -10.$$

Sustituyendo en (4.2), se tiene que

$$x_1 = (-2) - \frac{2(-3)(7)}{2(7)^2 - (-3)(-10)} = -47/34 \simeq -1,38235$$

Se procede de igual manera hasta alcanzar un error $|x_{n+1} - x_n| \leq 1 \cdot 10^{-10}$, requisito que en este caso se cumple en la iteración número 20, tal como se muestra en la tabla (4.2.2).

n	x_n	$ x_{n+1} - x_n $
1	-1.3823529411764705621	0.3823529411764705621
2	-1.1355247718907218496	0.1355247718907218496
3	-1.0462068054530732461	0.0462068054530732461
...	...	...
19	-1.0000000010859420344	$1.0859420344 \times 10^{-9}$
20	-1.0000000003619806782	$3.619806782 \times 10^{-10}$

Cuadro 4.1: Aproximaciones de Halley para $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

4.3. Análisis del comportamiento de los métodos de Newton y Halley

4.3.1. Análisis del método de Newton

Normalmente, el método de Newton se utiliza para encontrar raíces de forma bastante rápida. Sin embargo, pueden ocurrir situaciones en las que el método de Newton falle. Algunas razones por las que el método de Newton podría fallar incluyen las siguientes:

1. Si en una de las aproximaciones x_n , la derivada f' es cero en x_n , pero $f(x_n) \neq 0$. Como resultado, la recta tangente de f en x_n no intersecta el eje x . Por lo tanto, no se puede continuar con el proceso iterativo.
2. Las aproximaciones $x_0, x_1, x_2, \dots$ pueden acercarse a una raíz diferente. Si la función f tiene más de una raíz, es posible que las aproximaciones no se acerquen a la raíz que se está buscando, sino a una raíz diferente. Esto ocurre con mayor frecuencia cuando no se elige la aproximación x_0 lo suficientemente cerca de la raíz deseada.
3. Las aproximaciones pueden no acercarse en absoluto a una raíz. Se presenta un ejemplo en el que las aproximaciones sucesivas nunca se acercan a una raíz porque las aproximaciones sucesivas continúan alternándose entre dos valores.

Ejemplo 4.5 Considere la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Sea $x_0 = 0$. Se demostrará que la sucesión $x_1, x_2, \dots$ no se acerca a una raíz de f .

Para $f(x) = x^3 - 2x + 2$, la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 2$. Por lo tanto,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

En el siguiente paso,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Consecuentemente, los números $x_0, x_1, x_2, \dots$ continúan alternando entre 0 y 1 y nunca se acercan a la raíz de f que se encuentra en el intervalo $[-2, -1]$ como se

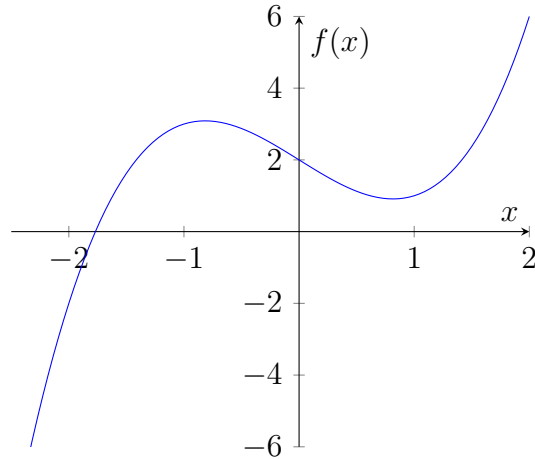


Figura 4.4: Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$

muestra en la gráfica (4.4). Afortunadamente, si se elige una aproximación inicial x_0 más cercana a la raíz real, se puede evitar esta situación.

Supóngase que la función f es continuamente diferenciable dos veces en el intervalo $[a, b]$; o sea, $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Sea $\bar{x} \in [a, b]$ una aproximación a la raíz x tal que $f'(\bar{x}) \neq 0$ y $|\bar{x} - x|$ es pequeño. Considerese, por ejemplo, $x_0 = b$ para el cual $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. La ecuación de la tangente en el punto de coordenadas $(x_n, f(x_n))$ ($n = 0, 1, \dots$), es

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

Haciendo $y = 0$ y $x = x_{n+1}$, tendremos la fórmula $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, $n \geq 1$. Nótese que si se hace $x_0 = a$, y por tanto $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$, y si se traza la tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto $A(a, f(a))$, se tendrá que el punto x'_1 cae fuera del intervalo $[a, b]$; en otras palabras, el procedimiento de Newton no es práctico para este valor inicial. Por tanto, en el caso dado, una buena aproximación inicial x_0 es aquella para la cual resulta válida la desigualdad

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

Se demostrará que esta regla es general.

Teorema 4.1 Sea $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, y $f'(x)$ y $f''(x)$ son no nulas y conservan el signo para $a \leq x \leq b$, entonces, a partir de la aproximación inicial $x_0 \in [a, b]$ que satisface

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$$

es posible, utilizando el método de Newton, calcular la raíz única x de la ecuación $f(x) = 0$ con cualquier grado de exactitud.

Demostración. Supongase que $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$. Por la desigualdad $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ se tiene que $f(x_0) > 0$. Por inducción matemática, se demostrará que todas las aproximaciones $x_n > x$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) y, por consiguiente, $f(x_n) > 0$. En efecto, ante todo, $x_0 > x$. Estableciendo ahora $x_n > x$. Colocando

$$x = x_n + (x - x_n)$$

Utilizando la fórmula de Taylor, se tendrá

$$0 = f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(c_n)(x - x_n)^2,$$

donde $x < c_n < x_n$. Como $f''(x) > 0$, se tiene

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) < 0$$

y, de aquí que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > x$$

que es lo que se quería demostrar.

Tomando en consideración los signos de $f(x_n)$ y $f'(x_n)$ se tiene que de la fórmula $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, $n \geq 1$, $x_{n+1} < x_n$ ($n = 0, 1, \dots$), es decir, las aproximaciones sucesivas $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ forman una secuencia acotada monótona decreciente. Por consiguiente, existe el límite $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Pasando al límite, se tiene que

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

ó $f(\bar{x}) = 0$, de donde $\bar{x} = x$.

Por esta razón, al aplicar el método de Newton, para el punto inicial x_0 , elíjase el final del intervalo (a, b) asociado con una ordenada del mismo signo que el de $f''(x)$.

Teorema 4.2 Sea $f \in \mathcal{C}(-\infty, +\infty)$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x) \neq 0$ para $a \leq x \leq b$ y si $f''(x)$ existe en cualquier punto y conserva el signo, entonces puede tomarse cualquier valor $c \in [a, b]$ como aproximación inicial x_0 al utilizarse el método de Newton para hallar una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ que esté en el intervalo (a, b) . Se puede, por ejemplo, tomar $x_0 = a$ ó $x_0 = b$.

Demostración. En efecto, sea por ejemplo, $f'(x) > 0$ para $a \leq x \leq b$, $f''(x) > 0$ y $x_0 = c$, donde $a \leq c \leq b$. Si $f(c) = 0$, la raíz $x = c$ y el problema queda resuelto. Si $f(c) > 0$, el razonamiento anterior se cumple y el proceso de Newton con valor inicial c convergerá hacia la raíz $x \in (a, b)$. Finalmente, si $f(c) < 0$, se tendrá que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)} > c$$

Utilizando la fórmula de Taylor,

$$f(x_1) = f(c) - \frac{f(c)}{f'(c)} f'(c) + \frac{1}{2} \left[\frac{f(c)}{f'(c)} \right]^2 f''(\bar{c}) = \frac{1}{2} \left[\frac{f(c)}{f'(c)} \right]^2 f''(\bar{c}) > 0$$

donde $\bar{c}$ es un cierto valor intermedio entre c y x_1 . De este modo

$$f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$$

Además, de la condición $f''(x) > 0$ se deduce que $f'(x)$ es una función creciente y, en consecuencia, $f'(x) > f'(a) > 0$ para $x > a$. Es posible por tanto tomar x_1 como valor inicial del proceso de Newton convergente hacia una cierta raíz $\bar{x}$ de la función $f(x)$ tal que $\bar{x} > c \geq a$. Como la derivada $f'(x)$ es positiva cuando $x > a$, la función $f(x)$ tiene raíz única en el intervalo $(a, +\infty)$, de donde se deduce que

$$\bar{x} = x \in (a, b).$$

Puede establecerse un argumento similar para otras combinaciones de signos de las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$. Nótese que cuanto mayor sea el valor numérico de la derivada $f'(x)$ en la vecindad de la raíz, tanto menor será la corrección que ha de añadirse a la

aproximación n -ésima para obtener la aproximación $(n + 1)$. El método de Newton es por consiguiente muy conveniente cuando la gráfica de la función tiene una gran pendiente en la vecindad de la raíz dada, pero si el valor numérico de la derivada $f'(x)$ es pequeño cerca de ella, las correcciones serán entonces mayores, y calcular la raíz mediante este procedimiento puede ser un proceso largo o a veces incluso imposible. De forma que no se recomienda el método de Newton para resolver una ecuación $f(x) = 0$ si la curva $y = f(x)$ es casi horizontal cerca del punto de intersección con el eje x .

El método de Newton es una técnica de iteración funcional $x_n = g(x_{n-1})$, $n \geq 1$ para la cual

$$x_n = g(x_{n-1}) = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

Se nota en esta ecuación que el método de Newton no puede continuarse si $f'(x_{n-1}) = 0$ para algún n . El siguiente resultado muestra que el método es más eficaz cuando f' está acotada fuera de cero cerca del punto fijo x .

Teorema 4.3 Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $x \in [a, b]$ es tal que $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [x - \delta, x + \delta]$.

Demostración. La demostración está basada en un análisis del método de Newton como un esquema de iteración funcional $x_n = g(x_{n-1})$, para $n \geq 1$, con

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

El objetivo es encontrar, para cualquier valor k en $(0, 1)$, un intervalo $[x - \delta, x + \delta]$ tal que g mande al intervalo $[x - \delta, x + \delta]$ a sí mismo y que $|g'(x)| \leq k < 1$ para $x \in [x - \delta, x + \delta]$, donde k es una constante fija en $(0, 1)$.

Ya que $f'(x) \neq 0$ y f' es continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in [x - \delta_1, x + \delta_1] \subset [a, b]$. Entonces, g está definida y es continua en $[x - \delta_1, x + \delta_1]$. También,

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

para $x \in [x - \delta_1, x + \delta_1]$; y como $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$, $g \in \mathcal{C}[x - \delta_1, x + \delta_1]$. De la suposición $f(x) = 0$, se tiene

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = 0$$

Y como g' es continua, esa ecuación implica que existe un δ con $0 < \delta < \delta_1$, y

$$|g'(x)| \leq k < 1 \quad \text{para } x \in [x - \delta, x + \delta]$$

Falta todavía demostrar que $g : [x - \delta, x + \delta] \rightarrow [x - \delta, x + \delta]$. Si $x \in [x - \delta, x + \delta]$, el teorema del valor medio implica que, para algún número ξ entre x y x , $|g(x) - g(x)| = |g'(\xi)| |x - x|$. Así que,

$$|g(x) - x| = |g(x) - g(x)| = |g'(\xi)| |x - x| \leq k |x - x| < |x - x|$$

Como $x \in [x - \delta, x + \delta]$, se sigue que $|x - x| < \delta$ y que $|g(x) - x| < \delta$. Esto implica que $g : [x - \delta, x + \delta] \rightarrow [x - \delta, x + \delta]$

Dado que todas las hipótesis se satisfacen para $g(x) = x - f(x)/f'(x)$, así que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_n = g(x_{n-1}) \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

converge a x para cualquier $x_0 \in [x - \delta, x + \delta]$.

Para estimar el error de la aproximación x_n de orden n , se puede utilizar la fórmula $|x - x_n| \leq |f(x_n)|/m_1$, donde m_1 es el valor más pequeño de $|f'(x)|$ en el intervalo $[a, b]$.

Se obtendrá ahora otra fórmula para estimar la exactitud de la aproximación x_n . Aplicando la fórmula de Taylor, se tiene

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f[x_{n-1} + (x_n - x_{n-1})] = \\ &= f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1})^2 \end{aligned}$$

donde $\xi_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$. Ya que, en virtud de la definición de la aproximación x_n , se tiene

$$f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = 0$$

se deduce que

$$|f(x_n)| \leq \frac{1}{2} M_2 (x_n - x_{n-1})^2$$

donde M_2 es el valor más elevado de $|f''(x)|$ en el intervalo $[a, b]$. En consecuencia, se tiene

$$|x - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2$$

Si el proceso de Newton converge, entonces $|x_n - x_{n-1}| \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Y por tanto para $n \geq N$ se tiene

$$|x - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

es decir, los decimales iniciales de las aproximaciones x_{n-1} y x_n son exactos comenzando con una cierta aproximación.

Téngase en cuenta que en el caso general, una coincidencia hasta de ε , de dos aproximaciones sucesivas x_{n-1} y x_n no garantiza que los valores de x_n y la raíz exacta x coincidan con el mismo grado de exactitud.

Se obtendrá ahora una fórmula que ligue los errores absolutos de dos aproximaciones sucesivas x_n y x_{n+1} . Utilizando la fórmula de Taylor, se tendrá

$$0 = f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2} f''(c_n)(x - x_n)^2$$

donde $x < c_n < x_n$, y entonces

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} (x - x_n)^2$$

y, teniendo en cuenta que $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, se tiene

$$x - x_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c_n)}{f'(x_n)} (x - x_n)^2,$$

y consecuentemente,

$$|x - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x - x_n)^2 \quad (4.3)$$

La fórmula (4.3) asegura una rápida convergencia del proceso de Newton si la aproximación inicial x_0 es tal que

$$\frac{M_2}{2m_1} |x - x_0| \leq k < 1$$

En particular, si

$$\mu = \frac{M_2}{2m_1} \leq 1 \quad \text{y} \quad |x - x_n| < 10^{-m}$$

entonces de (4.3), se tendrá

$$|x - x_{n+1}| < 10^{-2m}$$

4.3.2. Análisis del método de Halley

En esta tesis se ha establecido que el método de Halley es una técnica eficiente para encontrar raíces de funciones, pero al igual que otros métodos numéricos, puede presentar situaciones en las que falle o tenga dificultades para encontrar la raíz de una función. A continuación, se presentan algunos casos en los que el método de Halley podría fallar o enfrentar problemas:

- a) Raíces múltiples con puntos de inflexión: Si la función tiene una raíz múltiple y un punto de inflexión cercano a la raíz, el método de Halley puede converger lentamente o incluso diverger. Esto ocurre porque el cálculo de la segunda derivada puede ser cero en un punto de inflexión, lo que afecta la fórmula de iteración y la estabilidad del método.

Ejemplo 4.6 Considerar la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$. Tiene una raíz cuádruple en $x = 1$ y un punto de inflexión cercano a esa raíz. Se comenzará con una aproximación $x_0 = 1.5$. Calculando $f(x_0)$, $f'(x_0)$ y $f''(x_0)$ se tiene que $f(1.5) = 0.375$, $f'(1.5) = -1.5$, $f''(1.5) = -6$, por lo que usando la fórmula del método de Halley para encontrar x_1 , se tiene que

$$x_1 = 1.5 - \frac{2(0.375)(-1.5)}{2((-1.5)^2) - (0.375)(-6)} = 1.5 - \frac{1.125}{-6} = 1.66667$$

Calculando $f(x_1)$, $f'(x_1)$ y $f''(x_1)$ se tiene que $f(1.66667) \approx -0.04938$, $f'(1.66667) \approx -10.2222$ y $f''(1.66667) \approx -14$ por lo que:

$$x_2 \approx 1.66667 - \frac{2(-0.04938)(-10.2222)}{2((-10.2222)^2) - (-0.04938)(-14)} \approx 1.57518$$

Asimismo,

$$x_3 \approx 1.57518 - \frac{2(-0.00041)(-21.9933)}{2((-21.9933)^2) - (-0.00041)(-29.4096)} \approx 1.57079$$

Si se continua el proceso iterativo hasta obtener una aproximación suficientemente cercana a la raíz real, es de notar que el método de Halley converge lentamente hacia la raíz $x \approx 1$ debido a la presencia del punto de inflexión cercano. En este caso, se tendría que requerir a realizar más iteraciones para alcanzar una precisión deseada.

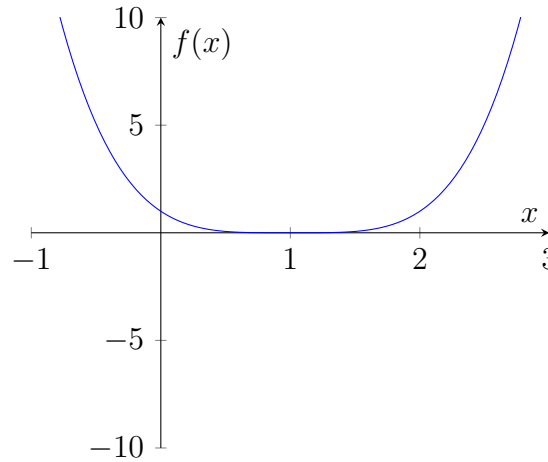


Figura 4.5: Gráfica de la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$

- b) Funciones con singularidades: Si la función tiene singularidades (puntos donde no está definida o donde la función se vuelve infinita), el método de Halley puede ser incapaz de converger hacia una raíz.

Ejemplo 4.7 Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Esta función tiene una singularidad en $x = 0$, es decir, no está definida en ese punto. Si el método de Halley intenta encontrar una raíz en torno a $x = 0$, podría fallar en converger debido a la singularidad.

Ejemplo 4.8 Funciones dentro raíces pares. A modo particular, la función $f(x) = \sqrt{x-5}$ presenta una singularidad para $x < 5$, ya que no está definida para estos valores. Si el método de Halley se inicializa con un valor de x menor a 5, podría no ser capaz de encontrar la raíz.

- c) Cuando las raíces de la función están muy cercanas o muy alejadas entre sí, el método puede converger hacia una raíz incorrecta o simplemente no converger.

Ejemplo 4.9 Sea la función polinómica $f(x) = x(x - 2)(x - 2.00001)$. Esta función tiene dos raíces muy cercanas, 2 y 2.00001. Dependiendo del valor inicial elegido para el método de Halley, puede converger a una raíz incorrecta. Por ejemplo, si se elige $x = 1.99999$ como valor inicial, el método podría converger a 2.00001 en lugar de 2 a pesar de que 1.99999 está más cerca de 2.

De manera similar, si se considera la función $f(x) = x(x - 1000000)(x^2 + 5)$, las raíces reales de la función son 0 y 1000000, que están muy alejadas. Si se inicia el método de Halley en un punto cercano a 0, puede que no sea capaz de encontrar la raíz en 1000000, especialmente si la función tiene un comportamiento complejo en ese intervalo.

4.4. Comparación de los métodos iterativos de Newton y Halley

En esta sección, se establecen distintas ecuaciones del tipo $f(x) = 0$, a los fines de establecer una comparativa en terminos de iteraciones, orden de convergencia y eficiencia de los métodos iterativos: Newton y Halley.

Esta comparación se inicia con la familia de funciones de la forma $f(x) = x^\lambda - a$ con $a > 0$ y $\lambda \in \mathbb{N}$, es decir, se aproxima la raíz λ -ésima de un número real positivo a , $r = \sqrt[\lambda]{a}$. Para esto, tomando $\lambda = 2$ y $a = 2$, para aproximar $\sqrt{2} = 1.4142135623730904880\dots$, en las tablas (4.1) y (4.2), se muestran los resultados obtenidos con el método de Newton y Halley, respectivamente, partiendo de $x_0 = 2$.

En la tabla (4.1), se han incluido los iterantes calculados x_n , los errores correspondientes $e_n = x_n - \sqrt{2}$, y los cocientes e_n/e_{n-1}^2 . Estos cocientes tienden a estabilizarse al aumentar n , como corresponde a la convergencia cuadrática.

Por su parte, en la tabla (4.2) se incluyen los resultados obtenidos con el método de Halley partiendo del mismo iterante inicial. En este caso, en la última columna se han incluido los cocientes e_n/e_{n-1}^3 , puesto que el método de Halley tiene convergencia cúbica, como se probó en el marco teórico de esta tesis, lo cual también asegura que

dichos cocientes tiendan a estabilizarse al aumentar n . Es de notar que el método de Halley con sólo 3 iteraciones produce una aproximación a $\sqrt{2}$ con un error inferior a 10^{-20} , mientras que el método de Newton requiere 5 iteraciones para obtener una precisión análoga.

$f_1(x) = x^2 - 2$	Newton		
	x_n	$e_n = x_n - r$	e_n/e_{n-1}^2
$n = 0$	2	5.8579×10^{-1}	.
$n = 1$	1.5	8.5786×10^{-2}	2.5×10^{-1}
$n = 2$	1.416666666666667	2.4531×10^{-3}	3.3333×10^{-1}
$n = 3$	1.414215686274510	2.1239×10^{-6}	3.5294×10^{-1}
$n = 4$	1.414213562374690	1.5947×10^{-12}	3.5352×10^{-1}
$n = 5$	1.414213562373095	8.9929×10^{-25}	3.5355×10^{-1}

Cuadro 4.1: Iteraciones del método de Newton para $f_1(x) = x^2 - 2$

$f_1(x) = x^2 - 2$	Halley		
	x_n	$e_n = x_n - r$	e_n/e_{n-1}^3
$n = 0$	2	5.8579×10^{-1}	.
$n = 1$	1.428571428571429	1.4358×10^{-2}	7.1429×10^{-2}
$n = 2$	1.414213926776741	3.6440×10^{-7}	1.2312×10^{-1}
$n = 3$	1.414213562373095	6.0486×10^{-21}	1.2500×10^{-1}

Cuadro 4.2: Iteraciones del método de Halley para $f_1(x) = x^2 - 2$

Ahora se elegirá los valores $\lambda = 3$ y $a = 2$, es decir, $f_2(x) = x^3 - 2$. En la tabla (4.3) se muestra el número de iteraciones N necesarias para que los métodos de Newton y Halley proporcionen una aproximación, con tolerancia de 10^{-14} , a $r = \sqrt[3]{2} = 1.2599210498948731906665443602833 \dots$, y colocando que $|x_N - x_{N-1}| \leq 10^{-14}$ ó $|f(x_N)| \leq 10^{-14}$.

$f_2(x) = x^3 - 2$	Newton	Halley
$x_0 = 1$	5	3
$x_0 = 2$	6	4
$x_0 = 10$	10	6
$x_0 = 100$	16	9

Cuadro 4.3: Comparación de iteraciones para los métodos de Newton y Halley con $f_2(x) = x^3 - 2$

Ahora se pretenden aproximar las raíces de algunas ecuaciones de orden superior, prestando especial atención no solo al número de iterantes que necesita cada método sino también a la raíz a la que convergen, si es que convergen a alguna de las distintas raíces.

En primer lugar, sea la función $f_3(x) = x^6 - x - 1$, que tiene únicamente dos raíces reales $r_1 = 1.134724138401518755969732$ y $r_2 = -0.77808959867860072456835496$. Se utilizarán dos iterantes iniciales distintos para aproximar ambas raíces, ilustrando así el carácter local de la convergencia del método de Newton y de Halley.

$f_3(x) = x^6 - x - 1$	Newton		
	x_n	$e_n = x_n - r$	e_n/e_{n-1}^2
$n = -1$	-1.5	-7.2191×10^{-1}	.
$n = 0$	-1.062368533792363	-2.8428×10^{-1}	5.5371×10^{-1}
$n = 1$	-0.811390053377368	-3.3300×10^{-2}	4.1245×10^{-1}
$n = 2$	-0.778121468055391	-3.1869×10^{-5}	2.8605×10^{-1}
$n = 3$	-0.778089598678622	-2.0650×10^{-14}	1.9321×10^{-1}
$n = 4$	-0.778089598678601	0	0

Cuadro 4.4: Método de Newton para $f_3(x) = x^6 - x - 1$ con $x_0 = -1.5$

En la tabla (4.4) se incluyen los resultados obtenidos para $x_0 = -1.5$ y en la (4.5) los correspondientes a $x_0 = 1.5$, calculados con el método de Newton, los errores y los cocientes entre cada error y el cuadrado del error anterior. Se muestra la con-

vergencia cuadrática esperada para el método de Newton, al tratarse de raíces simples.

$f_3(x) = x^6 - x - 1$	Newton		
	x_n	$e_n = x_n - r$	e_n/e_{n-1}^2
$n = 0$	1.5	3.6528×10^{-1}	.
$n = 1$	1.197724009623430	6.3000×10^{-2}	4.7478×10^{-1}
$n = 2$	1.135373207975046	6.4907×10^{-4}	1.7296×10^{-1}
$n = 3$	1.134724139221495	8.1998×10^{-10}	1.9236×10^{-1}
$n = 4$	1.134724138401519	0	0

Cuadro 4.5: Método de Newton para $f_3(x) = x^6 - x - 1$ con $x_0 = 1.5$

De igual manera, en la tabla (4.6) se incluyen los resultados obtenidos para $x_0 = -1.5$ y en la (4.7) los correspondientes a $x_0 = 1.5$, calculados con el método de Halley, los errores y los cocientes entre cada error y el cubo del error anterior. Se puede observar que ambas tablas muestran la convergencia cúbica esperada para el método de Halley, al tratarse de raíces simples.

$f_3(x) = x^6 - x - 1$	Halley		
	x_n	$e_n = x_n - r$	e_n/e_{n-1}^3
$n = -1$	-1.5	-7.2191×10^{-1}	.
$n = 0$	-1.062368533792363	-2.8428×10^{-1}	7.5560×10^{-1}
$n = 1$	-0.811390053377368	-3.3300×10^{-2}	1.4495×10^0
$n = 2$	-0.778121468055391	-3.1869×10^{-5}	8.6302×10^{-1}
$n = 3$	-0.778089598678622	-2.0650×10^{-14}	6.3797×10^{-1}
$n = 4$	-0.778089598678601	0	0

Cuadro 4.6: Método de Halley para $f_3(x) = x^6 - x - 1$ con $x_0 = -1.5$

Finalmente, se establecerá una comparación de estos métodos en términos de ecuaciones de grado superior, con raíces múltiples, y evaluadas desde diferentes aproximaciones iniciales. Para esto, sea la función $f_4(x) = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108$

$f_3(x) = x^6 - x - 1$	Halley		
	x_n	$e_n = x_n - r$	e_n/e_{n-1}^3
$n = 0$	1.5	3.6528×10^{-1}	.
$n = 1$	1.197724009623430	6.3000×10^{-2}	1.2926×10^0
$n = 2$	1.135373207975046	6.4907×10^{-4}	2.5958×10^0
$n = 3$	1.134724139221495	8.1998×10^{-10}	2.9987×10^0
$n = 4$	1.134724138401519	0	0

Cuadro 4.7: Método de Halley para $f_3(x) = x^6 - x - 1$ con $x_0 = 1.5$

cuyas raíces son $r_1 = 1, r_2 = -2$ y $r_3 = 3$, con multiplicidades 1, 2 y 3 respectivamente. En este caso concreto hay que especificar que algunos resultados se han obtenido al satisfacerse la condición $|f(x_n)| \leq 10^{-14}$ pero sin llegar a cumplirse $|x_n - x_{n-1}| \leq 10^{-14}$ como ha sucedido en los resultados mostrados en los ejemplos anteriores.

f_5	Newton		Halley	
	Iteraciones	Raíz	Iteraciones	Raíz
$x_0 = 1.5$	9	1	5	1
$x_0 = -1$	38	-2	24	-2
$x_0 = 2$	26	-2	17	3

Cuadro 4.8: Número de iteraciones y raíces aproximadas para los métodos de Newton y Halley.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de los resultados presentados sobre los métodos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior. Además, se establecen las conclusiones y posibles líneas futuras de investigación que se pueden generar a partir de los hallazgos de esta tesis.

5.2. Análisis comparativo de los métodos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior

Los métodos de Newton y Halley son métodos iterativos que se utilizan para encontrar aproximaciones a las soluciones de ecuaciones no lineales de la forma $f(x) = 0$. Las ecuaciones y resultados presentados muestran que cuando se inician lo suficientemente cerca de la raíz y cumplen ciertas condiciones, el método de Newton tiene convergencia cuadrática, en tanto que el de Halley, convergencia cúbica. Como tal, el método de Halley es una extensión del método de Newton que incorpora información adicional sobre la segunda derivada de la función, lo que conduce a una convergencia más rápida y una mayor precisión en comparación a este. También es de destacar, que determinar la segunda derivada en el método de Halley implica un cálculo adicional, lo que puede aumentar el costo computacional por iteración.

Ambos métodos pueden volverse inestables o divergentes si la elección de la aproximación inicial no es adecuada o si las condiciones de convergencia no se cumplen. El método de Halley puede ser más sensible a aproximaciones iniciales cercanas a puntos singulares (donde $f'(x) = 0$) debido a la presencia de la segunda derivada $f''(x)$ en la fórmula iterativa.

Para evitar problemas con ambos métodos, es esencial seleccionar una aproximación inicial adecuada y asegurarse de que la función sea diferenciable y no tenga

singularidades en el intervalo considerado. Si se cumplen estas condiciones, tanto el método de Newton como el de Halley pueden ser herramientas muy útiles para encontrar raíces de funciones con alta precisión. Sin embargo, si la función presenta singularidades o características complicadas cerca de las raíces, puede ser necesario recurrir a otros métodos numéricos para resolver el problema en cuestión.

En sentido general, los ejemplos, teoremas y proposiciones presentados en el capítulo anterior, resaltan que el método de Halley es más eficiente al requerir menos iteraciones para alcanzar la misma precisión. Además, se muestra cómo la elección del valor inicial puede afectar la raíz aproximada a la que convergen los métodos, destacando el carácter local de su convergencia. Sin embargo, es fundamental considerar la naturaleza de la función y la precisión deseada al seleccionar el método y el valor inicial más apropiado en aplicaciones prácticas.

5.3. Conclusiones

En correspondencia de los resultados presentados y el análisis anterior, se plantean las siguientes conclusiones de acuerdo a los objetivos planteados.

1. Al aplicar los métodos iterativos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior, ambos métodos demostraron ser eficaces y convergieron hacia soluciones aceptables en muchos casos. Sin embargo, también se determinó que la elección del método adecuado puede depender de la naturaleza específica de la ecuación y las condiciones iniciales.
2. En el análisis del comportamiento de los métodos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior, el método de Newton demostró ser rápido en términos de convergencia local, pero su rendimiento puede verse afectado por puntos iniciales cercanos a singularidades o mínimos locales. Por otro lado, el método de Halley, al utilizar información adicional en su cálculo, mostró una tasa de convergencia aún más rápida y una mejor estabilidad cerca de puntos críticos. Sin embargo, también esto implica una mayor carga computacional en

cada iteración. La elección del método más adecuado dependerá de la precisión requerida y las características de la ecuación a resolver.

3. Al comparar los métodos iterativos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones de orden superior, se determinó que ambos tienen sus ventajas y desventajas. El método de Newton es más sencillo de implementar y generalmente requiere menos operaciones computacionales por iteración, lo que puede ser ventajoso para ecuaciones menos complejas o situaciones en las que se busque una solución aproximada rápida. Por otro lado, el método de Halley ofrece una convergencia más rápida y una mayor estabilidad cerca de puntos críticos, lo que lo hace más adecuado para ecuaciones difíciles o que requieran alta precisión en la solución, aunque debido a su mayor complejidad computacional, puede ser más lento en términos de tiempo de ejecución.

En lo que respecta al objetivo general de esta investigación, se determinó que el método de Newton converge rápidamente en regiones locales, aunque puede ser sensible a condiciones iniciales cercanas a singularidades o mínimos locales. Por su parte, el método de Halley presenta una convergencia aún más veloz y mayor estabilidad cerca de puntos críticos, aunque implica una carga computacional más elevada. La elección del método más adecuado dependerá de la precisión requerida y las características específicas de cada ecuación, pero en general, ambos métodos ofrecen soluciones efectivas para ecuaciones de orden superior.

5.4. Futuras líneas de investigación

De acuerdo a las conclusiones obtenidas en esta investigación y sus implicaciones en la literatura matemática, a continuación se sugieren algunas líneas futuras en el marco de esta temática investigativa.

1. Análisis comparativo de los métodos de Newton y Halley en la solución de ecuaciones trascendentales, con coeficientes complejos y funciones multivariadas.
2. Optimización de los métodos de Newton y Halley para la solución de ecuaciones de orden superior.

3. Aplicación de los métodos iterativos de Newton y Halley en problemas de ciencias de la computación: un estudio de caso en aprendizaje automático y optimización.
4. Métodos de Newton y Halley en sistemas dinámicos caóticos.

Referencias

- Ali, S. S., Haq, R. U., y Ahmad, I. (2017). A comparison of numerical methods for solving ordinary differential equations. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 8(6), 1533–1538.
- Aljoufie, A., y Althobaiti, A. (2019). Newton’s method and its modifications for finding zeros of nonlinear equations. *Journal of King Saud University - Science*, 31(2), 181-190.
- Bailey, D. F. (1989). A historical survey of solution by functional iteration. *Mathematics Magazine*, 62(3), 155-166.
- Bartle, R. G., y Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis* (4th ed.). Wiley.
- Burden, R. L., y Faires, J. D. (2011). *Análisis numérico*. Cengage Learning Editores.
- Chen, X. (2018). On the newton method for nonlinear complementarity problems. *Computational Optimization and Applications*, 69(3), 675-698.
- Cordero, A., y Torregrosa, J. R. (2007). Variants of newton’s method using fifth-order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation*, 190(1), 686-698.
- Cox, D., Little, J., y O’Shea, D. (2007). *Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*. Springer.
- Espinoza, E. (2020). La investigación formativa. una reflexión teórica. *Conrado*, 16(74), 45-53.
- Fernández, J., y Jiménez, J. (2001). El método de halley: posiblemente, el método más redescubierto del mundo. En *Margarita mathematica: en memoria de josé javier (chicho) guadalupe hernández* (pp. 205–220).
- Frey, A. (2022). El método de halley.
- Garrido, J. (2009). *Álgebra lineal*. Pearson Educación.
- Grinberg, E. (2020). A self-contained proof of the fundamental theorem of algebra. *American Mathematical Monthly*, 127(1), 44-55.

- Hernández, S. L. (2018). *Apuntes de cálculo numérico: con aplicaciones sobre euler math toolbox*.
- Hernández-Sánchez, I. (2020). El método de newton para la determinación de raíces múltiples.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2010). *Investigación*. México, DF: McGraw Hill.
- Kincaid, D., y Cheney, W. (2012). *Análisis numérico: matemáticas para la computación*. Cengage Learning Editores.
- Kung, H., y Traub, J. (1974). Optimal order of one-point and multipoint iteration. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4), 643-651.
- Moreno, J. M. D., y Trujillo, F. B. (1999). *Introducción a los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones*. Servicio Publicaciones UCA.
- Naranjo, J. C. (2019). Nonlinear and stochastic optimization with applications to finance. *Computational Optimization and Applications*, 74(2), 327-350.
- Ortega. (2018). Enfoques de investigación. *Métodos para el diseño urbano-Arquitectónico*, 1.
- Ortega, y Rheinboldt, W. (2000). *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Petkovic, M., y Neta, B. (2012). *Multipoint methods for solving nonlinear equations*. Academic Press.
- Plaza, S., y Gutiérrez, J. M. (2013). Dinámica del método de newton. *Iberus. Campos de Excelencia Internacional, Universidad de la Rioja*.
- Ramezani, F. (2019). Comparación de métodos iterativos con orden de convergencia tres y cuatro. *Dilemas contemporáneos: Educación, Política y Valores*.
- Ramos-Galarza, C. A. (2020). Los alcances de una investigación. *CienciAmérica*, 9(3), 1-6.
- Rodríguez, A. (2017). Métodos científicos de indagación y de construcción del conocimiento. *Revista Escuela de Administración de Negocios*(82), 1-26.
- Rodríguez, C. (2020). Optimización de la selección de aproximaciones iniciales en el método de newton y el método de halley. *Revista de Matemáticas Aplicadas*.

- Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Said, O., y Hashim, I. (2019). Eficacia de métodos óptimos para ecuaciones no lineales con aplicaciones de ingeniería química. *Problemas Matemáticos en Ingeniería*.
- Sánchez, M. G., y Batlle, M. N. (2001). *Cálculo numérico* (Vol. 98). Univ. Politèc. de Catalunya.
- Scavo, T., y Thoo, J. (1995). On the geometry of halley's method. *The American mathematical monthly*, 102(5), 417–426.
- Silva, C. C., y Martins, R. d. A. (2003). A teoria das cores de newton: um exemplo do uso da história da ciência em sala de aula. *Ciência & Educação*, 9(01), 53–65.

ANEXOS

Anexo 1. Comportamiento del error del Método de Newton.

El método de Newton suele funcionar de manera espectacular, siempre que la suposición inicial esté lo suficientemente cerca de una solución de $f(x) = 0$. Una forma adecuada de seleccionar esta suposición inicial es trazar el gráfico de $y = f(x)$. Ahora se comprende por qué el método de Newton suele funcionar de manera espectacular, siempre que la suposición inicial esté lo suficientemente cerca de una solución de $f(x) = 0$.

Sea r cualquier solución de $f(x) = 0$. Entonces, $f(r) = 0$. Suponiendo que ya se ha calculado x_n . El error en x_n se denota por $|x_n - r|$. A continuación, se deriva una fórmula que relaciona el error después del próximo paso, $|x_{n+1} - r|$, con $|x_n - r|$.

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(c)(x - x_n)^2$$

para algún c entre x_n y x . En particular, al elegir $x = r$,

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{1}{2}f''(c)(r - x_n)^2$$

Mediante la definición de x_{n+1} ,

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

De hecho, se define x_{n+1} como la solución de $0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$.

$$\begin{aligned} 0 = f'(x_n)(r - x_{n+1}) + \frac{1}{2}f''(c)(r - x_n)^2 &\Rightarrow x_{n+1} - r = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - r)^2 \\ &\Rightarrow |x_{n+1} - r| = \frac{|f''(c)|}{2|f'(x_n)|}|x_n - r|^2 \end{aligned}$$

Si la suposición x_n está cerca de r , entonces c , que debe estar entre x_n y r , también está cerca de r y $|x_{n+1} - r| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|}|x_n - r|^2$. Incluso cuando x_n no está cerca de r , si se sabe que hay dos números $L, M > 0$ tales que f cumple:

$$\text{H1) } |f'(x_n)| \geq L$$

$$\text{H2) } |f''(c)| \leq M$$

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2L} |x_n - r|^2$$

Denotando por ε_1 el error $|x_1 - r|$ de la suposición inicial. De hecho, denotando por ε_n el error $|x_n - r|$ en x_n . Entonces,

$$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{M}{2L} \varepsilon_n^2$$

En particular

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &\leq \frac{M}{2L} \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_3 &\leq \frac{M}{2L} \varepsilon_2^2 \leq \frac{M}{2L} \left(\frac{M}{2L} \varepsilon_1^2 \right)^2 = \left(\frac{M}{2L} \right)^3 \varepsilon_1^4 \\ \varepsilon_4 &\leq \frac{M}{2L} \varepsilon_3^2 \leq \frac{M}{2L} \left(\left(\frac{M}{2L} \right)^3 \varepsilon_1^4 \right)^2 = \left(\frac{M}{2L} \right)^7 \varepsilon_1^8 \\ \varepsilon_5 &\leq \frac{M}{2L} \varepsilon_4^2 \leq \frac{M}{2L} \left(\left(\frac{M}{2L} \right)^7 \varepsilon_1^8 \right)^2 = \left(\frac{M}{2L} \right)^{15} \varepsilon_1^{16} \end{aligned}$$

Ahora se verifica un patrón que se puede generalizar por inducción,

$$\varepsilon_n \leq \left(\frac{M}{2L} \right)^{2^{n-1}-1} \varepsilon_1^{2^{n-1}} = \frac{2L}{M} \left(\frac{M}{2L} \varepsilon_1 \right)^{2^{n-1}}$$

Siempre que $\frac{M}{2L} \varepsilon_1 < 1$ (lo que indica cuán buena debe ser la primera suposición para que el método de Newton converja), esto tiende rápidamente a cero a medida que n aumenta. Por ejemplo, asumiendo que $\frac{M}{2L} \varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}$. Entonces

$$\varepsilon_n \leq \frac{2L}{M} \left(\frac{1}{2} \right)^{2^{n-1}} \leq \frac{2L}{M} \begin{cases} 0.25 & \text{si } n = 2 \\ 0.0625 & \text{si } n = 3 \\ 0.0039 = 3.9 \times 10^{-3} & \text{si } n = 4 \\ 0.000015 = 1.5 \times 10^{-5} & \text{si } n = 5 \\ 0.00000000023 = 2.3 \times 10^{-10} & \text{si } n = 6 \\ 0.00000000000000000054 = 5.4 \times 10^{-20} & \text{si } n = 7 \end{cases}$$

Cada vez que aumenta n en uno, la cantidad de ceros después del punto decimal se duplica aproximadamente. Ejemplo 5.1 Considerese $f(x) = x^2 - 2$, comenzando con $x_1 = \frac{3}{2}$. Entonces

$$f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2$$

Se puede tomar con seguridad $M = 2$ y si, $x_n \geq 1$ para todo n se puede tomar también $L = 2$. Aunque no se sabe qué valor tiene r , sí se tiene que $1 \leq r \leq 2$ (ya que $f(1) = 1^1 - 2 < 0$ y $f(2) = 2^2 - 2 > 0$). Dado que se toma $x_1 = \frac{3}{2}$, se tiene $\varepsilon_1 = |x_1 - r| \leq \frac{1}{2}$, lo da $\frac{M}{2L}\varepsilon_1 \leq \frac{1}{4}$ y

$$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{2L}{M} \left(\frac{M}{2L} \varepsilon_1 \right)^{2^{n-1}} \leq 2 \left(\frac{1}{4} \right)^{2^{n-1}}$$

Anexo 2. Comportamiento del error del Método de Halley.

El método de Halley viene dado por la expresión:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}$$

Donde x_{n+1} es la aproximación a la raíz proporcionada por el método de Halley obtenida en el paso $n + 1$. Pues bien, designando por α a la raíz buscada, el error cometido en el paso $n + 1$ vendrá dado por

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$$

mientras que el error en el paso n será

$$e_n = x_n - \alpha$$

Ahora bien, restando α a ambos lados de la igualdad que nos proporciona el método de Halley, lo que nos permite obtener el error cometido en el paso $n + 1$, podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha &= x_n - \alpha - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \\ &= x_n - \alpha - \frac{2f(\alpha + e_n)f'(\alpha + e_n)}{2f'(\alpha + e_n)^2 - f(\alpha + e_n)f''(\alpha + e_n)} \\ &= e_n - \frac{2f(\alpha + e_n)f'(\alpha + e_n)}{2f'(\alpha + e_n)^2 - f(\alpha + e_n)f''(\alpha + e_n)} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$f(\alpha) = 0$$

puesto que α es raíz de la ecuación, si se desarrolla el segundo sumando del lado derecho de la igualdad anterior en serie de Taylor en torno al punto e_n resulta

$$\begin{aligned} \frac{2f(\alpha + e_n)f'(\alpha + e_n)}{2f'(\alpha + e_n)^2 - f(\alpha + e_n)f''(\alpha + e_n)} &= e_n + \frac{(-3f''(\alpha)^2 + 2f'(\alpha)f'''(\alpha))e_n^3}{12f'(\alpha)^2} \\ &\quad + \mathcal{O}(e_n)^4 \end{aligned}$$

Introduciendo esta expresión en la igualdad obtenida para e_{n+1} , se puede escribir

$$\begin{aligned}
 e_{n+1} &= e_n - \frac{2f(\alpha + e_n)f'(\alpha + e_n)}{2f'(\alpha + e_n)^2 - f(\alpha + e_n)f''(\alpha + e_n)} \\
 &= e_n - \left(e_n + \frac{-3f''(\alpha)^2 + 2f'(\alpha)f'''(\alpha)}{12f'(\alpha)^2}e_n^3 + \mathcal{O}(e_n)^4 \right) \\
 &= \frac{3f''(\alpha)^2 - 2f'(\alpha)f'''(\alpha)}{12f'(\alpha)^2}e_n^3 + \mathcal{O}(e_n)^4,
 \end{aligned}$$

expresión que permite aproximar el error cometido por el método de Halley en el paso $n + 1$ y además demuestra que el método presenta convergencia de tercer orden.