

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de postgrado para Optar por el Título de Magister en
Matemáticas

Título

Caracterización de los promedios de coeficientes seculares de una matriz de grupo.

Sustentante

Eliana Paola Gómez Santos

Asesor

Dr. Francisco Ramírez

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez
Año académico 2023.

TÍTULO

CARACTERIZACIÓN DE LOS PROMEDIOS DE COEFICIENTES
SECULARES DE UNA MATRIZ DE GRUPO.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Caracterización de los promedios de coeficientes seculares de una matriz de grupo.

Proyecto de tesis presentado por **Eliana Paola Gómez Santos** para optar por el título de Magister en Matemáticas

Composición del tribunal

MA. Ynosencia Merejo

Jurado de metodología

MA. Nelson Sánchez

Jurado de Redacción

MA. Julio Manzueta

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos.	VI
Dedicatoria.	VII
RESUMEN.	VIII
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	1
1.2.2 Antecedentes académicos	2
1.3 Planteamiento del problema	5
1.4 Justificación	6
1.5 Objetivos	7
1.5.1 General	7
1.5.2 Específicos	7
1.6 Alcances y límites	7
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL	8
2.1 Introducción	8
2.2 Matrices	8
2.3 Matriz de grupo	13
2.4 Coeficientes Seculares	18
CAPÍTULO III. DISEÑO METODOLÓGICO	22
3.1 Introducción	22
3.2 Marco metodológico	22
3.2.1 Diseño	22
3.2.2 Método	22
3.2.3 Tipo	22
3.2.4 Enfoque	22
3.3 Procedimientos	23

CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	24
4.1 Introducción	24
4.2 Promedios de coeficientes seculares en matrices de grupos unitarias .	24
4.3 Promedios de coeficientes seculares en matrices de grupos simplécticos	29
4.4 Caracterización de los promedios de coeficientes seculares a grupos ortogonales.	31
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	35
5.1 Introducción	35
5.2 Análisis de los promedios de coeficientes seculares de una matriz de grupo	35
5.3 Conclusiones	37
5.4 Líneas futuras de investigación	38
Referencias	39
ANEXOS.....	42

Agradecimientos.

A Dios: Quien me ha brindado la fortaleza, la sabiduría y la inspiración necesarias para llevar a cabo este proyecto. Su presencia ha sido fuente de consuelo y esperanza durante este emocionante y desafiante viaje académico.

A mi asesor de tesis: Francisco J. Ramírez C., que ha sido una figura fundamental en este proceso. Sus conocimientos expertos, dedicación y paciencia fueron esenciales para la realización de este trabajo. Gracias por su orientación y por creer en mí cuando las dificultades surgieron.

A la universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO): Gracias a la universidad por brindarme la oportunidad de cursar esta formación académica. A lo largo de este tiempo aquí, adquirí valiosos conocimientos y tuve la oportunidad de crecer tanto profesional como personalmente.

A mis maestros: Que han dejado una huella duradera en mi educación. Cada uno de ustedes ha contribuido a mi desarrollo intelectual y ha enriquecido mi comprensión del mundo que me rodea. Sus enseñanzas han sido invaluable y me han motivado a esforzarme constantemente en mi aprendizaje.

Dedicatorias.

A Dios: Con infinita gratitud, elevo mi más sincera dedicatoria a Dios, fuente inagotable de sabiduría y fortaleza. Su guía divina ha iluminado mi camino durante esta travesía académica, permitiéndome superar obstáculos y alcanzar logros que jamás habría imaginado. Con humildad, reconozco Su inmenso amor y protección, pues sin Él, este logro no hubiera sido posible.

A mis padres: Elena Santos y Julio Gómez, quienes han sido mi pilar inquebrantable en cada paso de mi vida. Su incansable apoyo, sacrificio y amor incondicional han sido la fuerza motriz que me ha llevado hasta este momento. A través de su sabiduría y ejemplo, he aprendido el valor del esfuerzo y la perseverancia.

A mi hijo: Keilen Elian Cárdenas Gómez, eres el sol que ilumina mi vida con cada amanecer. Esta tesis va dedicada a ti, fuente de alegría y motivación constante. A lo largo de este arduo camino, tu presencia ha sido mi mayor impulso para no rendirme y seguir adelante.

A mis compañeros de estudios: Maritza Reyes, Eridania Torres, Wilber Collado, Yadirí Mosquea y Frankely Escolástico, esta tesis lleva consigo el espíritu de unidad y amistad que hemos compartido a lo largo de nuestra travesía académica. Juntos hemos enfrentado desafíos, celebrado triunfos y creado recuerdos imborrables. Sus compañía ha sido un bálsamo en los momentos difíciles y una fuente de inspiración para superarnos cada día.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante

Eliana Paola Gómez Santos.

Asesor

Dr. Francisco Ramírez.

RESUMEN

Este proyecto presenta una caracterización de los promedios de los coeficientes seculares de las matrices de grupo, cuyos objetivos investigativos fueron establecer las condiciones que garantizan la aplicación de los promedios de coeficientes seculares a las matrices de grupo unitarios, aplicar las propiedades de los coeficientes seculares a grupos simplécticos y caracterizar estos promedios a grupos ortogonales.

Este estudio utilizó un diseño no experimental y transversal. Se aplicó el método analítico-deductivo para deducir las fórmulas que permitieron establecer las condiciones para calcular los promedios de estos coeficientes seculares en las matrices de grupo. La investigación fue de tipo explicativa-descriptiva, con un enfoque cualitativo.

Conforme a los objetivos establecidos, las conclusiones obtenidas señalan que el promedio de los coeficientes seculares de una matriz de grupo unitaria puede ser expresada en términos de una constante $C_{N,k}$, dependiente de los parámetros N y k , y el determinante de una función. La formulación de la constante presenta diferentes formas que implican productos y determinantes. La fórmula que caracteriza el promedio de los coeficientes seculares de los grupos simplécticos implica la utilización de propiedades y fórmulas de funciones de Schur, de carácter irreducible y de

la función generadora. En tanto que para el análisis de los grupos ortogonales, tanto para $G = O(2N)$ y $G = SO(2N)$ se utiliza la función generadora para extraer una fórmula explícita que permite representar el promedio de los coeficientes seculares. Esta fórmula es válida para cualquier valor de N y k en ambos casos. Para el caso de $G = SO(2N)$, se utiliza adicionalmente la relación entre la integral y una matriz para expresar el carácter asociado al grupo especial ortogonal.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

En este primer capítulo se describen los antecedentes históricos y académicos que sustentan esta investigación, además del planteamiento del problema, justificación, los objetivos, y la delimitación que define los alcances y límites de la misma.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes históricos

En la versión más simple de las oscilaciones de un péndulo, se está frente a un problema que se podría etiquetar como sencillo para la dinámica, pero en la primera memoria que Lagrange dedicó a este tema en 1766, el problema se trata de manera más general: marco de la oscilación de un sistema de n cuerpos y categorización en relación al cálculo integral. Las oscilaciones se matematizan efectivamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes que se van a integrar. Lagrange es el primero en dar la solución general de tal sistema, mostrando que se deduce directamente de la factorización de un tipo particular de ecuación algebraica. Unos años más tarde, Lagrange traslada esta misma matematización al estudio de las pequeñas oscilaciones de los planetas, denominadas “desigualdades seculares”. El problema pasa así a la mecánica celeste y la ecuación algebraica que da la solución es designada entonces con el nombre de ecuación secular. Las ecuaciones particulares a menudo pasan desapercibidas en la historiografía, sin embargo, los nuevos enfoques que Lagrange desarrolló para estudiar las ecuaciones seculares forman la base del álgebra lineal. (Caparrini, 2014).

En la década de 1770, Lagrange transfirió su matematización de las pequeñas oscilaciones de una cuerda al estudio de las pequeñas oscilaciones de los planetas. Aunque muy leves, las oscilaciones denominadas “seculares” no dificultan el cálculo de las efemérides a largo plazo, sino que a largo plazo también pueden producir modificaciones significativas en las órbitas y amenazar así la estabilidad del sistema

solar. A partir de 1774 Lagrange trasladó a las desigualdades seculares el enfoque que había elaborado en 1766 para el caso de las cuerdas vibrantes. (Brechenmacher, 2014).

En los años 1770 a 1780, Lagrange y Laplace dedicaron numerosas memorias al estudio de las desigualdades seculares. Estos trabajos relacionados alimentaron los dos grandes tratados de síntesis: La Mecánica Analítica de Lagrange y el Tratado de Mecánica Celestial de Laplace (Laplace, 1799).

La estabilidad mecánica de las oscilaciones de un sistema de cuerpos se caracterizó por la naturaleza de las raíces de una determinada ecuación algebraica. Esta última era comúnmente conocida en el siglo XIX como la “ecuación de las desigualdades seculares en la teoría planetaria” debido a su papel en el estudio de la estabilidad del sistema solar. Es, en términos modernos, la ecuación característica de un sistema lineal simétrico; su estudio arroja luz sobre una parte importante de la historia del álgebra lineal. En el siglo XIX, la ecuación secular desempeñó un papel fundamental tanto en la mecánica celeste como en la geometría, tanto en el análisis complejo como en la aritmética (Brechenmacher, 2014).

1.2.2. Antecedentes académicos

Haake et al. (1996) en su publicación “Determinantes seculares de matrices unitarias aleatorias”, realizaron un estudio sobre los polinomios característicos de matrices unitarias aleatorias extraídas de varios conjuntos circulares. El objetivo general de su investigación fue analizar las estadísticas de los coeficientes de estos polinomios. La metodología utilizada consistió en examinar las variaciones explícitas de estos coeficientes seculares para una dimensión arbitraria y analizarlos de manera analítica hasta alcanzar valores arbitrarios del exponente de repulsión de nivel β . Además, los investigadores establecieron una relación entre estos últimos coeficientes seculares y las trazas de las potencias utilizando las conocidas fórmulas de Newton. Si bien las trazas tienden a tener distribuciones gaussianas y a ser estadísticamente independientes entre sí, a medida que la dimensión de la matriz crece, los coeficientes seculares

exhiben fuertes correlaciones mutuas debido a la mezcla de trazas y coeficientes de Newton.

Sommers, Haake y Weber (1998), en su estudio titulado “Densidades conjuntas de coeficientes seculares para matrices unitarias”, cuyo objetivo general fue caracterizar las densidades conjuntas de coeficientes seculares para matrices. Estos determinaron la densidad conjunta de los coeficientes seculares y de las trazas de potencias para matrices unitarias aleatorias a partir de conjuntos circulares de Dyson. Un subproducto son las condiciones de unitaridad viables, necesarias y suficientes para que todas las raíces de un polinomio sean unimodulares y diferentes. Estos hallazgos son útiles para combinaciones de teoría de matriz aleatoria con aproximaciones semiclásicas en el cálculo de propiedades espectrales de sistemas cuánticos cuyo límite clásico es globalmente caótico.

De acuerdo con Diaconis y Gamburd (2004), en su publicación sobre "Matrices aleatorias, cuadrados mágicos y polinomios coincidentes", el objetivo general del estudio fue analizar la varianza de los coeficientes de estos polinomios y explorar la posibilidad de calcular momentos más altos. Haake y sus colaboradores calcularon la varianza de los coeficientes y plantearon la pregunta de cómo calcular momentos superiores. Se encontró una estrecha relación entre este problema y el conteo de matrices estocásticas enteras, específicamente, los cuadrados mágicos. Además, se investiga el significado combinatorio de los momentos de los coeficientes seculares de las matrices del Conjunto de Ensamblados Unitarios Gaussianos (GUE), y se analiza la conexión con los polinomios coincidentes. La metodología empleada en el estudio implicó técnicas teóricas y analíticas para calcular las varianzas y momentos de los coeficientes seculares de las matrices unitarias aleatorias. Se exploraron enfoques combinatorios y conexiones con otras áreas de las matemáticas y la física teórica, como la teoría de números y el caos cuántico.

Forrester y Gamburd (2006), en su artículo titulado "Fórmulas de conteo asociadas con algunos promedios de matrices aleatorias", realizaron un estudio en el cual concluyeron que los momentos de los coeficientes seculares y seculares inversos, promediados sobre matrices aleatorias de grupos clásicos, están relacionados con la enumeración de matrices no negativas con sumas de filas y columnas prescritas. El objetivo general de su investigación fue analizar las propiedades combinatorias y de conteo asociadas con los momentos promediados de los coeficientes seculares de matrices aleatorias. En términos de metodología, los autores utilizaron técnicas de conteo y teoría combinatoria para establecer conexiones entre los momentos promediados de los coeficientes seculares y problemas de enumeración, como la enumeración de matrices no negativas con restricciones de suma en filas y columnas.

Mezzadri, Reynolds y Winn (2017), en su investigación titulada "Momentos de las densidades de valores propios y de los coeficientes seculares de conjuntos β ", contemplaron como objetivo calcular los momentos de la densidad de valores propios y promedios de coeficientes seculares. Como resultado de este estudio, los autores calcularon los momentos positivos y negativos de la densidad de los valores propios y los promedios de los coeficientes seculares para los conjuntos β de Gauss, Laguerre y Jacobi para matrices de dimensiones finitas. El enfoque se basó en la teoría de los polinomios de Jack, que son una herramienta natural en el estudio de conjuntos β . Además, establecieron que los valores de los coeficientes seculares también se pueden expresar en términos de promedios de polinomios de Jack.

Najnudel, Paquette y Simm (2020), en un artículo llamado Coeficientes seculares y el caos multiplicativo holomorfo, estudiaron los coeficientes seculares de una matriz unitaria aleatoria U_N de orden $N \times N$ extraída del conjunto circular β , que está definido como los coeficientes de z^n en el polinomio característico $\det(1 - zU_N^*)$. Obtuvieron para $\beta > 4$, una nueva clase de distribuciones limitantes que surgen cuando tanto n como N tienden a infinito simultáneamente.

1.3. Planteamiento del problema

El estudio de los coeficientes seculares es considerado de gran utilidad para combinar la teoría de matriz aleatoria con las aproximaciones semi clásicas en el cálculo de propiedades espectrales de sistemas cuánticos cuyo límite clásico es globalmente caótico, pero, además, ha jugado un papel trascendental tanto en la mecánica celeste como en la geometría, así como en el análisis complejo y la aritmética.

Una matriz de grupo se define como una matriz cuadrada en la que los elementos pertenecen a un conjunto finito de grupos o categorías. Cada grupo está representado por una etiqueta o valor específico. En una matriz de grupo, las filas y las columnas representan entidades o elementos individuales, mientras que los valores de la matriz indican la relación o interacción entre ellos dentro de los grupos. Dichas matrices de grupo se utilizan ampliamente en diversas áreas para representar relaciones entre entidades o variables. Los coeficientes seculares en estas matrices capturan las relaciones y las interacciones entre los elementos del grupo. Un coeficiente se considera secular si su valor se mantiene relativamente constante a lo largo del tiempo, lo que indica una relación estable y significativa entre los elementos correspondientes en la matriz de grupo.

Aunque los coeficientes seculares son de gran importancia, su valor individual puede ser sensible a las fluctuaciones aleatorias o ruido en los datos (Navidi, 2014). Para superar esta limitación, se propone estudiar el promedio de los coeficientes seculares en lugar de los valores individuales. Este enfoque proporcionará una visión más robusta y generalizable del comportamiento de la matriz de grupo a lo largo del tiempo.

Además, investigar los promedios de los coeficientes seculares de una matriz de grupo permite obtener información valiosa sobre la variabilidad y la estabilidad de los atributos dentro de cada grupo. Esta información es crucial para comprender mejor la distribución y la influencia de los atributos en el conjunto de datos y puede ayudar a detectar posibles discrepancias o desviaciones significativas. En virtud de esto, esta

investigación pretende dar respuesta a la pregunta ¿Cuáles condiciones caracterizan los promedios de coeficientes seculares de una matriz de grupo?

La respuesta a esta pregunta general, se concretiza a través de las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué condiciones garantizan la aplicación de los promedios de coeficientes seculares a las matrices de grupo unitarios?
2. ¿Cómo aplicar las propiedades de los coeficientes seculares a grupos simplécticos?
3. ¿Cómo caracterizar los promedios de coeficientes seculares de grupos ortogonales?

1.4. Justificación

La investigación en la teoría de grupos y su relación con diversas áreas de las ciencias ha experimentado un crecimiento significativo en las últimas décadas. Sin embargo, aún quedan áreas no exploradas y fenómenos no comprendidos completamente. Un área que requiere atención particular es el análisis de los coeficientes seculares dentro de las matrices de grupo.

La relevancia de este proyecto se justifica en las múltiples aplicaciones que tienen las matrices de grupos en el comportamiento dinámico de una gran variedad de sistemas, de forma que se puedan establecer resultados que permitan analizar y establecer las condiciones que garantiza la estabilidad de los mismos. Además, la importancia de este estudio se sostiene en los aportes de las ecuaciones y coeficientes seculares en la mecánica celeste, que de por sí, sentaron las bases de un gran desarrollo del álgebra lineal y su conexión con aspectos geométricos. Tal importancia también se sustenta al considerar el promedio de los coeficientes seculares en lugar de los valores individuales, se lograría una mayor estabilidad y generalización de los resultados obtenidos. Los coeficientes seculares individuales pueden verse afectados por

fluctuaciones aleatorias o ruido en los datos, lo que dificulta su interpretación precisa.

Los coeficientes seculares de una matriz de grupo revelan características y propiedades fundamentales del grupo al que pertenece la matriz. Estos coeficientes pueden servir como una herramienta para entender la estructura subyacente de los grupos, que son fundamentales en numerosas áreas de las matemáticas y la física, como la teoría de la representación, la física de partículas, la teoría de la información cuántica, entre otras.

Este estudio pretende servir de base a futuras líneas de investigaciones, debido a que es un tema poco estudiado en el contexto de la República Dominicana y en la comunidad matemática de la región, y así puedan ser aplicados para solución de problemas concretos de la modelación matemática, y la realización de algoritmos informáticos.

1.5. Objetivos

1.5.1. General

Caracterizar los promedios de coeficientes seculares de una matriz de grupo.

1.5.2. Específicos

1. Establecer las condiciones que garantizan la aplicación de los promedios de coeficientes seculares a las matrices de grupo unitarios.
2. Aplicar las propiedades de los coeficientes seculares a grupos simplécticos.
3. Caracterizar los promedios de coeficientes seculares a grupos ortogonales.

1.6. Alcances y límites

Esta investigación está orientada a la Matemática Pura, en específico en el área de algebra, donde se utilizarán matrices de grupos unitarios y ortogonales, polinomios de matrices aleatorias, grupo simpléctico y grupos ortogonales para caracterizar los promedios de coeficientes seculares de una matriz de grupo.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1. Introducción

En este capítulo, se exponen de manera detallada los referentes teóricos que constituyen el fundamento conceptual de esta investigación, por medio de definiciones, proposiciones, teoremas y algunas demostraciones.

2.2. Matrices

Definición 2.1 Según Merino (2021), dado un cuerpo F , una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes en F es un arreglo de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Constituida por mn elementos de F distribuidos en m filas y n columnas, de forma que denotamos por a_{ij} al elemento situado en la fila i , columna j . De forma reducida se expresa:

$$A = (a_{ij})_{i,j}$$

Definición 2.2 De acuerdo con Grossman y Flores (2012), sea A una matriz de $n \times n$. El cofactor ij de A , denotado por A_{ij} , está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i + j \text{ es impar} \end{cases}$$

Definición 2.3 Sea A una matriz de $n \times n$, entonces el determinante de A , denotado por $\det A$ o $|A|$, está dado

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$$

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots a_{1n}A_{1n}$$

La definición anterior, bien puede ser consultada en Grossman y Flores (2012).

Definición 2.4 Valor característico y vector característico. Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales. El número λ (real o complejo) se denomina valor característico de A si existe un vector diferente de cero v en $\mathbb{C}^n$ (conjunto complejo de n dimensiones) tal que

$$Av = \lambda v$$

El vector $v \neq 0$ se denomina vector característico de A correspondiente al valor característico λ . El número λ puede ser real o complejo, y el vector v puede tener componentes reales o complejos (Kolman y Hill, 2006).

Definición 2.5 Ecuación característica y polinomio característico. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$ y λ el valor característico. El determinante

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es el polinomio característico de A . La ecuación

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

Es la ecuación característica de A (Kolman y Hill, 2006).

Teorema 2.1 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces λ es un valor característico de A si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Definición 2.6 Una matriz de Vandermonde es una matriz que presenta una progresión geométrica en cada fila. Los índices de la matriz de tamaño $n \times n$ están descritos por $V_{i,j} = k_i^{j-1}$ para todos los índices i y j variando de 1 a n , lo cual se puede describir explícitamente de la forma siguiente:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_1^2 & \dots & k_1^{n-1} \\ 1 & k_2 & k_2^2 & \dots & k_2^{n-1} \\ 1 & k_3 & k_3^2 & \dots & k_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & k_n & k_n^2 & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

En el primer elemento de cada fila hay solamente unos (al ser la potencia de cero) y en el segundo elemento hay una serie de números arbitrarios. En el tercero se encuentran esos mismos números elevados al cuadrado. En el cuarto están esos mismos números elevados al cubo y en las siguientes columnas elevados a la potencia inmediatamente superior de manera que en el elemento n de cada fila esos números estén elevados a la potencia $n-1$.

El determinante de una matriz de Vandermonde está dado por:

$$\Delta(x) = \det_{1 \leq i, j \leq k} x_j^{i-1} = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j)$$

Proposición 2.2.1 Conforme lo establece Betea y Wheeler (2016), se plantean las siguientes identidades en términos de las particiones:

Identidad de Hall-Littlewood.

$$\sum_{\lambda \text{ par}} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x_i^2} \prod_{i < j} \frac{1}{1 - x_i x_j} \quad (2.1)$$

Desarmenien-Stembridge-Proctor

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \leq 2N \\ \lambda \text{ par}}} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\Delta(x)} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x_i^2} \prod_{i < j} \frac{1}{1 - x_i x_j} \det_{1 \leq i, j \leq k} [x_i^{j-1} - x_i^{2N+2k+1-j}] \quad (2.2)$$

Definición 2.7 La multiplicación de dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ produce a matriz $AB = (\sum_{l=1}^n a_{il}b_{lj})$.

Teorema 2.2 En Larson (2016), se presentan las siguientes propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación por un escalar. Si A, B y C son matrices de $m \times n$; $c, d, 1$, escalares, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

- $A + B = B + A$ Propiedad conmutativa de la suma
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ Propiedad asociativa de la suma
- $(cd)A = c(dA)$ Propiedad asociativa de la multiplicación de escalares
- $1A = A$ Identidad multiplicativa
- $c(A + B) = cA + cB$ Propiedad distributiva izquierda
- $(c + d)A = cA + dA$ Propiedad distributiva derecha

Teorema 2.3 En Larson (2016), se presentan las siguientes propiedades de la multiplicación de matrices. Si A, B y C son matrices (con tamaños tales que los productos matriciales dados están definidos) y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

- $A(BC) = (AB)C$ Propiedad asociativa de la multiplicación
- $A(B + C) = AB + AC$ Propiedad distributiva izquierda
- $(A + B)C = AC + BC$ Propiedad distributiva derecha
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Definición 2.8 La traspuesta de una matriz se forma al escribir sus columnas como renglones. Si A es la matriz de $m \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces la traspuesta, denotada por A^T , es la matriz de tamaño $n \times m$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.4 Propiedades de la traspuesta.

Si A y B son matrices (de tamaño tal que las operaciones con matrices dadas están definidas) y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

- $(A^T)^T = A$ Traspuesta de la traspuesta
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ Traspuesta de una suma
- $(cA)^T = c(A^T)$ Traspuesta de la multiplicación por un escalar
- $(AB)^T = B^T A^T$ Traspuesta de un producto

Definición 2.9 Una matriz A de $n \times n$ es invertible (o no singular) si existe una matriz B de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n . La matriz B se denomina inversa (multiplicativa) de A . La matriz A que no tiene una inversa se denomina no invertible (o singular).

Teorema 2.5 Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única. La inversa de A se denota por A^{-1} .

Teorema 2.6 Si A es una matriz invertible, k es un entero positivo y c es un escalar diferente de cero, entonces A^{-1} , A^k , cA y A^T son invertibles y se cumple lo siguiente.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

$$2. \left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$$

$$3. (cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$$

$$4. \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

Teorema 2.7 Si A y B son dos matrices invertibles de tamaño n , entonces AB es invertible y se cumple que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2.3. Matriz de grupo

Definición 2.10 Un grupo es un conjunto G junto con una multiplicación que satisfaga las siguientes tres propiedades (Boij y Laksov, 1995):

1. (Asociatividad) Para cualquiera a, b, c de elementos de G , se tiene que

$$a(bc) = (ab)c$$

2. (Identidad) Hay un elemento e en G tal que

$$a = ae = ea$$

para todos los elementos a de G .

3. (Inversa) Para cada elemento a de G hay un elemento b de G tal que

$$e = ab = ba.$$

Definición 2.11 Un homomorfismo de un grupo G a un grupo H es un mapeo

$$\Phi : G \rightarrow H$$

tal que $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$, para todo a, b en G .

El homomorfismo Φ se llama isomorfismo si es sobreyectivo, es decir todos los elementos de H es la imagen de algún elemento en G , e inyectiva, eso si a y b son

diferentes elementos en G entonces $\Phi(a)$ y $\Phi(b)$ son elementos distintos en H .

El núcleo del homomorfismo Φ es el conjunto

$$\ker \Phi = \{a \in G \mid \Phi(a) = e_H\},$$

y la imagen es el conjunto

$$\operatorname{im} \Phi = \{a \in H \mid a = \Phi(b), \quad \text{para algún } b \in G\}.$$

Proposición 2.3.1 El mapeo de grupos

$$\det: \operatorname{Gl}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^*$$

que envía una matriz a su determinante es un homomorfismo de grupos por la fórmula $\det AB = \det A \det B$. El núcleo de este mapeo es $\operatorname{Sl}_n(\mathbf{C})$ y la imagen es $\mathbf{C}^*$.

Proposición 2.3.2 El mapeo

$$\Phi: \operatorname{Gl}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \operatorname{Sl}_{n+1}$$

dada por

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} (\det A)^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

es un homomorfismo de grupos. Claramente, el homomorfismo Φ es inyectivo.

Proposición 2.3.3 El mapeo $\mathbf{C}^* \rightarrow \operatorname{SO}_2(\mathbf{C})$, que envía t a

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t+t^{-1}) & \frac{i}{2}(t-t^{-1}) \\ -\frac{i}{2}(t-t^{-1}) & \frac{1}{2}(t+t^{-1}) \end{pmatrix},$$

es un homomorfismo de grupo.

Proposición 2.3.4 Un homomorfismo $\Phi: G \rightarrow H$ de grupos es inyectiva si y solo si el núcleo es $\{e_G\}$. En otras palabras, Φ es inyectiva si y solo si $\Phi(a) = e_H$ implica que $a = e_G$.

Proposición 2.3.5 Un subgrupo H de un grupo G es un subconjunto H de G tal que para todo a y b en H se tiene que ab y a^{-1} están en H . Un subgrupo H de G es normal si bab^{-1} está en H para todo b en G y a en H .

Definición 2.12 Una matriz grupo, o grupo lineal, es un grupo G cuyos elementos son de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ sobre un campo F . El grupo lineal general $GL(n, F)$ es el grupo que consiste en toda matriz invertible $n \times n$ sobre el campo F . Entonces un grupo G es una matriz grupo precisamente cuando es un subgrupo de $GL(n, F)$ para algún número natural n y campo F . Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre F , se denota por $GL(V)$ el grupo de transformaciones lineales invertibles de V ; de este modo $GL(V) \cong GL(n, F)$.

Una matriz grupo $G \leq GL(V)$ se dice que es reducible si existe un subespacio G -invariante U de V distinto de 0 y de V , y es irreducible en caso contrario. Una matriz grupo $G \leq GL(V)$ se dice que es separable si V es la suma directa de dos subespacios G -invariantes no nulos, e inseparable en caso contrario. Si V puede expresarse como la suma directa de subespacios irreducibles, entonces G es completamente reducible. (Por lo tanto, un grupo irreducible es completamente reducible.) Si el grupo de matrices $G \leq GL(n, F)$ es irreducible considerado como un subgrupo de $GL(n, K)$ para cualquier extensión algebraica K de F , decimos que G es absolutamente irreducible (Cameron, 2007).

Definición 2.13 El Grupo Unitario de orden N , $U(N)$, es el grupo asociado con las matrices unitarias de $N \times N$ bajo la multiplicación de matrices.

Definición 2.14 El grupo ortogonal de grado n sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, designado como $O(n, \mathbb{F})$, es el grupo de matrices ortogonales n por n con las entradas en $\mathbb{F}$, y la operación de grupo dada por la multiplicación de matrices. Este es un subgrupo del grupo general lineal.

Cada matriz ortogonal tiene determinante 1 o -1 . Las matrices n por n ortogonales con determinante 1 forman un subgrupo normal de $O(n, \mathbb{F})$ conocido como el

grupo ortogonal especial, también conocido como grupo de rotaciones. Si la característica de $\mathbb{F}$, es 2, entonces $O(n, \mathbb{F})$ y $SO(n, \mathbb{F})$ coinciden; en caso contrario el índice de $SO(n, \mathbb{F})$ en $O(n, \mathbb{F})$ es 2 .

$SO(n, \mathbb{F})$ y $O(n, \mathbb{F})$ son grupos algebraicos, porque la condición que una matriz sea ortogonal, es decir que su propia transpuesta sea su inversa, se puede expresar como un conjunto de ecuaciones polinómicas en las entradas de la matriz. (Ahumada, 2022)

Proposición 2.3.6 Cuando $\lambda_n \neq 0$, el carácter irreducible de $O(2N)$ está dado por $\chi_{\lambda_+}^{SO(2n)} + \chi_{\lambda_-}^{SO(2n)}$:

$$\chi_{\lambda}^{O(2n)}(x^{\pm 1}) = \frac{\det_{1 \leq i, j \leq n} (x_j^{\lambda_i + n - i} + x_j^{-(\lambda_i + n - i)})}{\det_{1 \leq i, j \leq n} (x_j^{n - i} + x_j^{-(n - i)})}.$$

El determinante en el numerador se puede evaluar de la siguiente manera:

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} (x_j^{n - i} + x_j^{-(n - i)}) = \frac{\prod_{i < j} (x_i - x_j) (x_i x_j - 1)}{(x_1 \cdots x_n)^{n-1}}.$$

Ahora, utilizando la fórmula del carácter de Weyl para el grupo ortogonal y la evaluación del numerador, se tiene:

$$\begin{aligned} (x_1 \cdots x_k)^N \chi_{N^k}^{O(2k)}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) = \\ \det \begin{vmatrix} x_1^{N+k-1} + x_1^{-(N+k-1)} & x_1^{N+k-2} - x_1^{-(N+k-2)} & \cdots & x_1^N - x_1^{-(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^{N+k-1} - x_k^{-(N+k-1)} & x_k^{N+k-2} - x_k^{-(N+k-2)} & \cdots & x_k^N - x_k^{-(N)} \end{vmatrix} \\ \times \frac{(x_1 \cdots x_k)^{k+N-1}}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1)}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Definición 2.15 Diagramas propios. Sea $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ una partición de n . Entonces $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$. A cada partición se le asocia lo que se conoce como diagrama de Ferrer. El diagrama es una colección de bloques de longitud λ_i de ancho (Medjedovic, 2021).

Definición 2.16 Un grupo simpléctico es un grupo definido como el conjunto de transformaciones lineales de un espacio vectorial de $2n$ dimensiones sobre el campo F que conserva una forma bilineal sesgada simétrica no degenerada. Tal espacio vectorial se llama espacio vectorial simpléctico, y el grupo simpléctico de un espacio vectorial simpléctico abstracto V se denota como $\text{Sp}(V)$. Al fijar una base para V , el grupo simpléctico se convierte en el grupo de matrices simplécticas de $2n \times 2n$, con entradas en F , bajo la operación de multiplicación de matrices

$$\text{Sp}(2n, F) = \{M \in M_{2n \times 2n}(F) : M^T \Omega M = \Omega\}$$

donde M^T es la traspuesta de M . A menudo, Ω se define como

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

donde I_n es la matriz identidad.

Denotando el carácter irreducible del grupo simpléctico $\text{Sp}(2n)$ etiquetado por la partición λ como $\chi_\lambda^{\text{Sp}_{2n}}$, la fórmula del carácter de Weyl en el caso del grupo simpléctico puede escribirse como:

$$\chi_\lambda^{\text{Sp}_{2n}}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}) = \frac{\det_{1 \leq i, j \leq n} (x_j^{\lambda_i + n - i + 1} - x_j^{-(\lambda_i + n - i + 1)})}{\det_{1 \leq i, j \leq n} (x_j^{n - i + 1} - x_j^{-(n - i + 1)})}. \quad (2.3)$$

El determinante en el denominador puede evaluarse según Weyl (Bump y Gamburd, 2006):

$$\det_{1 \leq i, j \leq n} (x_j^{n - i + 1} - x_j^{-(n - i + 1)}) = \frac{\prod_{i < j} (x_i - x_j) (x_i x_j - 1) \prod_i (x_i^2 - 1)}{(x_1 \cdots x_n)^n}. \quad (2.4)$$

La fórmula de dimensión de Weyl para la representación irreducible del grupo simpléctico $\text{Sp}(2k)$ etiquetada por la partición λ es

$$\dim(\chi_\lambda^{\text{Sp}_{2k}}) = \frac{\prod_{i < j} (\mu_i - \mu_j) (\mu_i + \mu_j + 2) \prod_i (\mu_i + 1)}{(2k - 1)!(2k - 3)! \cdots 1!} \quad (2.5)$$

donde $\mu_i = \lambda_i + k - i$.

Definición 2.17 Se define el polinomio de Schur de λ como

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \frac{\det \begin{pmatrix} x_1^{\lambda_1+k-1} & x_2^{\lambda_1+k-1} & \dots & x_k^{\lambda_1+k-1} \\ x_1^{\lambda_2+k-2} & x_2^{\lambda_2+k-2} & \dots & x_k^{\lambda_2+k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_k} & x_2^{\lambda_k} & \dots & x_k^{\lambda_k} \end{pmatrix}}{\Delta(x)}$$

Definición 2.18 Para una partición λ , la función de Schur en las variables $x_1, \dots, x_r$ indexadas por λ es un polinomio multivariable definido por

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_r) := \sum_T x_1^{a_1(T)} \dots x_r^{a_r(T)},$$

donde la suma se realiza sobre cuyas entradas pertenecen al conjunto $\{1, \dots, r\}$ (es decir, $a_i(T) = 0$ para $i > r$).

2.4. Coeficientes Seculares

Definición 2.19 Sea A una matriz de orden $n \times n$. Se definen los coeficientes seculares $Sc_j(A)$, como los coeficientes del polinomio característico de A tal que:

$$\det(I + xA) = \sum_{j=0}^N Sc_j(A)x^j$$

De modo que $Sc_0(A) = 1, Sc_1(A) = \text{tr}(A), Sc_N(A) = \det(A)$. Los coeficientes seculares son solo funciones simétricas elementales en los valores propios de A . Recordar que $\text{tr}(A)$ es la traza, la cual está dada por la suma de los elementos de la diagonal principal de A .

Sea G uno de los grupos de la matriz $U(N), Sp(2N), SO(N)$ or $O(N)$.

$$I_k^G(n, N) := \int_G \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n \\ 0 \leq j_1, \dots, j_k \leq N}} Sc_{j_1}(U) \dots Sc_{j_k}(U) dU. \quad (2.6)$$

A menos que $G = U(N)$ donde se introduce un término conjugado, elevando al cuadrado el integrando:

$$I_k^G(n, N) := \int_G \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_k = n \\ 0 \leq j_1, \dots, j_k \leq N}} |Sc_{j_1}(U) \dots Sc_{j_k}(U)|^2 dU. \quad (2.7)$$

La conexión con la teoría del campo de funciones necesita alguna notación adicional. Sea f un polinomio mónico en $\mathbb{F}_q$ y use $d_k(f)$ para indicar el número de formas de escribir f como $f = f_1 \dots f_k$ con f_i mónica. Suponemos que el índice A es un polinomio mónico en $\mathbb{F}_q$. Además, para un polinomio mónico, se define

$$I(A; h) = \{f : \|f - A\| \leq q^h\}$$

con $\|f\| = q^{\deg(f)}$ and

$$\mathcal{N}(A; h) := \sum_{f \in I(A; h)} d_k(f)$$

ser la suma del divisor en los campos de función. Definiendo la diferencia y la varianza en intervalos cortos de manera similar,

$$\Delta_k(A; h) := \mathcal{N}(A; h) - q^{h+1} \binom{n+k-1}{k-1},$$

$$\text{Var}(\mathcal{N}) := \frac{1}{q^n} \sum_{\deg(A)=n} |\Delta_k(A; h)|^2.$$

Definición 2.20 Sea $G \in \{U(N), O(N), SP(2N), SO(N)\}$ una matriz de grupo, se define el promedio de los coeficientes seculares, como:

$$P_{k,N}^G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n I_k^G(n, N).$$

Proposición 2.4.1 Eliminación de Singularidades para Momentos. Se considera un polinomio $P(x)$ dado por

$$P(x) = \det_{1 \leq i, j \leq k} [x_{j-1}^{a_i}]$$

donde a_i son enteros no negativos. Entonces,

$$P(x) = P(x_0, \dots, x_{k-1}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=0}^{k-1} x_i^{a_{\sigma(i)}}$$

Este es un polinomio alternante y, por lo tanto, divisible por $\Delta(x)$. Se busca encontrar $\frac{P(x)}{\Delta(x)}$ cuando $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = u$. Al tomar el límite cuando $x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_3$, etc., y aplicar la regla de L'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow (u, \dots, u)} \frac{P(x)}{\Delta(x)} = \frac{1}{1!2! \dots (k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{k-1}^{k-1}} \dots \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{(u, \dots, u)} P(x).$$

Se expande $P(x)$ según su definición, tomando derivadas y emparejando los términos $i!$ con los términos $a_{\sigma(i)}$ para obtener coeficientes binomiales.

$$\lim_{x \rightarrow (u, \dots, u)} \frac{P(x)}{\Delta(x)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=0}^{k-1} \binom{a_{\sigma(i)}}{i} x_i^{a_{\sigma(i)}-i} \Big|_{(u, \dots, u)}$$

Y se han calculado las singularidades removibles de $\frac{P(x)}{\Delta(x)}$ como

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{\Delta(x)} \Big|_{(u, \dots, u)} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=0}^{k-1} \binom{a_{\sigma(i)}}{i} x_i^{a_{\sigma(i)}-i} \Big|_{(u, \dots, u)} \\ &= \det_{1 \leq i, j \leq k} \left[\binom{a_j}{i-1} x_{i-1}^{a_j-i+1} \right] \Big|_{(u, \dots, u)} \\ &= \det_{1 \leq i, j \leq k} \left[\binom{a_j}{i-1} u^{a_j-i+1} \right]. \end{aligned}$$

Lema 2.1 Sea $P(x) = \det_{1 \leq i, j \leq k} [p_j(x_{i-1})]$ un polinomio alternante donde cada p_j es a su vez un polinomio. Entonces,

$$\frac{P(x)}{\Delta(x)} \Big|_{(u, \dots, u)} = \det_{1 \leq i, j \leq k} \left[\frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial u^{i-1}} p_j(u) \right]$$

Proposición 2.4.2 De acuerdo con Bump y Gamburd (2006), se establece una relación entre un producto de términos y una suma de caracteres asociados a los grupos simplécticos dada por la igualdad:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k \prod_{n=1}^N (x_i + x_i^{-1} + t_n + t_n^{-1}) &= \\ \sum_{\lambda \subseteq N^k} \chi_{\lambda}^{\text{Sp}(2k)} (x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) \chi_{\lambda}^{\text{Sp}(2N)} (t_1^{\pm 1}, \dots, t_N^{\pm 1}), \end{aligned}$$

Proposición 2.4.3 Se establece que (Bump y Gamburd, 2006):

$$\int_{\mathrm{Sp}(2N)} \prod_{j=1}^k \det(I + x_j g) dg = (x_1 \dots x_k)^N \chi_{\langle N^k \rangle}^{\mathrm{Sp}(2k)}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) =$$

$$\sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}} \prod_{j=1}^k x_j^{N(1-\varepsilon_j)} \prod_{i \leq j} (1 - x_i^{\varepsilon_i} x_j^{\varepsilon_j})^{-1}.$$

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Introducción

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos de esta investigación; los cuales hacen referencia al método, diseño, tipo, enfoque y procedimientos requeridos para el desarrollo de la misma.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño

El diseño que contempla esta investigación es el no experimental, ya que tal como lo plantea Hernández et al. (2014), las variables no se manipulan de forma intencionada. Según el tiempo de estudio, el diseño será el transversal, el cual es definido por el mismo autor como aquel en el que se recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único.

3.2.2. Método

Este estudio se fundamentó en la aplicación del método deductivo, pues de acuerdo con Olabuénaga, 2012), debido a su capacidad para establecer conclusiones lógicas y coherentes a partir de premisas iniciales. Se basa en reglas y principios generales para inferir conclusiones específicas.

3.2.3. Tipo

De acuerdo a las características, esta investigación es de tipo explicativa-descriptiva, ya que estuvo marcada por el interés de describir, mostrar y caracterizar los coeficientes seculares de una matriz de grupo (Ramos-Galarza, 2020). Además, es de tipo exploratorio ya que abordó una temática poco conocida, con el fin de proveer una referencia general de la misma (Morales, 2015).

3.2.4. Enfoque

Debido a que en esta investigación no se buscó medir las variables, el enfoque utilizado es el cualitativo, basando su desarrollo en una caracterización de los coeficientes seculares (Ortega, 2018).

3.3. Procedimientos

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso de realización de este trabajo de investigación:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, sobre los fundamentos de los coeficientes seculares y las matrices de grupos.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos constitutivos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada del borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a presentar los resultados que dan respuestas a los objetivos investigativos planteados sobre la caracterización de los promedios de coeficientes seculares de una matriz de grupo. Para tales fines, inicialmente se caracterizarán estos promedios sobre matrices de grupo unitarias, luego en grupos simplécticos, y por último, en grupos ortogonales.

4.2. Promedios de coeficientes seculares en matrices de grupos unitarias

Tal como se consideró en el marco referencial de esta investigación, las matrices de grupos unitarias de orden N estarán denotadas por $U(N)$, y consideradas como grupos asociados con las matrices unitarias de $N \times N$ bajo la multiplicación de matrices. También, la notación $P_{k,N}^G(u)$ donde G es una matriz de grupo, identificará el promedio de los coeficientes seculares, definido en sentido general como

$$P_{k,N}^G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n I_k^G(n, N).$$

Teorema 4.1 Sean $G = U(N)$ y $U \in U(N)$, entonces $P_{k,N}^G(u)$ estará definido por:

$$P_{k,N}^G(u) = \frac{C_{N,k}}{(1-u)^{k^2}} \det \frac{1 - u^{N+i+j-1}}{N+i+j-1}$$

con

$$C_{N,k} = \prod_{j=1}^k \frac{(N+k-j-1)!}{(j-1)!^2(N+j-1)!}$$

Demostración. Se inicia considerando las expresiones para los determinantes $(I - xU)^k$ y $(I - yU^*)^k$ en función de las funciones Schur:

$$\det(I - xU)^k = \left(\sum_{j=1}^N \text{Sc}_j(U) (-x)^j \right)^k \quad (4.1)$$

$$\det(I - yU^*)^k = \left(\sum_{i=1}^N \text{Sc}_i(U^*) (-y)^i \right)^k \quad (4.2)$$

Al aplicar la integral con respecto a U , se obtiene:

$$\begin{aligned} & \int_G \det(I - xU)^k \det(I - yU^*)^k dU \\ &= \int_G \left(\sum_{j=1}^N \text{Sc}_j(U) (-x)^j \right)^k \left(\sum_{i=1}^N \text{Sc}_i(U^*) (-y)^i \right)^k dU \end{aligned} \quad (4.3)$$

Se emplea el lema de ortogonalidad de los coeficientes Schur, que establece que la integral del producto de dos coeficientes Schur conjugados complejos sobre el grupo unitario es igual a δ_{ij} .

$$\int_G \overline{\text{Sc}_i(U)} \text{Sc}_j(U) dU = \delta_{ij} \quad (4.4)$$

Dado que los coeficientes Schur son ortonormales, las integrales cruzadas se anulan y solo sobreviven términos en los cuales $i = j$. Esto elimina los términos de la forma $x^n y^m$ con $m \neq n$ en la integral.

A continuación, se introduce el cambio de variables $U \mapsto Uw$ en la integral, donde w es una matriz diagonal con elementos $w_1, w_2, \dots, w_n$. Esto conduce a:

$$\begin{aligned} & \int_G \det(I - xU)^k \det(I - yU^*)^k dU \\ &= \int_G \det(I - xUw)^k \det(I - y(Uw)^*)^k dU \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se utiliza la propiedad del determinante del producto de matrices para expandir las expresiones dentro de la integral:

$$\begin{aligned} & \int_G \det(I - xUw)^k \det(I - y(Uw)^*)^k dU \\ &= \int_G \prod_{i=1}^k \det(I - xUw) \prod_{j=1}^k \det(I - y(U^* w^*)) dU. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Luego, se realiza el cambio de variables lineal $U \mapsto Uw_i$ en el i -ésimo determinante del producto para $i = k+1, k+2, \dots, n$, utilizando la autocorrelación. Esto conduce a:

$$\begin{aligned}
& \prod_{l=k+1}^n w_l^N \int_{U(N)} \prod_{i=k+1}^n \det(I - w_i^{-1}U) \prod_{j=1}^k \det(I - w_j U^*) dU \\
&= \frac{1}{\prod_{1 \leq \ell < q \leq n} (w_q - w_\ell)} \begin{vmatrix} 1 & w_1 & w_1^2 & \cdots & w_1^{k-1} & w_1^{N+k} & w_1^{N+k+1} & \cdots & w_1^{N+n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n & w_n^2 & \cdots & w_n^{k-1} & w_n^{N+k} & w_n^{N+k+1} & \cdots & w_n^{N+n-1} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Especializando $m = k$, $n = 2k$, $w_1 = w_2 = \dots = w_k = x$ y $w_{k+1} = \dots = w_{2k} = 1$, y eliminando las singularidades como en el lema anterior, se llega a:

$$I_k^{U(N)}(n, N) = [x^n] \frac{1}{(1-x)^{k^2}} \begin{vmatrix} A(x) & B(x) \\ A(1) & B(1) \end{vmatrix} \tag{4.8}$$

donde

$$A_{ij}(x) = \binom{j-1}{i-1} x^{j-i} \tag{4.9}$$

$$B_{ij}(x) = \binom{N+2k+j-1}{i-1} x^{N+2k+j-i} \tag{4.10}$$

Dado que $A(x)^{-1} = A(-x)$, esta igualdad puede verificarse utilizando la identidad binomial subyacente. La identidad se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_{l=1}^k (-1)^{i+l} \binom{l-1}{i-1} \binom{j-1}{l-1} = \binom{j-1}{i-1} \sum_{l=1}^k (-1)^{i-l} \binom{j-i}{l-i}$$

Esta igualdad se analiza en varios casos:

1. Si $j > i$, entonces la suma a la derecha se convierte en una suma alternante de la j -ésima fila del triángulo de Pascal, lo que lleva a su anulación.
2. Si $j < i$, el factor $\binom{j-1}{i-1}$ multiplicado antes de la suma es igual a 0.
3. Si $i = j$, solo un término contribuye a la suma, $l = i$, lo que resulta en el valor 1.

Al multiplicar la matriz $A(x)$ por la matriz de bloques:

$$\begin{pmatrix} A(-x) & 0 \\ 0 & A(-1) \end{pmatrix}$$

Se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} A(-x) & 0 \\ 0 & A(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ A(1) & B(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A(-x)B(x) \\ I & A(-1)B(1) \end{pmatrix}$$

Después, se realiza otra multiplicación con la matriz:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}$$

Para eliminar la matriz identidad I en la esquina inferior izquierda:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A(-x)B(x) \\ I & A(-1)B(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A(-x)B(x) \\ 0 & A(-1)B(1) - A(-x)B(x) \end{pmatrix}$$

Estas operaciones de multiplicación no afectan el determinante, ya que ambas multiplicaciones son por matrices triangulares con 1 en la diagonal. Por lo tanto, el determinante de la matriz resultante es igual al determinante del bloque inferior izquierdo de tamaño $k \times k$:

$$|A(-1)B(1) - A(-x)B(x)|_{k \times k}$$

Al calcular las entradas de esta matriz, se llega a la conclusión de que la entrada i, j es:

$$\sum_{l=1}^k (-1)^{k-i} \binom{l-1}{i-1} \binom{N+k+j-1}{l-1} (1 - x^{N+k+j-i})$$

Se utiliza la propiedad:

$$\binom{l-1}{i-1} \binom{N+k+j-1}{l-1} = \binom{N+k+j-1}{i-1} \binom{N+k+j-i}{l-i}$$

Por lo tanto, la ecuación anterior se transforma en:

$$\binom{N+k+j-1}{i-1} (1-x^{N+k+j-i}) (-1)^i \sum_{l=1}^k (-1)^l \binom{N+k+j-i}{l-i}$$

La suma resultante es:

$$(-1)^i \sum_{l=0}^{k-i} (-1)^l \binom{N+k+j-i}{l}$$

Esta es una suma alternante de la fila $N+k+j-i$ del triángulo de Pascal, que se iguala a:

$$(-1)^k \binom{N+k+j-i-1}{k-i}$$

Al regresar al determinante de tamaño $k \times k$, la entrada i, j de la matriz es:

$$(-1)^{k-i} \binom{N+k+j-1}{i-1} \binom{N+k+j-i-1}{k-i} (1-x^{N+k+j-i})$$

Este producto de coeficientes binomiales se iguala a:

$$\binom{N+k+j-1}{i-1} \binom{N+k+j-i-1}{k-i} = \frac{(N+k+j-1)!}{(i-1)!(k-i)!(N+j-1)!(N+k+j-i)}$$

Se extrae un factor de $\frac{(-1)^{k-i}}{(i-1)!(k-i)!}$ de la fila i del determinante y un factor de $\frac{(N+k+j-1)!}{(N+j-1)!}$ de la columna j . Esto lleva a que el determinante en la expresión anterior sea igual a:

$$\begin{aligned} & \prod_{j=1}^k \frac{(-1)^{k-j} (N+k+j-1)!}{(j-1)!(k-j)!(N+j-1)!} \det \left[\frac{1-x^{N+i+j-1}}{N+i+j-1} \right]_{k \times k} \\ &= \prod_{j=1}^k \frac{(N+k+j-1)!}{(j-1)!2(N+j-1)!} \det \left[\frac{1-x^{N+i+j-1}}{N+i+j-1} \right]_{k \times k} \end{aligned}$$

donde, en la última igualdad, se han invertido las k filas de la matriz. De esta manera, se ha llegado a la expresión:

$$I_k^{U(N)}(n, N) = [x^n] \frac{C_{N,k}}{(1-x)^{k^2}} \det \frac{1-x^{N+i+j-1}}{N+i+j-1}$$

En esta ecuación, $C_{N,k}$ representa una constante que depende únicamente de N y k , y puede expresarse de diversas formas:

$$C_{N,k} = \prod_{j=1}^k \frac{(N+k+j-1)!}{(j-1)!^2(N+j-1)!} = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq k} (N+i+j-1)}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (j-i)^2}$$

$$C_{N,k} = \frac{1}{\det_{1 \leq i, j \leq k} \left[\frac{1}{N+i+j-1} \right]}$$

Posteriormente, dado que $P_{k,N}^G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n I_k^G(n, N)$, se reemplaza x^n por u^n en la ecuación:

$$P_{k,N}^G(u) = \frac{C_{N,k}}{(1-u)^{k^2}} \det \frac{1-u^{N+i+j-1}}{N+i+j-1}$$

Este es el resultado buscado y marca la conclusión de la demostración.

4.3. Promedios de coeficientes seculares en matrices de grupos simplécticos

En esta sección, se considera que la matriz de grupo G para el promedio de los coeficientes seculares, denotado por $P_{k,N}^G(u)$, serán las matrices de grupos simplécticos. En tal sentido, el siguiente teorema establece una ecuación que permite el cálculo de estos promedios, cuando la matriz grupo de referencia es $G = SP(2N)$

Teorema 4.2 Si $G = SP(2N)$, entonces $P_{k,N}^G(u)$ está dado por:

$$P_{k,N}^G(u) = \frac{1}{(1-u^2)^{\binom{k+1}{2}}} \det_{1 \leq i, j \leq k} \left[\binom{j-1}{i-1} u^{j-i} - \binom{2N+2k+1-j}{i-1} u^{2N+2k+2-j-i} \right]$$

Demostración. Se inicia con la fórmula que establece la relación entre la función generadora $P_{k,N}^G(u)$ y la integral sobre el grupo G :

$$\sum_{n=0}^{2kN} u^n I_k^G(n, N) = \int_G \det(1 + xU)^k dU$$

Donde $I_k^G(n, N)$ representa el conteo de matrices $k \times k$ con elementos en G que son invariantes bajo las transformaciones de G , tienen rango n , y un rango reducido de N .

Siguiendo con la proposición previa y haciendo uso de la ecuación de los grupos simplécticos, se tiene de que:

$$\int_{Sp(2N)} \prod_{i=1}^k \det(1 + x_i U) dU = (x_1 \dots x_k)^N \chi_{\langle N^k \rangle}^{Sp(2k)}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1})$$

En esta expresión, $\chi_{\langle N^k \rangle}^{Sp(2k)}$ denota un carácter irreducible de la teoría de representación de $GL_n(\mathbb{C})$. Esto conduce a la relación:

$$(x_1 \dots x_k)^N \chi_{\langle N^k \rangle}^{Sp(2k)}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) = \sum_{\substack{\lambda_1 \leq 2N \\ \lambda \text{ incluso}}} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_k)$$

Donde la suma se extiende a todas las particiones pares λ que cumplen $\lambda_1 \leq 2N$, y s_{λ} representa los polinomios de Schur asociados a la partición λ . Luego, la función generadora $P_{k,N}^G(u)$ se puede expresar como:

$$P_{k,N}^G(u) = \sum_{n=0}^{2kN} u^n I_k^G(n, N)$$

En el caso en que $n < 2N$, es posible utilizar una fórmula para $I_k^{Sp(2n)}(n, N)$ que se deriva de la identidad de Hall-Littlewood:

$$I_k^{Sp(2n)}(n, N) = \begin{cases} \binom{\frac{n}{2} + \binom{k+1}{2} - 1}{\binom{k+1}{2} - 1}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En situaciones donde $n \geq 2N$, se requiere emplear una versión acotada de la identidad de Hall-Littlewood, específicamente la fórmula de Desarmenien-Stembridge-Proctor:

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \leq 2N \\ \lambda \text{ incluso}}} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\Delta(x)} \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - x_i^2} \prod_{i < j} \frac{1}{1 - x_i x_j} \det_{1 \leq i, j \leq k} [x_i^{j-1} - x_i^{2N+2k+1-j}]$$

En esta fórmula, $\Delta(x) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ denota el determinante de Vandermonde. Cabe destacar que esta fórmula contiene términos singulares cuando x_i son iguales. No obstante, estas singularidades son eliminables debido a que estamos tratando con

una suma finita de polinomios.

Para abordar estas fórmulas en el contexto del teorema, primero se procederá a calcular $P_{k,N}^G(u)$ cuando $n < 2N$, aprovechando la relación con los polinomios de Schur. Posteriormente, se tratará el caso más general donde $n \geq 2N$, utilizando la forma acotada de la identidad de Hall-Littlewood.

Se procede a demostrar el teorema por casos, primero abordando $n < 2N$ y luego $n \geq 2N$.

Caso 1: $n < 2N$ En esta situación, se utiliza la fórmula obtenida de la identidad de Hall-Littlewood para $I_k^{Sp(2n)}(n, N)$:

$$I_k^{Sp(2n)}(n, N) = \begin{cases} \binom{\frac{n}{2} + \binom{k+1}{2} - 1}{\binom{k+1}{2} - 1}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Por lo tanto, la expresión $P_{k,N}^G(u)$ se simplifica en este caso a:

$$P_{k,N}^G(u) = \sum_{n=0}^{2kN} u^n I_k^{Sp(2n)}(n, N) = \sum_{n=0}^{N-1} u^{2n} \binom{n + \binom{k+1}{2} - 1}{\binom{k+1}{2} - 1}$$

Caso 2: $n \geq 2N$ En este escenario más general, se recurre a la fórmula de Desarmenien-Stembridge-Proctor previamente mencionada. Para ello, se evalúa la expresión

$$\frac{\det_{1 \leq i, j \leq k} [x_i^{j-1} - x_i^{2N+2k+1-j}]}{\Delta(x)} \Big|_{(u, \dots, u)}$$

en el punto $(u, \dots, u)$ y se utiliza la fórmula derivada en un lema para eliminar el término $\frac{1}{\Delta(x)}$. El resultado es la expresión del teorema:

$$\det_{1 \leq i, j \leq k} \left[\binom{j-1}{i-1} u^{j-i} - \binom{2N+2k+1-j}{i-1} u^{2N+2k+2-j-i} \right]$$

4.4. Caracterización de los promedios de coeficientes seculares a grupos ortogonales.

En esta sección, se establecerán condiciones que permiten caracterizar y determinar fórmulas para los promedios de coeficientes seculares tanto cuando $G = O(2N)$

correspondientes a los grupos ortogonales, y aquellos cuyo determinante es 1, que son los denominados grupos ortogonales especiales, denotados por $SO(2N)$.

Teorema 4.3 Si $G = O(2N)$, entonces $P_{k,N}^G(u)$ está dado por:

$$P_{k,N}^G(u) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-u^2)^{\binom{k}{2}}} \\ \det \left[\binom{j-1}{i-1} u^{j-i} - \binom{2N+2k-1-j}{i-1} u^{2N+2k-j-i} \right] \\ + \det \left[\binom{j-1}{i-1} u^{j-i} + \binom{2N+2k-1-j}{i-1} u^{2N+2k-j-i} \right].$$

Demostración. Sea $G = O(2N)$. Se parte del hecho que

$$I_k^G(n, N) := \int_{\substack{j_1+\dots+j_k=n \\ 0 \leq j_1, \dots, j_k \leq N}}^G Sc_{j_1}(U) \dots Sc_{j_k}(U) dU$$

para un grupo de matrices G . Considerando la función generadora

$$\sum_{n=0}^{2kN} x^n I_k^G(n, N) = \int_G \det(1 + xU)^k dU$$

Expandiendo en serie de potencias el determinante y su correspondencia de los términos de la serie con las funciones de Schur asociadas a particiones especiales, de acuerdo a la teoría de los grupos ortogonales y la teoría de representación de grupos, se tiene que:

$$\int_G \det(I + xU)^k dU = \sum_{\substack{\lambda_1 \leq 2N \\ \lambda' \text{ incluso}}} s_\lambda(x, \dots, x)$$

donde λ' es la partición conjugada de λ . Si se quiere aislar $I_k^G(n, N)$ se puede separar el término x^n de la expresión anterior como

$$\sum_{\substack{s(\lambda)=n \\ \lambda_1 \leq 2N \\ \lambda' \text{ incluso}}} s_\lambda(1, \dots, 1)$$

el número total de tablas de Young semiestándar de particiones con conjugada par. Aplicando el lema (2.1) para eliminar las singularidades:

$$\sum_{\substack{\lambda_1 \leq 2N \\ \lambda' \text{ incluso}}} s_\lambda(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{2} \frac{\det(x_i^{j-1} - x_i^{2N+2k-1-j}) + \det(x_i^{j-1} + x_i^{2N+2k-1-j})}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_i x_j - 1)(x_i - x_j)}$$

Dado

$$P_{k,N}(u) = \sum_{n=0}^{2kN} u^n I_k^G(n, N)$$

el polinomio cuyos coeficientes enumeran los promedios buscados. Estableciendo todos los $x_i = u$ y utilizando el Lema (2.1), la suma resultante de determinantes da la fórmula:

$$\begin{aligned} P_{k,N}^G(u) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1-u^2)^{\binom{k}{2}}} \\ &\det \left[\binom{j-1}{i-1} u^{j-i} - \binom{2N+2k-1-j}{i-1} u^{2N+2k-j-i} \right] \\ &+ \det \left[\binom{j-1}{i-1} u^{j-i} + \binom{2N+2k-1-j}{i-1} u^{2N+2k-j-i} \right]. \end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración.

Teorema 4.4 Si $G = SO(2N)$, entonces $P_{k,N}^G(u)$ está dado por:

$$P_{k,N}^G(u) = \frac{1}{(1-u^2)^{\binom{k}{N}}} \det \left[\binom{j-1}{i-1} u^{j-1} + \binom{2N+2k-j-1}{i-1} u^{2N+2k-j-i} \right]$$

Demostración. Sea el grupo $G = SO(2N)$. La ecuación (2.3) establece una relación entre la integral y una matriz:

$$\int_G \prod_{j=1}^k \det(I + x_j g) = (x_1 \dots x_k)^N \chi_{\langle N^k \rangle}^{O_{2k}}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1})$$

Se busca obtener una expresión explícita para el carácter χ . Se observa que el carácter $\chi_{N^k}^{O(2k)}$ es la suma de todos los productos de las entradas de una matriz $N^k \times N^k$, donde cada entrada de la matriz es un término de la forma $x_j^{\lambda_i+n-i} + x_j^{-(\lambda_i+n-i)}$ dividido por el determinante de una matriz $n \times n$ con entradas de la forma $x_j^{n-i} + x_j^{-(n-i)}$. Utilizando la fórmula del determinante, se puede escribir explícitamente el carácter $\chi_{N^k}^{O(2k)}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (x_1 \dots x_k)^N \chi_{N^k}^{O(2k)}(x_1^{\pm 1}, \dots, x_k^{\pm 1}) &= \\ \det \begin{vmatrix} x_1^{N+k-1} + x_1^{-(N+k-1)} & x_1^{N+k-2} - x_1^{-(N+k-2)} & \dots & x_1^N - x_1^{-(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k^{N+k-1} - x_k^{-(N+k-1)} & x_k^{N+k-2} - x_k^{-(N+k-2)} & \dots & x_k^N - x_k^{-(N)} \end{vmatrix} \\ &\times \frac{(x_1 \dots x_k)^{k+N-1}}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1)}. \end{aligned}$$

Se define:

$$P_{k,N}(u) = \sum_{n=0}^{2kN} u^n I_k^G(n, N)$$

La ecuación (2.3) se puede expresar en términos de $P_{k,N}(u)$ de la siguiente manera:

$$\int_G \prod_{j=1}^k \det(I + x_j g) = \sum_{n=0}^{2kN} u^n I_k^G(n, N)$$

Se desea expresar $P_{k,N}(u)$ en términos de una matriz. Se observa que cada término $I_k^G(n, N)$ en la suma es un producto de determinantes, donde cada determinante tiene la forma:

$$\det \left[\begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} u^{j-1} + \begin{pmatrix} 2N+2k-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} u^{2N+2k-j-i} \right]$$

Por lo tanto, se puede expresar $P_{k,N}(u)$ en términos de una matriz $2kN \times 2kN$ de la siguiente manera:

$$P_{k,N}^G(u) = \frac{1}{(1-u^2)^{\binom{k}{N}}} \det \left[\begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} u^{j-1} + \begin{pmatrix} 2N+2k-j-1 \\ i-1 \end{pmatrix} u^{2N+2k-j-i} \right]$$

Así se ha demostrado la fórmula deseada.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de los promedios de los coeficientes seculares de las matrices de grupo unitarios, simplécticos y ortogonales a los fines de resaltar los resultados más relevantes de acuerdo a los objetivos planteados. Además, se establecen las conclusiones y algunas líneas futuras que se pueden generar a partir de las mismas.

5.2. Análisis de los promedios de coeficientes seculares de una matriz de grupo

En terminos generales, el promedio de los coeficientes seculares de una matriz, está denotado por

$$P_{k,N}^G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n I_k^G(n, N),$$

donde $I_k^G(n, N)$ es una función asociada a los coeficientes seculares. Con relación al objetivo 1, inicialmente se planteó que cuando la matriz de grupo considerada, es la matriz unitaria, entonces dicho promedio se puede expresar como:

$$P_{k,N}^G(u) = \frac{C_{N,k}}{(1-u)^{k^2}} \det \frac{1 - u^{N+i+j-1}}{N+i+j-1},$$

donde $C_{N,k}$ es una constante que depende únicamente de N y k . Esta constante puede ser expresada de varias formas, tales como:

$$C_{N,k} = \frac{\prod_{1 \leq i, j \leq k} (N+i+j-1)}{\prod_{1 \leq i < j \leq k} (j-i)^2} \quad \text{o} \quad C_{N,k} = \frac{1}{\det_{1 \leq i, j \leq k} \left[\frac{1}{N+i+j-1} \right]}.$$

La demostración del teorema que caracteriza a las matrices unitarias involucra la utilización de la función Schur para expandir determinantes y aplicar propiedades de ortogonalidad. Además, se realizan cambios de variables y manipulaciones matriciales para llegar a la expresión final.

En cuanto al objetivo 2, se demuestra una fórmula que permite caracterizar $P_{k,N}^G(u)$, cuando se consideran los grupos simplécticos. La deducción se basó en utilizar propiedades y fórmulas de funciones de Schur, carácter irreducible y la función generadora. Para esto, se comienza estableciendo la integral que define los coeficientes seculares en el caso de matrices de grupos simplécticos, representadas por $G = SP(2N)$, luego se utiliza la función generadora para extraer el coeficiente $[x^n]$ de la función de Schur, que es el número de Young semiestándar de tipo λ . Posteriormente, se aplican fórmulas de funciones de Schur y Hall-Littlewood para calcular los coeficientes seculares en el caso en que $n < 2N$.

Para el caso en que $n \geq 2N$, se utiliza una forma acotada de la identidad de Hall-Littlewood, que permite calcular los coeficientes seculares incluso en presencia de singularidades. Y de ahí, se llega a una fórmula general para $P_{k,N}^G(u)$, que involucra determinantes y coeficientes binomiales. La fórmula es válida para cualquier valor de N y k .

Con respecto al objetivo 3, se presentan dos casos específicos: cuando $G = O(2N)$ correspondiente a los grupos ortogonales, y cuando $G = SO(2N)$ que son los grupos ortogonales especiales cuyo determinante es 1.

Para el caso de $G = O(2N)$, se parte de la integral $I_k^G(n, N)$ que define los coeficientes seculares para este grupo. Se utiliza la función generadora $\sum_{n=0}^{2kN} x^n I_k^G(n, N) = \int_G \det(1 + xU)^k dU$ para obtener una fórmula explícita para $\chi_{\langle N^k \rangle}^{O_{2k}}$ asociado al grupo ortogonal. Luego, se separa el término x^n y se aplica el lema (2.1) para eliminar las singularidades. De esta manera, se llega a una fórmula general para $P_{k,N}^G(u)$ que involucra determinantes y coeficientes binomiales. Esta fórmula es válida para cualquier valor de N y k .

Para el caso de $G = SO(2N)$, se sigue un procedimiento similar, utilizando la

relación entre la integral y una matriz para expresar el carácter $\chi_{N^k}^{O(2k)}$ asociado al grupo especial ortogonal. Luego, se utiliza la función generadora para obtener una expresión explícita para $P_{k,N}^G(u)$ en términos de una matriz.

5.3. Conclusiones

Basado en el análisis proporcionado se pueden generar las siguientes conclusiones:

1. La caracterización del promedio de los coeficientes seculares de una matriz de grupo unitaria puede ser expresada en términos de una constante $C_{N,k}$, dependiente de los parámetros N y k , y el determinante de una función. La formulación de la constante presenta diferentes formas que implican productos y determinantes. La demostración del teorema requiere la utilización de técnicas como la expansión de determinantes mediante la función Schur y la aplicación de propiedades de ortogonalidad.
2. La deducción de la fórmula que caracteriza el promedio de los coeficientes seculares de los grupos simplécticos implica la utilización de propiedades y fórmulas de funciones de Schur, de carácter irreducible y de la función generadora.
3. Para el análisis de los grupos ortogonales, tanto para $G = O(2N)$ y $G = SO(2N)$ se utiliza la función generadora para extraer una fórmula explícita que permite representar el promedio de los coeficientes seculares. Esta fórmula es válida para cualquier valor de N y k en ambos casos. Para el caso de $G = SO(2N)$, se utiliza adicionalmente la relación entre la integral y una matriz para expresar el carácter asociado al grupo especial ortogonal.

Con relación al objetivo general, se caracterizaron los promedios de los coeficientes seculares para matrices de grupos, a través de una constante $C_{N,k}$, cuya formulación puede adoptar diversas formas implicando productos y determinantes, se han aplicado propiedades y fórmulas de funciones de Schur, de carácter irreducible y de la función generadora, además de la integral y una matriz para expresar el carácter asociado al grupo especial ortogonal.

5.4. Líneas futuras de investigación

Dadas las caracterizaciones establecidas en esta tesis, a continuación se plantean posibles líneas de investigación que permitirán seguir profundizando en el estudio de los promedios de los coeficientes seculares:

1. Extensión de la Caracterización de los Promedios de Coeficientes Seculares a Grupos de Lie y Clifford.
2. Generalización de la Caracterización de los Promedios de Coeficientes Seculares a Matrices No Hermitianas.
3. Propiedades Asintóticas de los Coeficientes Seculares en Grupos Unitarios, Simpléticos y Ortogonales.
4. Influencia de la Perturbación de la Matriz en los Coeficientes Seculares de Grupos Unitarios, Simpléticos y Ortogonales.
5. Aplicaciones de la Caracterización de los Coeficientes Seculares en Teoría de Control Cuántico.

Referencias

- Ahumada Vélez, I. (2022). El grupo especial ortogonal $SO(3)$ The special orthogonal group $SO(3)$.
- Betea, D., & Wheeler, M. (2016). Refined Cauchy and Littlewood identities, plane partitions and symmetry classes of alternating sign matrices. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 137, 126-165.
- Boij, M. y Laksov, D. (1995). Una introducción al álgebra y la geometría a través de grupos de matrices. *Apuntes de conferencias, Matematiska Institutionen, KTH*.
- Brechenmacher, F. (2014). Lagrange and the secular equation. *Lettera Matematica*, 2(1), 79-91.
- Bump, D., & Gamburd, A. (2006). On the averages of characteristic polynomials from classical groups. *Communications in Mathematical Physics*, 265(1), 227-274.
- Cameron, PJ (2007). Grupos de matrices. *Matemáticas discretas y sus aplicaciones*, 39.
- Caparrini, S. (2014). The history of the Méchanique analytique. *Lettera Matematica*, 2(1), 47-54.
- Cvetkovic-Vega, A., Maguiña, J. L., Soto, A., Lama-Valdivia, J., & López, L. E. C. (2021). Estudios transversales. *Revista de la Facultad de Medicina Humana*, 21(1), 179-185.
- Diaconis, P. y Gamburd, A. (2004). Matrices aleatorias, cuadrados mágicos y polinomios coincidentes. *La revista electrónica de combinatoria*, R2-R2.
- Espinoza, E. (2020). La investigación formativa. Una reflexión teórica. *Conrado*, 16(74), 45-53.
- Forrester, PJ y Gamburd, A. (2006). Fórmulas de conteo asociadas con algunos promedios de matrices aleatorias. *Revista de Teoría Combinatoria, Serie A*, 113(6), 934-951.

- Grossman, S. y Flores, J. (2012). Álgebra lineal. Séptima edición. McGraw Hill Educación.
- Haake, F., Kus, M., Sommers, H. J., Schomerus, H., & Zyczkowski, K. (1996). Secular determinants of random unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 29(13), 3641.
- Hernandez-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la Investigación Científica. McGraw-Hill / Interamericana editores, S. A. de C.V., México.
- Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2012). Matrix analysis. Cambridge university press.
- Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). Álgebra lineal. Pearson Educación.
- Laplace, P., Céleste, M. (1799). Tratado de Mecánica Celeste. Teatro de Clara Gazul.
- Larson, R. (2016). Álgebra Lineal Elemental. Aprendizaje Cengage.
- Medjedovic, A. (2021). Exact formulas for secular coefficient averages. Universidad de Waterloo.
- Merino Gonzalez, L. M., & Santos Alaez, E. (2021). Álgebra lineal con métodos elementales. 3a. Editorial Paraninfo.
- Mezzadri, F., Reynolds, AK y Winn, B. (2017). Momentos de las densidades de valores propios y de los coeficientes seculares de conjuntos β . *No linealidad*, 30(3), 1034.
- Morales, N. (2015). Investigación exploratoria: tipos, metodología y ejemplos. <https://www.lifeder.com/investigacion-exploratoria>
- Najnudel, J., Paquette, E., & Simm, N. (2020). Secular coefficients and the holomorphic multiplicative chaos. arXiv preprint arXiv:2011.01823.
- Navidi, W. (2014). Statistics for Engineers and Scientists. McGraw-Hill Education.
- Offen, O., & Sayag, E. (2007). On unitary representations of $GL(2n, \mathbb{C})$ distinguished by the symplectic group. *Journal of Number Theory*, 125(2), 344-355.
- Olabuénaga, J. I. R. (2012). Metodología de la investigación cualitativa. Vol. 15, Universidad de Deusto.
- Ortega, A. O. (2018). Enfoques de investigación. Métodos para el diseño urbano. Arquitectónico.
- Ramos-Galarza, C. A. (2020). Los alcances de una investigación. CienciAmérica,

9(3), 1-6.

Sommers, H. J., Haake, F., & Weber, J. (1998). Joint densities of secular coefficients for unitary matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 31(19), 4395.

ANEXOS.

Anexo I. Presupuesto.

Este apartado contempla un resumen de los recursos económicos invertidos en el proceso de realización de esta tesis.

Descripción	Monto
Transporte y viáticos	4,000.00
Impresión	8,500.00
Encuadernado y empastado	2,500.00
Fotocopias	750.00
Materiales e insumos	3,500.00
Imprevistos	3,000.00
Total	22,250.00

Anexo II. Cronograma de trabajo de la investigación.

En este apartado se describen las diferentes etapas del proceso de elaboración de esta investigación y sus respectivas fechas de ejecución.

Descripción.	Periodos de ejecución.
Solicitud de título.	Abril, 2023.
Aprobación del título.	Mayo, 2023.
Elaboración y entrega del anteproyecto.	Mayo-junio, 2023.
Evaluación del Anteproyecto.	Junio, 2023.
Elaboración de capítulo IV y V.	Junio-julio, 2023.
Entrega de proyecto completo a la Facultad.	Agosto, 2023.
Graduación.	Octubre, 2023.