

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Estatal, Ley 236-14.



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Escuela de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de
Maestría en Matemática.

TÍTULO

Caracterización de la no negatividad de matrices que involucran inversas de grupo.

SUSTENTANTE

Miguel Angel Reyes Torres

ASESOR

Dr. Francisco Jorge Ramírez

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Enero, 2023.

TÍTULO

Caracterización de la no negatividad de matrices que involucran inversas de grupo.

Declaración de Autoria

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo se requiere de su autorización.

Miguel Angel Reyes Torres

TÍTULO

Caracterización de la no negatividad de matrices que involucran inversas de grupo.

Tesis presentada **por el** maestrante **Miguel Angel Reyes Torres** para la obtención del grado de Magister en Matemáticas.

Composición del tribunal evaluador

Pendiente

Metodología

Pendiente

Contenidos

Pendiente

Redacción

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimiento	VI
Dedicatoria	VII
Resumen	VIII
 CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	 1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	1
1.3. Planteamiento del problema	2
1.4. Justificación	3
1.5. Objetivos	4
1.5.1. Objetivo general	4
1.5.2. Objetivos específicos	4
1.6. Alcances y límites	4
 CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL.....	 5
2.1. Introducción	5
2.2. Matrices	5
2.3. Matriz idempotentes, monótonas de grupo y proyectores de grupo no negativas	8
2.4. Inversa de grupo	10
2.4.1. Propiedades de la inversa de grupo	11
2.5. Matriz de permutación	11
 CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO	 13
3.1. Introducción	13
3.1.1. Método de la investigación	13
3.1.2. Diseño de la investigación	13
3.1.3. Tipo de investigación	14
3.1.4. Enfoque de investigación	14

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	15
4.1. Introducción	15
4.2. Caracterización de la no negatividad	17
4.2.1. Matrices idempotentes no negativas	18
4.2.2. Matrices con proyectores de grupo no negativos	21
4.2.3. Matrices no negativas con proyectores de grupo no negativos .	27
4.2.4. Matrices no negativas con inversa de grupo no negativa	28
 CAPÍTULO V: ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES	
	30
5.1. Introducción	30
5.2. Conclusiones	30
5.3. Líneas futuras de investigaciones	31
Referencias.	32

Agradecimiento

A Dios: Por que me ha dado sabiduría, conocimiento y fortaleza.

Al asesor: Dr. Francisco Jorge Ramírez Contrera, hacia usted expreso mi agradecimiento y gratitud por el apoyo y las orientaciones que me brindó durante.

Al Ministerio de Educación Superior Ciencia y Tecnología (MESCYT):
Por haberme brindado el apoyo moral y económico a lo largo de todo del programa de maestría que ahora culmina, mediante la otorgación de una beca completa.

Compañeros de maestría: Gracias por ser motivadores directos e indirectos para que diera lo mejor de mí y contribuir en todo este proceso cuando más los necesitaba y brindar su amistad incondicional.

Dedicatoria

A Luz Ignacia Torres RIP, por traerme a este mundo y seguirme acompañando espiritualmente. También dedico a Miguel Angel Reyes RIP, por convertirse en la luz sobre natural que me impulsa a seguir a pesar de los obstáculos.

Delmi Torres, mi hermana por estar en todos los momentos, también a mi hermana Imaela Reyes (Blanca), por ser como una madre para mí.

A mis hermanos Clará y Jose Miguel Torre (RIP). Por haberme dados el mejor de los ejemplos.

Marleny C. Nuñez, mi esposa. Por ser mi piedra angular.

A mis hijos Angel Misael, Misaelvis y Engel Sael, que esto les sea como un ejemplo a seguir.

A mi primo Diogenes Días, por ser más que un hermano.

A mis sobrinos, Perlas M Gómez, Darleny Estevez, Arianny Estevez, Darwin Estevez, Delia Sánchez, Yoselin Sánchez, Por ser como mis hijos y hermanos.

RESUMEN

En muchas de las aplicaciones donde aparecen las matrices no negativas, el estudio de la no negatividad de los sistemas que las involucran tiende a ser tedioso. Por lo que, esta investigación centró su atención en darles a estas matrices que involucran inversas de grupo, una estructura de bloques que permita expresar la no negatividad en función de los mismos. De manera más específica, este estudio se fundamentó en caracterizar las matrices idempotentes no negativas, las monótonas de grupo no negativas y aquellas no negativas con proyectores de grupo no negativos.

En lo metodológico, se utilizó el método analítico y con un enfoque cualitativo. Los resultados principales de esta investigación, están caracterizados por la existencia de una matriz de permutación que cumpla con ciertas condiciones que aseguren la no negatividad de las matrices y los proyectores de grupo.

En cada uno de los conjuntos considerados, surge una matriz con estructura de bloques donde aparece una matriz T que juega un papel fundamental en cada uno de ellos; en las matrices idempotentes no negativas, la matriz T es la identidad, en las que tienen proyectores de grupo no negativos, la matriz T debe ser invertible y la inversa de grupo de la matriz A está dada en función de la inversa de T , en tanto que, en las matrices no negativas con proyectores de grupo no negativos, la matriz T debe ser invertible y no negativa.

Palabras claves: Matrices, idempotentes, monótonas, proyectores, cuadradas, inversa, grupo.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

Las matrices no negativas (matrices con de mucha utilidad en la matemática aplicada. Estas matrices son utilizadas en los criterios de convergencias en los métodos iterativos en la solución de un sistema lineal de ecuación y en la cadena finita de markov. También constituyen una herramienta fundamental en el estudio de los modelos económicos lineales, especialmente en el análisis del modelo entrada-salida de Leontief y en los modelos lineales estándar y generalizados de control. En estos últimos modelos, la no negatividad de las matrices coeficientes del modelo caracterizan la no negatividad de los sistemas discretos estándar.

En este trabajo se analizará la no negatividad de ciertas matrices singulares y una de sus inversas generalizadas, específicamente la conocida como inversa de grupo.

1.2. Antecedentes

El estudio de las matrices no negativas fue enunciado por Perron en 1907 y Frobenius en 1912. En 1920, E. H Moore definió una única inversa para toda matriz cuadrada o rectangular. En 1955, R. Penrose demostró que la inversa generalizada de moore es la única matriz que satisface 4 ecuaciones matriciales, las cuales son conocidas como las inversas generalizadas de Moore-Penrose (Ben y Thomas, 2002).

Diversos artículos han sido escritos sobre varios tópicos relacionados con matrices no negativas que tienen inversas generalizadas no negativas. La investigación sobre estas matrices no negativas comenzó en 1972, cuando R. J. Plemmons y R. E. Cline determinó cuándo una matriz no negativa tiene inversa de Moore-Penrose no negativa. A partir de aquí, en 1974, A. Berman y R. J. Plemmons proporcionaron la solución de cuando una matriz no negativa tiene inversa de grupo no negativa (Scott,

2008).

En la década de los sesenta, P. Flor realizó investigaciones sobre la descomposición de matrices no negativas y las inversas generalizadas no negativas, específicamente en la no negatividad de matrices idempotentes (matrices cuadradas que coinciden con su cuadrado). Más tarde, usando estos resultados, Jain, Goel, Kuak y Tynan obtuvieron algunas caracterizaciones para matrices no negativas que involucran inversas de grupo no negativas, inversa de Drazin no negativas o proyectores de grupo o de Drazin no negativos. También se utilizaron para caracterizar $A^m = A$, $m > 2$, es decir, las matrices m-potentes, para una matriz no negativa A .

1.3. Planteamiento del problema

Una clase importante dentro de las matrices inversas generalizadas corresponde a la inversa de grupo, que se pueden calcular para las matrices de índice a lo sumo 1. Obtener caracterizaciones de la no negatividad de estas matrices resulta muy importante para los diferentes campos de aplicación.

En muchas de las aplicaciones donde aparecen estas matrices, resultan ser de gran tamaño; por lo que, el estudio de la no negatividad de los sistemas que las involucran tiende a ser tedioso. Si se logra darles a estas matrices una estructura de bloques que nos permita expresar la no negatividad en función de los mismos, se lograría simplificar de manera significativa el estudio de la no negatividad de los sistemas que las involucran. Para tales fines se estudiarán los siguientes conjuntos de matrices:

1. Las matrices idempotentes no negativas, el cual se define como

$$\mathcal{PI} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \geq 0, A^2 = A\}$$

2. Las matrices monótonas de grupo

$$\mathcal{PG} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^\# \geq 0\}$$

3. Las matrices monótonas de grupo no negativas

$$\mathcal{PPG} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \geq 0, A^\# \geq 0\}$$

4. Las matrices no negativas con proyectores de grupo no negativos

$$\mathcal{PPGP} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \geq 0, AA^\# \geq 0\}$$

Y por último,

5. Las matrices con proyectores de grupo no negativos

$$\mathcal{PGP} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : AA^\# \geq 0\}$$

En este trabajo se buscarán condiciones que caractericen cada uno de los conjuntos mencionados anteriormente. En tal sentido se plantean las siguientes interrogantes:

¿Cuáles condiciones caracterizan las matrices:

1. Idempotentes no negativas?
2. Monótonas de grupo no negativas?
3. No negativas con proyectores de grupo no negativos?
4. Con proyectores de grupo no negativos?

1.4. Justificación

Como se ha comentado antes, las matrices no negativas son de gran utilidad en la matemática aplicada. Algunos modelos matemáticos involucran matrices en su formulación. En muchos de estos modelos, la propiedad de no negatividad es de gran interés y está relacionada directamente con las matrices involucradas, como ocurre, por ejemplo, con los sistemas lineales de control.

Obtener caracterizaciones de las diferentes propiedades de estas matrices resulta de gran importancia para los diferentes campos de aplicación.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Caracterizar la no negatividad de matrices cuadradas que involucran inversas de grupo.

1.5.2. Objetivos específicos

1. Caracterizar las matrices idempotentes no negativas.
2. Caracterizar las matrices monótonas de grupo no negativas.
3. Caracterizar las matrices con proyectores de grupos no negativos.
4. Caracterizar las matrices no negativas con proyectores de grupos no negativos.

1.6. Alcances y límites

Esta investigación se limita al estudio de la caracterización de la no negatividad de matrices que involucran inversa de grupo, en específico se limitan al estudio de las matrices idempotentes no negativas, monótonas no negativas, no negativas con proyectos de grupo no negativo y finalmente se limita a estudio de matrices con proyectores de grupos no negativos.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1. Introducción

De acuerdo a lo que expone Ramos (2018), elaborar el marco teórico implica analizar y exponer aquellas teorías, enfoques teóricos y antecedentes en general que se consideren válidos para el correcto encuadre del estudio. En este capítulo se exponen un conjunto de definiciones, teoremas y algunas demostraciones que sirven de soporte y referente conceptual para este trabajo.

2.2. Matrices

Definición 2.2.1 Dado un cuerpo $\mathbb{F}$, una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$ es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.2.1)$$

constituida por mn elementos de $\mathbb{F}$ distribuidos en m filas y n columnas, de forma que a_{ij} denotará al elemento situado en la fila i , columna j . De forma reducida:

$$A = (a_{ij})$$

Denota $\mathbb{F}^{m \times n}$ al conjunto de matrices $m \times n$ con elementos en $\mathbb{F}$. En particular,

- $\mathbb{C}^{m \times n} [\mathbb{R}^{m \times n}]$ denota la clase de $m \times n$ matrices complejas [reales].
- $\mathbb{C}_r^{m \times n} [\mathbb{R}_r^{m \times n}]$ denota la clase de $m \times n$ matrices complejas [reales] de rango r .

Definición 2.2.2 Se dice que $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ es una matriz cuadrada si $m = n$, es decir, si tiene igual número de filas que de columnas; en otro caso se dirá que A es rectangular.

Definición 2.2.3 Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, los elementos $a_{ii}, i = 1, \dots, p$; donde $p = \min\{m, n\}$, constituyen su diagonal principal.

Definición 2.2.4 La matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ será:

- Diagonal si todos sus elementos fuera de su diagonal principal son cero, es decir, si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.
- Triangular superior si todos los elementos por debajo de su diagonal principal son cero, es decir, si $a_{ij} = 0, \forall i > j$.
- Triangular inferior si todos los elementos por encima de su diagonal principal son cero, es decir, si $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

Definición 2.2.5 Se llama matriz identidad de orden n a la matriz cuadrada I_n que tiene 1 en los elementos de su diagonal principal y 0 en las restantes posiciones, es decir,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}, I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

Definición 2.2.6 Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, se llama matriz traspuesta de A a la matriz $B = A^t \in \mathbb{F}^{n \times m}$, donde $b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$. Esto es, si A es la matriz de orden $m \times n$

$$A =; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

entonces $B = A^t$ es la matriz de orden $n \times m$

$$B =; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

Proposición 2.2.1 La trasposición de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t; \forall A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$.
2. $(AB)^t = B^t A^t; \forall A \in \mathbb{F}^{m \times p}, \forall B \in \mathbb{F}^{p \times n}$.
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t; \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall A \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

Definición 2.2.7 Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, se llama matriz conjugada traspuesta de A a la matriz $B = A^* \in \mathbb{F}^{n \times m}$, donde $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $\forall i, j$

Definición 2.2.8 Dada un matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que A es simétrica, si $A = A^t$, es decir, si $a_{ij} = a_{ji}$.

Definición 2.2.9 Dada un matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que A es antisimétrica, si $A = -A^t$, es decir, si $a_{ij} = -a_{ji}$.

Definición 2.2.10 Dada un matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que A es hermitiana, si $A = A^*$, es decir, si $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Definición 2.2.11 Dada un matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que A es antihermitiana, si $A = -A^*$, es decir, si $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$.

Definición 2.2.12 Dada un matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que A es normal, si

$$AA^* = A^*A.$$

Observación. En general, toda matriz simétrica real, hermitiana o unitaria, es una matriz normal.

Definición 2.2.13 Dada un matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que A es idempotente, si $A = A^2$.

Definición 2.2.14 Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que A es nilpotente, si existe un número entero positivo p tal que $A^p = O$.

Definición 2.2.15 Sea $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ una matriz nilpotente. Se denomina índice de nilpotencia de A al menor entero positivo k tal que $A^k = O$.

Definición 2.2.16 Dadas A y $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que B es la matriz inversa de A si

$$AB = BA = I_n.$$

Se dice entonces que la matriz A es invertible, o no singular, si existe una matriz inversa de A . Se denota A^{-1} a la matriz inversa de A .

Definición 2.2.17 Dada una matriz cuadrada $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, se dice que A es unitaria, si $A^* = A^{-1}$ (si A es real, $A^t = A^{-1}$, en este caso se dirá que A es ortogonal).

Definición 2.2.18 Se llama submatriz de una matriz A a cada matriz que se obtenga de ella suprimiendo algunas de sus filas y columnas.

Definición 2.2.19 Una matriz $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ se dice que es no negativa (y lo nombra por $A \geq 0$) si todos los elementos de A son no negativos. Esto es, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.2.5)$$

es no negativa cuando $a_{ij} \geq 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$.

Definición 2.2.20 Una matriz $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ se dice que es positiva (y lo nombra por $A > 0$) si todos los elementos de A son positivos. Esto es, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

se dice que es positiva cuando $a_{ij} > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$.

2.3. Matriz idempotentes, monótonas de grupo y proyectores de grupo no negativas

Son aquellas matrices que multiplicadas por sí mismas son ellas mismas, es decir cumplen con la propiedad $A^n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ejemplo, si $A^2 = AA = A$

entonces A sería una matriz idempotente. Además, si la matriz es idempotente y simétrica se cumple que $A'A = A$. Por ejemplo, la matriz identidad es idempotente y simétrica.

Para entender las implicancias de esta propiedad en la descomposición espectral de una matriz estudie A^2 para A idempotente:

$$A^2 = MD^2M^{-1} \quad (2.3.7)$$

pero idempotencia implica

$$A = MD^2M^{-1} \quad (2.3.8)$$

entonces

$$MD^2M^{-1} = MD^2M^{-1} \quad (2.3.9)$$

la única forma que se cumpla (2.3.9) es que $\lambda^2 = \lambda$, es decir, las raíces características de A tienen que ser 0 o 1. Suponga que todas las raíces son 1, luego:

$$\begin{aligned} A &= MIM^{-1} \\ &= MM^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

Si las raíces no son todas 1, es decir, algunas raíces son iguales a 0 y ocupando la definición de rango se puede afirmar que A es singular.

Teorema 2.3.1 Todas las matrices idempotentes, excepto la matriz identidad, son singulares. La única matriz idempotente de rango completo es la matriz identidad.

Por último, tomando en cuenta que el rango de una matriz son los valores propios distintos de ceros y que en una matriz idempotente sus raíces son 0 o 1 se puede concluir:

Teorema 2.3.2 El rango de una matriz idempotente es igual a la suma de sus raíces características, es decir, es igual a su traza.

En lo referente a la inversa de grupo, el conjunto de las matrices idempotentes no negativas es definido como

$$\mathcal{PJ} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \geq O, A^2 = A\} \quad (2.3.10)$$

por tanto, las matrices monótonas de grupo se consideren de la forma

$$\mathcal{PG} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^\# \geq O\} \quad (2.3.11)$$

agregando la no negatividad de la matriz A se tienen las matrices monótonas de grupo no negativas de la forma;

$$\mathcal{PPG} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \geq O, A^\# \geq O\} \quad (2.3.12)$$

Ahora bien si se consideran proyectores de grupo, se obtienen la llamadas matrices no negativas con proyectores de grupo no negativo de la forma:

$$\mathcal{PPGP} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A \geq O, AA^\# \geq O\} \quad (2.3.13)$$

a partir de este punto se pueden obtene las matrices con proyectores de grupo no negativo así,

$$\mathcal{PGP} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : AA^\# \geq O\} \quad (2.3.14)$$

cuando no se requiere la no negatividad de A .

2.4. Inversa de grupo

Definición 2.4.1 (Inversa de grupo.) Según Herrero, Ramírez y Thome (200).

Dada una matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$, una matriz $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es llamada su inversa de grupo si se cumplen las siguientes propiedades:

a) $FGF = F$

b) $GFG = G$

c) $FG = GF$

Cuando esta matriz existe, se denotará por $F^\#$ y será única.

La inversa de grupo no está restringida a matrices diagonales; sin embargo, no existe para todas las matrices cuadradas. Ahora bien, tal inversa existe si y solo si $R(A)$ y $N(A)$ son sub espacios complementarios. Esto es equivalente, que A tiene índice 1.

Teorema 2.4.1 De acuerdo con Ben, Israel y Greville (2003). Una matriz cuadrada A tiene inversa de grupo si y solo si $Ind(A) = 1$, es decir

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2)$$

Cuando la inversa de grupo existe, esta es única.

2.4.1. Propiedades de la inversa de grupo

- a) Si A es no singular, $A^\# = A^{-1}$.
- b) $A^{\#\#} = A$
- c) $A^{*\#} = A^{\#*}$
- d) $A^{T\#} = A^{\#T}$
- e) $(A^l)^\# = (A^\#)^l$ para cada elemento positivo l .

2.5. Matriz de permutación

La matrices de permutación es un tipo especial de matrices ortogonales en $\mathbb{R}^{n \times n}$, son las matrices de permutación, las cuales se obtienen a partir de la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutando sus columnas (o renglones).

Definición 2.5.1 (Matriz de Permutación). Sea φ una permutación, $\varphi \in S_n$. La matriz de permutación φ , denotada por P_φ , se define mediante la fórmula:

$$P_\varphi = (\delta_{\varphi(i),j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Es decir, en la i -ésima fila de la matriz P_φ la $\varphi(i)$ -ésima entrada es 1 y todas las demás son 0.

Teorema 2.5.1 Sean A y B matrices de orden $m \times n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $A \leq^- B$
2. Existe una $\{1\}$ - inversa A^- de A tal que $(B - A)A^- = 0$ y $A^-(B - A) = 0$.
3. Cada $\{1\}$ - inversa de B es una $\{1\}$ - inversa A
4. Existe una $\{1\}$ - inversa B^- de B que satisface $AB^-(B - A) = 0$ y $(B - A)B^-A = 0$.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Introducción

En este capítulo se describen los aspectos metodológicos que marcaran el desarrollo de esta investigación. En el mismo se abordaran el método, diseño, tipo, enfoque y procedimientos de este trabajo.

3.1.1. Método de la investigación

Esta investigación posee el método analítico y como expresan Hernández, Sampieri y Torres (2018), el método analítico a partir del conocimiento general de una realidad realiza la distinción, conocimiento y clasificación de los distintos elementos esenciales que forman parte de ella y de las interrelaciones que sostienen entre sí, además, permite aplicar posteriormente el método comparativo, permitiendo establecer las principales relaciones de causalidad que existen entre las variables o factores de la realidad estudiada.

3.1.2. Diseño de la investigación

La presente investigación, según la búsqueda de la causa, fue un diseño del tipo analítica-exploratoria. Exploratoria, ya que al inicio se debe documentar de un tema que ha sido poco estudiado anteriormente, analítico porque se debe caracterizar la negatividad de matrices cuadradas que involucran inversas de grupo. Con relación al tiempo de estudio, el diseño fue transversal, ya que se desarrollará durante un tiempo definido y con relación a la búsqueda de la causa fue un diseño analítico. (Maxwell, 2019).

3.1.3. Tipo de investigación

De acuerdo a las características esta investigación, es del tipo exploratoria-explicativa. Exploratoria, porque debe documentar de un tema que ha sido poco estudiado anteriormente. Explicativa, porque tiene el interés de mostrar resultados que faciliten la no negatividad de matrices cuadradas que involucren inversas de grupo. (Ramos y Galarza, 2020).

3.1.4. Enfoque de investigación

Esta investigación posee un enfoque cualitativo, debido a que el desarrollo de la misma está basado en descripciones, explicaciones, comparaciones y análisis sobre definiciones, teoremas y demostraciones vinculados a la no negatividad de matrices cuadradas que involucren inversas de grupo, y como expresan Hernández, Sampieri y Torres (2018), el enfoque cualitativo, es la acción indagatoria y se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y además en este tipo de enfoque empleado en un estudio se busca principalmente la dispersión o expansión de los datos e información.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

En esta investigación se caracteriza la no negatividad de los siguientes conjuntos de matrices, los cuales han sido denotados según se muestran a continuación:

1. Matrices idempotentes no negativas (PI)
2. Matrices monótonas de grupo no negativas (PPG)
3. Matrices no negativas con proyectores de grupo no negativo ($PPGP$)
4. Matrices con proyectores de grupo no negativo (PGP)

En el siguiente resultado, se caracterizan las relaciones de los conjuntos anteriores.

Teorema 4.1.1 Los conjuntos definidos anteriormente satisfacen las siguientes relaciones:

- a) $PI \subset PPG$.
- b) $PPG \subset PPGP \subset PGP$.
- c) $PPG = PPGP \cap PG \subset PG$.

Las inclusiones son todas estrictas.

Demostración. La condición $A^2 = A$ para una matriz cuadrada no negativa A implica que $A^3 = A$ y entonces $A = A^\# \geq 0$. Así $\mathcal{PJ} \subset \mathcal{PPG}$. Además, la inclusión es estricta porque, por ejemplo, la matriz no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satisface que $A = A^\# \geq O$ pero $A^2 \neq A$. Luego, el apartado (a) ha sido probado.

Las restantes inclusiones se pueden obtener fácilmente a partir de las definiciones de los conjuntos y de la inversa de grupo. Por lo tanto, se debe centrar la atención a comprobar que las inclusiones son estrictas. Para ello, se presentan los siguientes contraejemplos.

Primero, se comprueba que $\mathcal{PPG} \subset \mathcal{PPPP}$. Por ejemplo, la matriz no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satisface que

$$A^\# = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq y \quad AA^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0,$$

es decir $A \in \mathcal{PPGP}$ pero $A \notin \mathcal{PPG}$. Luego, se prueba que $\mathcal{PPPP} \subset \mathcal{PGP}$ y $\mathcal{PPPG} \subset \mathcal{PG}$.

Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No es no negativa y cumple que

$$A^\# = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad y \quad AA^\# = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

luego $A \in \mathcal{PGP}$ pero $A \notin \mathcal{PPGP}$ y $A \in \mathcal{PG}$ pero $A \notin \mathcal{PPG}$.

Con esto, los apartados (b) y (c) quedan demostrados y se finaliza la demostración.

4.2. Caracterización de la no negatividad

Ahora se presentan con más detalles los conjuntos definidos anteriormente. Se supondrá que todas las matrices involucradas tienen inversa de grupo.

S.K. Jain (2004) conjuntamente con otros investigadores como E.K. Kwak, V.K. Goel y J. Tynan, entre otros, caracterizaron la no negatividad de cierto tipo de matrices que involucran inversas generalizadas: inversa de Moore-Penrose, inversa de grupo e inversa de Drazin. Uno de sus resultados que constituye el punto de partida de este trabajo es el siguiente.

Teorema 4.2.1 Sea $A \in R^{n \times n}$ una matriz no negativa de rango $r < n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $AA^\# \geq 0$
2. Existe una matriz de permutación $P \in R^{n \times n}$ que permite escribir la matriz A como

$$PAP^t = \begin{bmatrix} J & JM & O & O \\ O & O & O & O \\ NJ & NJM & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, $J = XTY$, $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ es una matriz invertible no negativa, y además $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $Y = \text{diag}(y_1^t, y_2^t, \dots, y_r^t)$, x_i e y_i^t son vectores unitarios positivos tales que $y_i^t x_i = 1$, y M, N son matrices no negativas de tamaños apropiados.

El resultado anterior da una caracterización de las matrices con proyectores de grupo no negativo. Luego se presenta una caracterización de estas matrices utilizando una estructura de bloques más simplificada que la dada en dicho resultado.

4.2.1. Matrices idempotentes no negativas

En el siguiente resultado se caracterizan las matrices idempotentes no negativas, es decir, aquellas matrices no negativas $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que verifican la condición $A^2 = A$.

Teorema 4.2.2 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con $\text{rg}(A) = r > 0$. Luego $A \in PI$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A = P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXM & O \end{bmatrix} P^T \quad (4.2.1)$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices arbitrarias no negativas de tamaño apropiados $YX = \text{diag}(x_1, \dots, x_r)$, $Y = \text{diag}(y_1^T, \dots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columnas positivos con $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $YX = I$.

Demostración. Si $A \in \mathcal{PJ}$ entonces existe una matriz de permutación P tal que

$$A = P \begin{bmatrix} XY & XYM_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_1XY & N_1XYM_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^T$$

Donde $M_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_2}$, $N_1 \in \mathbb{R}^{n_3 \times m_1}$ son matrices arbitrarias, X e Y definidas como antes y las últimas m_4 filas de la matriz en bloques son nulas. Por tanto $n_1 + m_2 + n_3 + m_4 = n$ y m_2, n_3 y $m_4 \geq 0$. Si $m_4 = 0$ entonces A tiene la forma planteada. Supongamos que $m_4 > 0$, intercambiando la última fila y la última columna de la matriz en bloque con la $(n_1 + m_2 + 1)$ -ésima fila y columna de la misma matriz, se obtiene otra matriz C . Luego, intercambiando la $(n - 1)$ -ésima fila y columna de C con la $(n_1 + m_2 + 2)$ -ésima fila y columna de la de C . Se continua este proceso hasta obtener la matriz idempotente A con $n_2 = m_2 + m_4$ filas nulas localizadas en las filas $n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$. De aquí se obtiene que

$$A = P \begin{bmatrix} XY & M & O \\ O & O & O \\ N & H & O \end{bmatrix} P^T$$

donde $M \in \mathbb{R}_+^{n_1 \times n_2}$, $N \in \mathbb{R}_+^{n_3 \times n_1}$ y $H \in \mathbb{R}_+^{n_3 \times n_3}$.

Dado que $A^2 = A$, tenemos que

$$M = XYM, N = NXY, H = NM = (NXY)(XYM) = NXYM$$

ya que $YX = I$. Hemos probado que A tiene la forma que establece el teorema.

Recíprocamente, puesto que P, M, N, XY son matrices no negativas, entonces se tiene que $A \geq 0$. Haciendo una multiplicación en bloques se tiene $A^2 = A$. En efecto,

$$\begin{aligned} A^2 &= P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXM & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} P^T \\ &= P \begin{bmatrix} XYXY & XYXYM & O \\ O & O & O \\ NXYXY & NXYXYM & O \end{bmatrix} P^T \\ &= P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} P^T \\ &= A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el teorema ha sido probado.

El teorema anterior establece que toda matriz idempotente no negativa tiene la forma (4.2.1) y recíprocamente, toda matriz de la forma (4.2.1) es idempotente no negativa.

Ejemplo 4.2.1 La siguiente matriz A tiene la forma del teorema 4.2.2

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 4.5 & 0 & 4.5 & 79 & 0 & 8 & 0 & 62 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 92 & 0 & 25 & 0 & 61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.5 & 0 & 3.5 & 59 & 0 & 5 & 0 & 47 & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXM & O \end{bmatrix} P^T$$

siendo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & | & 0 \\ 2 & | & 0 \\ \hline 0 & | & 1 \\ 0 & | & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Al realizar los productos de la matriz con estructura de bloques se obtiene

$$A = P \left[\begin{array}{cccc|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 3.5 & 3.5 & 47 & 59 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 4.5 & 4.5 & 62 & 79 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 3 & 3 & 61 & 92 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] P^t$$

como lo establece el teorema.

4.2.2. Matrices con proyectores de grupo no negativos

Un caso particular importante que caracteriza las matrices con proyectores de grupo no negativo, se presenta en el siguiente corolario.

Corolario 4.2.1 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con $\text{rg}(A) = r > 0$. Entonces $A \in PGP$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$AA^\# = P \left[\begin{array}{ccc} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{array} \right] P^T \quad (4.2.2)$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices arbitrarias no negativas de tamaño apropiados $YX = \text{diag}(x_1, \dots, x_r)$, $Y = \text{diag}(y_1^T, \dots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columnas positivos con $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $YX = I$.

Demostración. La inversa de grupo $A^\#$ de una matriz A satisface que

$$(AA^*)^2 = AA^\#AA^\# = AA^\#,$$

Esto es $AA^\#$ es una matriz idempotente. Luego, el resultado se obtiene directamente aplicando el teorema 4.2.2 a la matriz $AA^\#$ cuando se asume que es no negativa, puesto que $\text{rg}(AA^\#) = \text{rg}(A)$

Teniendo en cuenta que para una matriz dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se tiene que $AA^\#$ es idempotente, la no negatividad de $AA^\#$ induce una factorización de dicho producto. Esta factorización permite establecer el siguiente resultado sobre la matriz A , donde se caracterizan las matrices con proyectores de grupo no negativo en función de una matriz T invertible.

Teorema 4.2.3 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con $\text{rg}(A) = r > 0$. Entonces $A \in PGP$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXMY & O \end{bmatrix} P^T \quad (4.2.3)$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices arbitrarias no negativas de tamaño apropiados, $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ es una matriz invertible y $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_r)$, $Y = \text{diag}(y_1^T, \dots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columnas positivos con $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $YX = I$. En este caso,

$$A^\# = P \begin{bmatrix} XT^{-1}Y & XT^{-1}YM & O \\ O & O & O \\ NXT^{-1}Y & NXT^{-1}YM & O \end{bmatrix} P^T \quad (4.2.4)$$

Demostración. Se presentan dos demostraciones de este resultado siendo común a las dos, la primera parte de ambas, en efecto, del corolario 4.2.1 se puede escribir $AA^\#$ de la siguiente forma

$$AA^\# = P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXMY & O \end{bmatrix} P^T \quad (4.2.5)$$

Siendo P, M, N, X e Y como antes. Ahora se particiona la matriz A en una matriz por bloques de tamaños adecuados como en (4.2.5) de la siguiente manera

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} P^T \quad (4.2.6)$$

Aplicando la propiedad $(AA^\#)A = A$ y teniendo en cuenta la forma de la matriz $AA^\#$ y la partición de A se tiene

$$\begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix}$$

Con lo que, al realizar el producto por bloques se obtiene que las matrices $A_4, A_5, y A_6$ son matrices nulas, y que $A_i = XYA_i$ y $A_{i+6} = NA_i$ para $i = 1, 2, 3$ puesto que $A^\#A = AA^\#$, la misma propiedad $A(A^\#A) = A$ permite escribir

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ O & O & O \\ NA_1 & NA_2 & NA_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ O & O & O \\ NA_1 & NA_2 & NA_3 \end{bmatrix}$$

lo que conduce a $A_3 = O, A_1 = A_1XY$ y $A_2 = A_1M$. Luego, la matriz A queda como

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & A_1M & O \\ O & O & O \\ NA_1 & NA_1M & O \end{bmatrix} P^T$$

$$A_1 = XYA_1 = A_1XY.$$

Primera forma: Ahora se debe analizar estas dos últimas condiciones para demostrar que $A_1 = XTY$ con T una matriz invertible. Para ello se particiona la matriz A_1 como

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

De acuerdo a la partición del producto XY . Sustituyendo (4.7) en la condición $A_1 = XYA_1$ y realizando el producto esta expresión se reduce a

$$x_i y_i^T A_{ii} = A_{ij} \quad (4.2.8)$$

con $i, j \in \{1, \dots, r\}$. puesto que $rg(A_1) = r$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $A_{ij} \neq 0$. En este caso $rg(A_{ij}) = 1$

$$0 < rg(A_{ij}) = rg(x_i y_i^T A_{ii}) \leq rg(x_i) = 1.$$

Asi, $A_{ij} = u_{ij} v_{ij}^T$ siendo u_{ij} y v_{ij} vectores no nulos. Entonces la condicion (4.2.8) se puede escribir como $x_i y_i^T u_{ij} v_{ij}^T = u_{ij} v_{ij}^T$ y posmultiplicando por v_{ij} se tiene $u_{ij} = \alpha_{ij} x_i$ donde $\alpha_{ij} = y_i^T u_{ij}$. Luego, $A_{ij} = x_i \tilde{v}_{ij}^T$ siendo $\tilde{v}_{ij} = \alpha_{ij} v_{ij}$. Notese que si existe algun $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $A_{ij} = 0$ entonces tambien se puede escribir $A_{ij} = x_i \tilde{v}_{ij}^T$ siendo $\tilde{v}_{ij} = 0$. Entonces,

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \tilde{v}_{11}^T & \cdots & x_1 \tilde{v}_{1r}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r \tilde{v}_{r1}^T & \cdots & x_r \tilde{v}_{rr}^T \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Ademas, sustituyendo (4.2.9) en la igualdad $A_1 = A_1 XY$, realizando los productos se obtiene que esta condicion es equivalente a $x_i \tilde{v}_{ij}^T x_j y_j^T = x_i \tilde{v}_{ij}^T$. Puesto que $y_i^T x_i = 1$, la ultima condicion lleva a $\tilde{v}_{ij} = \beta_{ij} y_i$ siendo $\beta_{ij} = \tilde{v}_{ij}^T x_j$ finalmente,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} x_1 \beta_{11} y_1^T & \cdots & x_1 \beta_{1r} y_r^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r \beta_{r1} y_1^T & \cdots & x_r \beta_{rr} y_r^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{r1} & \cdots & \beta_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & y_r^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $T = [\beta_{ij}]$ y $r = rg(A_1) = rg(XTY) \leq rg(T) \leq r$ porque $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La implicación recíproca es evidente.

Segunda forma: otra manera de demostrar que $A_1 = XTY$ con T una matriz invertible es considerar las condiciones $A_1 = XYA_1 = A_1XY$ para escribir

$$A_1 = XTY$$

definiendo $T = YA_1X$. se observa así que $rg(A) = r$. así

$$r = rg(xty) \leq rg(T) \leq r$$

porque $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y por tanto T es invertible. La demostración de la implicación recíproca es evidente. La comprobación de que la inversa de grupo de A tiene la forma especificada en (4.2.2) se obtiene de comprobar las tres propiedades de su definición y de utilizar su unicidad. Luego el teorema queda probado.

Ejemplo 4.2.2 La siguiente matriz tiene la forma del teorema 4.2.3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 13 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 26 & 32 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 27 & 34 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 27 & 34 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 26 & 0 & 19 & 19 & 254 & 318 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 26 & 26 & 347 & 434 & 0 & 0 & 0 \\ 43 & 0 & 37 & 37 & 487 & 604 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ NXTY & NXTYM & 0 \end{bmatrix} P^t$$

eligiendo $P = I_9$,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad X = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad Y = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{array} \right]$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Su inversa de grupo es la matriz

$$A^\# = P \begin{bmatrix} XT^{-1}Y & XT^{-1}YM & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ NXT^{-1}Y & NXT^{-1}YM & 0 \end{bmatrix} P^t$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0.5 & 0.5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 1 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & -0.25 & -0.25 & -1.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & -0.25 & -0.25 & -1.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.75 & 0.75 & 9.5 & 11.5 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 0 & 1.75 & 1.75 & 18.5 & 19.5 & 0 & 0 & 0 \\ -41 & 0 & 11 & 11 & 91 & 72 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando el proyector de grupo, tenemos

$$AA^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3.5 & 3.5 & 47 & 59 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 4.5 & 4.5 & 62 & 79 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 3 & 3 & 61 & 92 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

como lo establece el teorema. En general, si se trabaja con la matriz

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O_{n_1 \times n_3} \\ O_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_2} & O_{n_2 \times n_3} \\ NXTY & NXTYM & O_{n_3 \times n_3} \end{bmatrix} P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

los tamaños serían

- $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^{n_1 \times r}$
- $Y = \text{diag}(y_1^t, \dots, y_r^t) \in \mathbb{R}^{r \times n_1}$
- $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$
- $M \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$
- $N \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_1}$ donde $n_1 + n_2 + n_3 = n$. En este caso sería
- $x_i \in \mathbb{R}^{m_i \times 1}$
- $y_i \in \mathbb{R}^{m_i \times 1}$ donde $m_1 + \dots + m_r = n_1$.

4.2.3. Matrices no negativas con proyectores de grupo no negativos

En el siguiente corolario se agrega la no negatividad de la matriz A , lo que permite caracterizar las matrices no negativas con proyectores de grupo no negativo.

Corolario 4.2.2 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con $\text{rg}(A) = r > 0$. Entonces $A \in PPGP$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \quad (4.2.10)$$

donde los bloques diagonales son cuadrados M, N son matrices no negativas arbitrarias de tamaño adecuado $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertible y no negativas y $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_r)$, $Y = \text{diag}(y_1^T, \dots, y_r^T)$ siendo x_1 e y_i vectores columnas positivos con $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $XY = I$.

Demostración. Aplicando el teorema 4.2.3 solo es necesario mostrar que $T \geq O$. En efecto, de $A \geq O$ y $P \geq O$ se tiene que $P^T A P \geq O$ y entonces por (4.2.10), en particular se tiene $XTY \geq 0$. Puesto que $X \geq O, Y \geq 0$ e $XY = I$, pre y postmultiplicando la desigualdad $XTY \geq O$ por Y y por X respectivamente, se obtiene $T \geq O$.

4.2.4. Matrices no negativas con inversa de grupo no negativa

A continuación se obtiene un nuevo resultado relativo a la no negatividad de la matriz A y a la no negatividad de $A^\#$, es decir, del conjunto de las matrices no negativas con inversa de grupo no negativa.

Corolario 4.2.3 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz con $rg(A) = r > 0$. Entonces $A \in PPG$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} P^T \quad (4.2.11)$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices no negativas arbitrarias de tamaño adecuado, $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz invertible no negativas con $T^{-1} \geq 0$ y $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_r), Y = \text{diag}(y_1^T, \dots, y_r^T)$ siendo x_i e y_i vectores columnas positivos con $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $XY = I$.

Demostración. Por el teorema 4.2.3, la matriz A tiene la forma requerida (4.2.11) con $T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ una matriz invertible. Teniendo en cuenta las hipótesis, la no negatividad de A es equivalente a la no negatividad de T como se ha probado en el corolario 4.2.2. Análogamente, de (4.2.4) se obtiene la equivalencia entre la no negatividad de $A^\#$ y T^{-1} .

Nótese que, en general, para una matriz no negativa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la condición $A^2 = AA$ implica que $AA^\# \geq O$. Sin embargo, la implicación recíproca no es siempre

cierta como se puede comprobar mediante el siguiente contraejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

satisface que $AA^\# \geq O$ pero $A^2 \neq A$.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En el presente capítulo, se ponen en evidencia el conjunto de conclusiones obtenidas en esta investigación, las cuales guardan estrecha relación con los objetivos planteados en la misma, al igual que se destacan otros elementos que generan posibles líneas de investigación.

5.2. Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un estudio matricial sobre la no negatividad de diferentes matrices y productos de matrices que involucran inversa de grupo. Se han introducido clases de matrices que permiten analizar la no negatividad de una matriz, de su inversa de grupo y de las diferentes combinaciones entre ambas. En tal sentido, se ha llegado a las siguientes conclusiones:

- Entre las condiciones que aparecen en la caracterización, en cada uno de los conjuntos considerados, surge una matriz con estructura de bloques donde aparece una matriz T que juega un papel fundamental en cada uno de dichos bloques.
- En las matrices idempotentes no negativas la matriz T involucrada es la identidad.
- En las matrices con proyectores de grupo no negativos, la matriz T debe ser invertible y la inversa de grupo de la matriz A está dada en función de la inversa de T .
- En las matrices no negativas con proyectores de grupo no negativos, la matriz T debe ser invertible y no negativa.
- En el caso de las matrices monótonas de grupo no negativas, están condicionadas en que la matriz T debe ser no negativa y su inversa no negativa.

5.3. Líneas futuras de investigaciones

Como línea futura de investigación se puede considerar:

- Estudio de la no negatividad de matrices de índice mayor que 1 y su inversa de Drazin y el proyector Drazin.
- Aplicación de las matrices no negativas al estudio de los sistemas singulares de control.

Referencias.

- Adi Ben, Israel; Thomas N. E., Greville. Generalized Inverses Theory And Applications. Canadian Mathematical Society, 2002
- Antezana, J., & Stojanoff, D. (2008). Análisis matricial. Cursos y Seminarios de Matemática Serie B, Depto. de Matemática-FCEyN-UBA.
- Atezana, Jorge; Stojonaff, Demetrio, Análisis Matricial, Buenos Aires, Octubre 2008.
- Barbolla, R., y Sanz, P. (1998). Álgebra lineal y teoría de matrices.
- Barbolla, Rosa; Sanz, Paloma. Álgebra lineal y teoría de matrices, Prentice Hall, Madrid, 1998.
- Ben-Israel, A., & Greville, T. N. (2003). Generalized inverses: theory and applications (Vol. 15). Springer Science & Business Media.
- Berman, A., y Plemmons, R. J. (1994). Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, USA, 1994. Originally published by Academic Press, New York.
- Briant Scott Blackwood, A study of partial ordens on nonnegative matrices and Von Neumann regular rings, Tesis doctoral, Agosto 2008.
- Blackwood, B. S. (2008). A Study of Partial Orders on Nonnegative Matrices and von Neumann Regular Rings (Doctoral dissertation, Ohio University).
- Blackwood, B. S. (2008). A Study of Partial Orders on Nonnegative Matrices and von Neumann Regular Rings (Doctoral dissertation, Ohio University).
- Coll, Carmen; Sánchez, Elena; Thome, Néstor, Inversas generalizadas y sistemas lineales de

- control, Universidad Politécnica de Valencia. Editorial UPV Ref:: 2002.103.
- David, P., Grossman Stanley, I., & Lay, D. C. (2010). Algebra lineal. Una introducción moderna. Espacios, 6(2), 12.
- Flor, P. (1969). On groups of non-negative matrices. *Compositio Mathematica*, 21(4), 376-382.
- Hernández-Sampieri, R., & Torres, C. P. M. (2018). Metodología McGraw-Hill Interamericana.
- Herrero, A., Ramirez, F.J. Thome, N. Relationships between different sets involving group and Drazin projectors and nonnegativity.
- Herrero, A., Ramírez, F.J., Thome, N. (2009). Characterization of Matrices with Nonnegative Group-Projector. In *Positive Systems* (pp. 315-320). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Jiménez Moscoso, José Alfredo, 1973, Álgebra Lineal II con aplicaciones en estadística, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2004.
- Maxwell, J. A. (2019). Diseño de investigación cualitativa (Vol. 241006). Editorial Gedisa.
- Nashed, Zahair, Inversas generalizadas y aplicaciones. 1976.
- Ramos, J. R. G. (2018). Cómo se construye el marco teórico de la investigación. *Cadernos de Pesquisa*, 48, 830-854.
- Ramos-Galarza, C. A. (2020). Los alcances de una investigación. *CienciAmérica*, 9(3), 1-6.