

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemática

Título

Caracterización de ecuaciones de quinto grado no resolubles.

Sustentante

Ramona Eridania Torres Fabián

Asesor

MA. Leomar Antonio Reyes Abreu

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico 2023

TÍTULO

CARACTERIZACIÓN DE ECUACIONES DE QUINTO GRADO NO
RESOLUBLES.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Caracterización de ecuaciones de quinto grado no resolubles.

Trabajo de Postgrado presentado por **Ramona Eridania Torres Fabián** para optar por el título de Magister en Matemáticas

Composición del tribunal

MA. Wilson Lucilo Heredia Amparo

Jurado de metodología

MA. Nelson Sánchez Adames

Jurado de Redacción

Dr. Víctor José Galán Céspedes

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Dedicatorias.	VI
Agradecimientos.	VII
RESUMEN.....	VIII
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	1
1.2.2 Antecedentes académicos	2
1.3 Planteamiento del problema	4
1.4 Justificación.	5
1.5 Objetivos.	6
1.5.1 General.	6
1.5.2 Específicos.	6
1.6 Alcances y límites	6
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.	7
2.1 Introducción.	7
2.2 Marco teórico.	7
2.2.1 Ecuaciones.	7
2.2.2 Teoría de grupos.	13
CAPÍTULO III. DISEÑO METODOLÓGICO	20
3.1 Introducción	20
3.2 Marco metodológico	20
3.2.1 Diseño de la investigación	20
3.2.2 Método de investigación	20
3.2.3 Tipo de investigación	20
3.2.4 Enfoque de la investigación	21
3.3 Procedimientos.	21

CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	22
4.1 Introducción	22
4.2 Ecuaciones de quinto grado resolubles por radicales	22
4.3 Propiedades de las ecuaciones de quinto grado no resolubles	32
4.4 Condiciones que garantizan la no resolubilidad de las ecuaciones de quinto grado por radicales	36
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	44
5.1 Introducción	44
5.2 Análisis de los resultados	44
5.3 Conclusiones	46
5.4 Líneas futuras de investigación	47
Referencias	48
ANEXOS.....	51

Dedicatorias.

A Dios. Por ser mi guía y mi fortaleza en este camino.

A mis padres, quienes siempre me han brindado su amor incondicional y sus palabras de aliento en cada paso de mi camino académico.

A mi esposo e hijos. Gracias por su sacrificio y comprensión.

A mis queridos amigos y seres queridos, quienes han estado a mi lado en los momentos de alegría y de desafío. Su compañía y aliento han hecho más llevadera esta ardua travesía académica. Este logro también es suyo.

A los maestros que, con su dedicación y pasión por la enseñanza, han sembrado en mí el deseo de aprender y la curiosidad por explorar el mundo del conocimiento.

Agradecimientos.

A Dios. En primer lugar, quiero agradecer a Dios por guiarme y darme la fortaleza para alcanzar este logro. Su amor y sabiduría han sido mi luz en los momentos de oscuridad y duda.

A mi esposo Eduin y mis hijos: Skarlin, Ricardo y Oliver, quienes siempre han sido mi fuente inagotable de apoyo, aliento y amor incondicional. Su dedicación y sacrificio han sido el motor que me impulsó a perseverar en este largo camino académico. Gracias por creer en mí cuando dudé de mis propias habilidades.

A mis padres: Ramona Fabián Guzmán y José de los Santos Torres (R.I.P), quienes siempre han creído en mí y me han brindado su amor y apoyo inquebrantable. Gracias por ser mi fuerza y guía en cada paso que doy.

A mis profesores, por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo. Gracias por su paciencia y por inspirarme a expandir mis horizontes intelectuales. Cada enseñanza ha sido invaluable para mi crecimiento personal y profesional.

A mi asesor: Agradezco profundamente a mi asesor de tesis Leomar A. Reyes Abreu, por su guía, orientación y sabios consejos a lo largo de esta investigación. Su compromiso con la excelencia académica ha sido una inspiración constante.

A mis amigos y compañeros de estudio: Frankely, Eliana, Wilbert, Yadir y Maritza, quienes estuvieron a mi lado durante los momentos de alegría y los desafíos. Su amistad y apoyo hicieron este viaje mucho más significativo y llevadero.

¡Gracias a todos por formar parte de este emocionante capítulo en mi vida!

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante

Ramona Eridania Torres Fabián

Asesor

MA. Leomar Antonio Reyes Abreu

RESUMEN

Esta tesis presenta una caracterización de las ecuaciones de quinto grado que no son resolubles, cuyos objetivos investigativos fueron delimitar las ecuaciones de grado 5, que pueden ser resueltas por radicales, analizar las propiedades de las no resolubles y establecer condiciones que garantizan su no resolubilidad por radicales. En la metodología de esta tesis, se adoptó un enfoque de investigación no experimental, transversal y descriptivo, utilizando el método analítico-deductivo para caracterizar ecuaciones de quinto grado no resolubles. Se aplicó un enfoque cualitativo, analizando estas ecuaciones desde la teoría de grupos.

Este estudio concluye que una ecuación de quinto grado puede ser resuelta por radicales bajo condiciones específicas. También se identificó que si el grupo de Galois de un polinomio está contenido en el grupo de Frobenius, la ecuación es resoluble por radicales. Se demostró que ciertas ecuaciones no pueden ser resueltas por radicales bajo condiciones particulares y se estableció un criterio adicional basado en el grupo de Galois y el grupo de Frobenius para determinar la resolubilidad. En general, algunas ecuaciones de quinto grado pueden resolverse por radicales, mientras que otras son intrínsecamente no resolubles de esta manera.

Palabras claves: Ecuaciones, grupo de Galois, Frobenius, resolubilidad por radicales.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción.

Este capítulo contiene aspectos importantes en el desarrollo de esta investigación, ya que presenta los antecedentes, el planteamiento del problema, los objetivos, la justificación, además de los alcances y límites en que se enmarca esta propuesta investigativa.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes históricos

Desde un principio, el uso de la palabra álgebra ha sido asociado con la resolución de ecuaciones, generalmente usando las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces; lo cual es conocido como resolución por radicales (Rodríguez y Franco, 2019).

La resolubilidad de ecuaciones polinómicas por radicales ha sido un tema de investigación en matemáticas durante varios siglos. Los primeros avances en el tema se remontan a los antiguos griegos, que encontraron fórmulas para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. Uno de los resultados más fascinantes en el álgebra (y en general en toda la matemática) es el teorema que dice que el polinomio general de grado mayor o igual a cinco no es resoluble por radicales. Este resultado, descubierto a finales del siglo XVIII tuvo que esperar casi 300 años, después de la solución de la ecuación de cuarto grado, para su demostración como se expresa en Vanderwaerden (2013). Su demostración sorprendió a los matemáticos de la época, los cuales no la aceptaron con mucho agrado, pues sus líneas de investigación estaban dirigidas a encontrar una solución de la misma, según Katz y Parshall (2014). Este resultado es atribuido a Abel y es generalmente identificado con la Teoría de Galois, pues es un corolario de la teoría general de resolubilidad desarrollada por Galois (Rothman, 1982). Sin embargo, los trabajos de Abel fueron en realidad antes que los de Galois.

Las contribuciones valiosas del médico y matemático italiano Paolo Ruffini al problema de la solubilidad de la ecuación general de quinto grado no son muy conocidas ni bien entendidas. En realidad, las contribuciones de Ruffini han tenido un reconocimiento limitado y fueron rápidamente opacadas por los trabajos de sus sucesores Abel, Cauchy y Galois, como se establece en Sorensen (1999). Prácticamente el único matemático que valoró el trabajo de Ruffini fue Cauchy, y esto es sorprendente, pues Cauchy era el peor entre todos los matemáticos en dar crédito a los trabajos de los demás, tal como se expresa en (Rothman, 1982).

1.2.2. Antecedentes académicos

Conforme lo establece Simon (2005), en su publicación “Quadratic equations in dimensions 4, 5 and more”, plantea la resolución sobre los racionales de una ecuación cuadrática de dimensión 4 utilizando información local y utilizando un algoritmo para construir una solución. Además, utiliza diversas herramientas como álgebra lineal sobre campos finitos, la teoría de grupos de clases de formas cuadráticas binarias y la reducción de formas cuadráticas indefinidas y unimodulares. Adicionalmente a esto, se extiende este algoritmo a todas las dimensiones $n \geq 5$, considerando dos casos por separado según la paridad de n . Estos algoritmos pueden ser utilizados para encontrar un subespacio totalmente isotrópico de dimensión máxima.

Muñoz (2011) en su publicación sobre “Abel y la imposibilidad de resolver la quintica por radicales”, ofrece en su última sección, una traducción comentada de la memoria que Niels Henrik Abel, de su imposibilidad para demostrar la no resolubilidad de la ecuación de quinto grado mediante radicales.

Sosaya (2015) publicó su tesis de maestría titulada “Aspectos geométricos de la irresolubilidad de una ecuación algebraica de grado cinco” en la que realizan una demostración geométrica en comparación a la de la teoría de Galois, mostrando el estudio de las deformaciones que sufren las raíces de un polinomio como consecuencia

de una deformación del polinomio.

Por su parte, Rodríguez y Franco (2019), en su artículo de “Paolo Ruffini y la Solubilidad de la Ecuación de Quinto Grado”, se presenta la evolución del problema de la solubilidad de la ecuación de quinto grado; haciendo notar que Paolo Ruffini fue el primer matemático en establecer que la ecuación general de quinto grado.

Granados (2020) publica un artículo titulado “Resolvente Del Polinomio De Quinto Grado” donde a pesar de la imposibilidad rigurosamente demostrada por Abel y Galois, utiliza la resolvente, para obtener la solución de la ecuación polinómica de quinto grado. Esto permite llevar la ecuación completa con todos sus coeficientes, a una forma con solo tres términos y un solo parámetro independiente complejo, denominado forma de Bring. Utiliza las transformaciones de Tschirnhaus y auxiliariamente las resolventes de los polinomios de segundo y tercer grados para lograr este fin.

Por otro lado, Jimenez (2020) en su estudio sobre los elementos algebraicos y ecuaciones polinomiales de grado pequeño, presentan un método alternativo de resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado gracias a las Transformaciones de Tschirnhaus, además, clasifican los grupos de Galois de cúbicas y cuarticas, además de caracterizar cuando un polinomio de grado cinco es resoluble.

Ahora bien, Mei (2020) publicó un artículo titulado “Una nueva comprensión del problema de que la ecuación quintica no tiene soluciones radicales”, en el que señala que las pruebas de Abel y Galois de que las ecuaciones quinticas no tienen soluciones radicales no son válidas. Este demostró que a pesar que las ecuaciones quinticas generales se consideraban que no tenían soluciones radicales, existen soluciones radicales para algunas ecuaciones quinticas con formas especiales. Este además señala que las teorías de Abel y Galois se contradecían con el teorema fundamental del álgebra.

Por otro lado, Martínez (2022) publicó un artículo titulado “Resolubilidad por

radicales de algunos polinomios de grado cinco”, donde se busca que los grupos de Galois estén asociados a los distintos polinomios, pues el Teorema de la Teoría de Galois afirma que un polinomio f es resoluble por radicales si y solo si su grupo de Galois es resoluble. Además, se utilizan las ecuaciones resolventes y las funciones simétricas elementales para relacionar los coeficientes del polinomio con las raíces del mismo.

1.3. Planteamiento del problema

Uno de los más grandes problemas que tuvo la matemática, fue determinar las raíces de una ecuación algebraica de la forma $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, siendo n un entero no negativo. En correspondencia con esto, a lo largo de la historia, se presentaron muchos intentos y formulaciones con el interés de dar con una fórmula que resolviese este tipo de ecuaciones. De hecho, una de las fórmulas más utilizadas en las Matemáticas es la denominada fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, siendo los babilonios los primeros que la resolvieron empleando el método de completar el cuadrado. Posterior a esto, se encontró que las soluciones para algunas ecuaciones de grado 4, podían ser convertidas en ecuaciones cuadráticas con simplemente sustituir la expresión $y = x^2$. Mucho tiempo después, en el siglo XVI, se determinó la fórmula para resolver ecuaciones cúbicas, conocida como fórmula de Cardano, y luego de esto, el método para encontrar las soluciones de una ecuación algebraica de grado cuatro fue dada por Lodovico Ferrari.

En definitiva, fueron muchos los matemáticos que intentaron conseguir una formulación que diera las soluciones de una ecuación algebraica de grado 5 y superior, desconociendo que esto era imposible lograrlo, al menos con las matemáticas existentes, a pesar que personajes de gran renombre como Ruffini, Evaristo Galois y Niels Abel, plantearon resultados muy interesantes en este sentido.

Es innegable que las ecuaciones sirven para resolver diferentes problemas matemáticos, geométricos, químicos, físicos o de cualquier otra índole, que tienen aplicaciones tanto en la vida cotidiana como en la investigación y desarrollo de proyectos cien-

tíficos. Conforme a la gran importancia de las mismas, y los múltiples intentos por determinar una fórmula general para ecuaciones de quinto grado o más, este estudio plantea responder a la pregunta de ¿Cuáles condiciones caracterizan las ecuaciones de quinto grado que no son resolubles?

La respuesta a esta pregunta de investigación, supone a la vez, responder las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles restricciones caracterizan las ecuaciones de quinto grado que son resolubles por radicales?
2. ¿Cuáles son las propiedades algebraicas que caracterizan a las ecuaciones de quinto grado no resolubles por radicales?
3. ¿Cuáles son las condiciones que garantizan la no resolubilidad de las ecuaciones de quinto grado por radicales?

1.4. Justificación.

Dentro de los grandes intentos realizados en la historia para conseguir una fórmula que diera las soluciones de una ecuación algebraica de grado 5 y superior, Ruffini haciendo uso de los trabajos sobre permutaciones de Lagrange, fue el primero en acertar con la estrategia utilizada para demostrar la irresolubilidad por radicales de una ecuación algebraica de grado 5 o más, problema que sería finalmente resuelto por Abel. Este trabajo fue conocido por Evariste Galois, el cual da una solución desde la teoría que propiamente lleva su nombre. En este sentido, esta investigación pretendió aportar a ese interés marcado entre la comunidad científica matemática, al plantear una caracterización de las ecuaciones de quinto grado que no son resolubles, desde un enfoque analítico.

El estudio de las ecuaciones de quinto grado no resolubles permite explorar los límites de la resolubilidad de ecuaciones polinómicas por radicales. La resolubilidad por radicales es un tema fundamental en el álgebra y ha sido objeto de estudio desde los tiempos de los matemáticos clásicos. Por lo que comprender las condiciones

que hacen que las ecuaciones de quinto grado sean intratables por radicales, ayudará a comprender mejor las limitaciones de los métodos algebraicos clásicos y a explorar otras herramientas matemáticas para abordar estos problemas. Estas ecuaciones y su no resolubilidad por radicales tienen repercusiones en diferentes áreas de las matemáticas. Por ejemplo, se relacionan con la teoría de Galois, que establece una correspondencia entre las ecuaciones algebraicas y las extensiones de campos, además que también tiene implicaciones en campos como la geometría algebraica, la teoría de grupos y la teoría de números.

Además, su relevancia está marcada en el aporte bibliográfico que realizará esta investigación a la universidad UTECO, ya que el estudio de las ecuaciones y sus métodos de resolución es considerado una temática relevante en el marco de los planes de estudios de Matemática existentes en la actualidad.

1.5. Objetivos.

1.5.1. General.

Caracterizar las ecuaciones de quinto grado que no son resolubles por radicales.

1.5.2. Específicos.

1. Delimitar las ecuaciones de quinto grado que pueden ser resueltas por radicales.
2. Analizar las propiedades de las ecuaciones de quinto grado no resolubles.
3. Establecer condiciones que garantizan la no resolubilidad de las ecuaciones de quinto grado por radicales.

1.6. Alcances y límites

Esta investigación está orientada a la matemática pura, específicamente en álgebra, considerando aspectos analíticos, y diversas teorías que marcan las fundamentaciones de la no resolubilidad de las ecuaciones de quinto grado.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.

2.1. Introducción.

En este capítulo, se presenta un marco referencial para sustentar y comprender la caracterización de las ecuaciones de quinto grado que no son resolubles por radicales.

2.2. Marco teórico.

2.2.1. Ecuaciones.

Definición 2.1 De acuerdo con Cox et al. (2007), una ecuación algebraica de grado n es una expresión matemática de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde x es la variable incógnita y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes reales o complejas. El grado de la ecuación es n , que es el mayor exponente de x en la ecuación.

Teorema 2.1 Según Grinberg (2020), el teorema fundamental del álgebra plantea que toda ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas, contando multiplicidades. En términos matemáticos, el teorema puede formularse de la siguiente manera: siendo $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ una ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos $a_0, a_1, \dots, a_n$. Entonces, existe al menos una raíz compleja z_1 de $P(z)$, es decir, $P(z_1) = 0$. Además, si contamos las raíces con multiplicidades, $P(z)$ tiene exactamente n raíces complejas distintas.

Este teorema confirma que el sistema numérico complejo es algebraicamente cerrado, es decir, no existe ninguna ecuación algebraica que no pueda resolverse dentro del conjunto de los números complejos (Artin, 2011).

Teorema 2.2 . El teorema de la existencia de raíces reales establece que toda función polinómica con coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una raíz real.

En términos matemáticos, se puede enunciar como:

Garrido (2009) plantea que dado $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado impar con coeficientes reales $a_0, a_1, \dots, a_n$. Entonces, existe al menos un número real r tal que $P(r) = 0$.

Teorema 2.3 Conforme lo establece González y López (2004), el teorema de Sturm plantea que sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes reales. Considerando la sucesión de polinomios de Sturm: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ constituida por $f_1(x) = P(x)$, $f_2(x) = P'(x)$ y donde $f_i(x)$ ($3 \leq i \leq n$) es el opuesto del i ésimo resto que resulta al aplicar el algoritmo del máximo común divisor de Euclides a los polinomios $P(x)$ y $P'(x)$ (se divide $P(x)$ entre $P'(x)$ y a continuación se divide cada divisor entre el opuesto del correspondiente resto). Entonces, el número de raíces, simples o múltiples, de $P(x)$ en cualquier intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ es igual a la diferencia $V(b) - V(a)$, donde $V(c)$ ($c = a, b$) denota el número de variaciones de signos en la sucesión $f_1(c), f_2(c), \dots, f_n(c)$.

Este teorema, un resultado fundamental del Álgebra clásica, indica exactamente el número de raíces reales de un polinomio de coeficientes reales en cualquier intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. En particular, para $(a, b) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, el teorema de Sturm proporciona el número total de raíces reales de los polinomios de coeficientes reales, por lo que constituye la versión real del teorema fundamental del álgebra.

Teorema 2.4 En Jiménez (2020), se establece que si todas las raíces de un ecuación polinómica de coeficientes reales y grado n

$$a_n x^n + \dots + a_0 = 0; a_i \in \mathbb{R} (0 \leq i \leq n); a_n \neq 0$$

son reales, entonces el cuadrado de cada coeficiente no extremo es estrictamente mayor que el producto los dos coeficientes adyacentes

$$a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

2.2.1.1. Ecuación general de segundo grado.

De acuerdo con Artin (2011), una ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Una forma de encontrar una fórmula general para calcular las soluciones es mediante el método de completar cuadrados, lo que conlleva a despejar x de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= \frac{b^2}{4a^2} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

2.2.1.2. Ecuación general de grado 3 .

Según Ivorra (2011), una ecuación de grado 3, es de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. El primer paso para resolver esta ecuación cúbica es haciendo la sustitución que permite simplificarla o reducirla: $x = y - \frac{a}{3}$ reemplazando en la ecuación cubica, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c \\ 0 &= y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(\frac{2a^2}{27} - \frac{ab}{3} + c\right) \end{aligned}$$

Si se hace $p = b - \frac{a^2}{3}$ y $q = \frac{2a^2}{27} - \frac{ab}{3} + c$, entonces se puede escribir la ecuación de la forma

$$y^3 + py = q$$

Si ahora se considera la identidad algebraica, $(r - s)^3 + 3rs(r - s) = r^3 - s^3$

Si se eligen r y s de modo que $3rs = py$ y $r^3 - s^3 = q$, entonces la identidad algebraica se puede reescribir como

$$(r - s)^3 + p(r - s) = q$$

De este modo, $x = r - s$ será una solución de la ecuación cubica reducida. El problema de resolver la ecuación cubica reducida se transforma en el problema de resolver el sistema de ecuaciones simultaneas:

$$r^3 - s^3 = q$$

$$rs = \frac{p}{3}$$

De lo anterior se tiene que $(r^3 - s^3)^2 = q^2$ y $4(rs)^3 = 4\left(\frac{p}{3}\right)^3$. Al sumar estas ecuaciones y realizar algunos procesos algebraicos, se tiene que:

$$(r^3 + s^3)^2 = r^6 + 2r^3s^3 + s^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

O bien,

$$r^3 + s^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

Ahora, si se resuelven las ecuaciones

$$r^3 - s^3 = pr^3 + s^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

en forma simultánea, se pueden obtener los valores de r^3 y s^3 , y por lo tanto de r y s :

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$s = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right)} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Por tanto, como $x = r - s$

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Esta es la fórmula conocida como fórmula de Cardano.

2.2.1.3. Ecuación general de grado 4

Teorema 2.5 De acuerdo con Ivorra (2011), el teorema de Ferrari establece que las raíces de la ecuación

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

están dadas por

$$x = \frac{M \pm \sqrt{M^2 - 4(N - H)}}{2} - \frac{a}{4}, x = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4(N + H)}}{2}$$

donde

$$p = \frac{8b - 3a^2}{8}, q = \frac{8c - 4ab + a^3}{8}, r = \frac{256d - 64ac + 16a^2b - 3a^4}{256}$$

N es una raíz de la ecuación

$$N^3 - \frac{p}{2}N^2 - rN + \frac{4pr - q^2}{8} = 0$$

Y M, H se determinan mediante las ecuaciones

$$p = 2N - M^2, \quad q = -2MR, \quad r = N^2 - H^2$$

2.2.1.4. Ecuaciones resolubles por radicales.

Definición 2.2 Sosaya (2015) plantea que siendo $n \in \mathbb{N}$, se dice que la ecuación general de grado n es resoluble por radicales si existen polinomios $p_1, \dots, p_N$ de coeficientes complejos (en $n, n+1, \dots, n+N-1$ variables respectivamente) y enteros positivos $k_1, \dots, k_N$, tales que, para cualquier polinomio fijado

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Con $a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ y para cada raíz r de P, existen $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{C}$ tales que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
x_1^{k_1} &= p_1(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \\
\vdots &= x_1^{k_2} = p_2(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_1) \\
&\vdots \\
x_N^{k_N} &= p_N(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_1, \dots, x_{N-1})
\end{aligned}$$

Siendo $x_N = r$. Se denotarán los valores $x_1, x_2, \dots, x_N$ radicales intermedios.

Definición 2.3 Simon (2005) sostiene que $l : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por

$$\iota(z) = (\iota_1(z), \iota_2(z), \dots, \iota_n(z)) \quad (2.1)$$

De tal forma que $o_{\iota_i}(z) = \text{constante}$ $o_{\iota_i}(z) = z_i$ donde $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Se define,

$$P^\iota = \left\{ P(\iota(z)) := x^n + \iota_n(z)x^{n-1} + \dots + \iota_2(z)x + \iota_1(z) = \frac{0}{z} \in \mathbb{C}^n \right\}$$

Definición 2.4 Sosaya (2015) plantea que P^l es una clase de ecuaciones algebraicas y $P(\iota(z))$ es una clase de polinomios. Sea ι como en la definición (2.1), sea P^l una clase de ecuaciones algebraicas. Se dice que P^l es resoluble por radicales si existen polinomios $p_1, \dots, p_N$ de coeficientes complejos (en $n, n+1, \dots, n+N-1$ variables respectivamente) y enteros positivos $k_1, \dots, k_N$ tales que para cualquier $z \in \mathbb{C}^n$ fijado y para cada raíz r de $P(\iota(z))$, existen $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{C}$ tales que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
x_1^{k_1} &= p_1(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \\
x_2^{k_2} &= p_2(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_1) \\
&\vdots \\
x_N^{k_N} &= p_N(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_1, \dots, x_{N-1}),
\end{aligned}$$

Definición 2.5 Según Portuondo (2017), las ecuaciones ciclotómicas son un tipo especial de ecuaciones polinómicas vinculadas a las raíces de la unidad en los números complejos. Para un número entero no negativo n , una ecuación ciclotómica es una

ecuación polinómica cuyas soluciones son precisamente las n -ésimas raíces de la unidad. Estas son los números complejos que, al ser elevados a la n -ésima potencia, resultan en 1.

Matemáticamente, las n -ésimas raíces de la unidad son los números complejos de la forma $\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$, donde i es la unidad imaginaria y k varía de 0 a $n-1$.

El polinomio ciclotómico $\Phi_n(x)$ para n se define como el producto de $(x - \omega)$ para cada n -ésima raíz de la unidad ω que es una raíz primitiva. Una raíz primitiva es aquella cuyo orden multiplicativo (es decir, el menor exponente positivo que resulta en 1 al elevar la raíz) es exactamente n .

$$\Phi_n(x) = \prod (x - \omega)$$

donde el producto se extiende a todas las raíces primitivas n -ésimas de la unidad. Los coeficientes de estos polinomios son siempre 1, -1 o 0 y tienen un grado $\phi(n)$, donde ϕ es la función de Euler. Por lo tanto, resolver una ecuación ciclotómica implica encontrar todas las n -ésimas raíces de la unidad en los números complejos.

2.2.2. Teoría de grupos.

2.2.2.1. Fundamentos de la teoría de grupos

Definición 2.6 Según se señala en Zaia (2018), un grupo es un par $(G, *)$, donde G es un conjunto y $*$ una operación binaria sobre G verificando las siguientes propiedades:

1. La operación es asociativa, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, cualesquiera que sean x, y, z elementos de G . Por ello, en lo sucesivo se escribirá $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$. También cuando ello no suponga ambigüedad, se suprimirá el $\cdot$ para designar la operación, es decir, se colocará xy en lugar de $x \cdot y$, (en concordancia con esto, se escribirá también que G es un grupo en lugar de $(G, \cdot)$ es un grupo).
2. Existe un elemento neutro $e \in G$. Es decir, $\exists e \in G \mid ex = xe = x, \forall x \in G$ (el elemento neutro es único, pues si e' es neutro también, se tiene $e = ee' = e'$)

3. Para cada $x \in G$ existe un $x^{-1} \in G$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. El elemento x^{-1} se denomina inverso (u opuesto) de x . (Tal inverso es único pues si $xy = e$, se tiene $y = x^{-1}xy = x^{-1}e = x^{-1}$ por la propiedad asociativa).

Si $x, y \in G$ entonces $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ (ya que, por la unicidad del inverso, de $y^{-1}x^{-1}xy = y^{-1}y = e$ se deduce $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$).

Definición 2.7 Dubreil (2021) establece que un grupo G es abeliano si satisface la propiedad conmutativa, es decir, si $xy = yx, \forall x, y \in G$. Frecuentemente se reserva para estos grupos el símbolo $+$ para denotar la operación, el 0 para el neutro y con $-x$ se indicará el opuesto de x .

Si en un conjunto G está definida una operación asociativa, se dirá que un elemento $x \in G$ es idempotente si $x^2 = xx = x$. En este caso, $x^n := x \cdot^n \cdot x = x$ para todo número natural n . Pues bien, si G es un grupo, el único elemento idempotente de G es el neutro ($x^2 = x \Rightarrow x = x^{-1}xx = x^{-1}x = e$).

Definición 2.8 Dubreil (2021) señala que un subconjunto no vacío H de un grupo G se dirá que es un subgrupo de G si la operación de G induce en H una estructura de grupo con el mismo elemento neutro. Es decir,

1. $xy \in H, \forall x, y \in H$
2. $e \in H$
3. $x^{-1} \in H, \forall x \in H$.

Observación 2.2.1 Según Rodríguez et al. (2021), un subconjunto no vacío H de un grupo G es un subgrupo de G si, y solo si, se satisface la propiedad

$$x, y \in H \Rightarrow x^{-1}y \in H$$

Si $\{H_i \mid i \in I\}$ es una familia de subgrupos del grupo G entonces $\bigcap_{i \in I} H_i$ es también subgrupo de G . En efecto, de $x, y \in \bigcap_{i \in I} H_i$ se deduce inmediatamente

$x^{-1}y \in \bigcap_{i \in I} H_i$ ya que, para cada $i \in I$, se tiene $x^{-1}y \in H_i$ al ser cada H_i un subgrupo de G .

Con la determinación de la naturaleza de los subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$ se inicia la teoría de divisibilidad en $\mathbb{Z}$. Si H es un tal subgrupo y si $s \neq 0$ es el menor entero positivo que está en H entonces $H = s\mathbb{Z}$, es decir, H consiste en el conjunto de los múltiplos de s (Si $t \in H$, el algoritmo de Euclides proporciona enteros q, r con $0 \leq r < s$ tales que $t = qs + r$, con lo que se obtiene $r = t - qs \in H$ ya que $qs \in H$; de ello se deduce que $r = 0$ por la selección de s).

Definición 2.9 Rodríguez et al. (2021) indica que si $(G, \cdot)$ y $(L, *)$ son grupos, una aplicación $f : G \rightarrow L$ es un homomorfismo de grupos si

$$f(xy) = f(x) * f(y), \forall x, y \in G$$

Un homomorfismo biyectivo se llamará isomorfismo.

Así, un homomorfismo $f : G \rightarrow L$ es un isomorfismo si, y solo si, existe una aplicación inversa $f^{-1} : L \rightarrow G$ (que resulta ser también homomorfismo de grupos). Con la notación $L \simeq G$ se indicará que L y G son grupos isomorfos, es decir, que existe un isomorfismo entre ellos.

Definición 2.10 Para el homomorfismo $f : G \rightarrow L$ se definen dos subgrupos importantes:

1. Imagen de f , es el subgrupo $f(G)$ de L y se escribirá $\text{Im}(f) = f(G)$.
2. El núcleo de f , denotado con $\text{Ker}(f)$, se define como $\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{e_L\})$.

Además $\text{Ker}(f)$ es un subgrupo de G con la siguiente propiedad:

Si $x \in G$ e $y \in \text{Ker}(f)$, como

$$f(xy x^{-1}) = f(x) * f(y) * f(x^{-1}) = f(x) * e_L * [f(x)]^{-1} = e_L$$

se sigue que $xy x^{-1} \in \text{Ker}(f)$.

Definición 2.11 Toth (2002) establece que si G es un grupo y H es un subgrupo de G , se dice que H es subgrupo normal (o invariante) de G si satisface cualquiera de las propiedades equivalentes siguientes:

1. $xHx^{-1} \subset H, \forall x \in G$
2. $xHx^{-1} = H, \forall x \in G$
3. $xH = Hx, \forall x \in G$.
4. $H \simeq H$.

Definición 2.12 Se dice que un grupo finito, G , es soluble si tiene una serie de composición

$$\{e\} = G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq G_2 \dots \subsetneq G_n = G$$

Tal que $G_{i+1}/G_i \cong \mathbb{Z}_{p_i}$ con p_i primo, $0 \leq i < n$ (Calavia, 2019).

Teorema 2.6 Sea G un grupo finito y $H \triangleleft G$, entonces G es soluble si y solo si G/H y H lo son. Además, todo subgrupo de un grupo soluble es soluble (Calavia, 2019).

Definición 2.13 Grupos simétricos. Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define S_n como el conjunto de las biyecciones

$$\sigma = \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

Otazo (2014) establece que este conjunto S_n junto con la operación usual de composición de funciones forman una estructura de grupo $(S_n, \cdot)$, llamado Grupo Simétrico de grado n . A una biyección $\sigma \in S_n$ se le llamará permutación y a los elementos del dominio, índices de la permutación.

Teorema 2.7 Dubreil (2021) establece que el teorema de la correspondencia plantea que siendo G un grupo y H un subgrupo normal de G . Existe una biyección que conserva las inclusiones entre el retículo de subgrupos (subgrupos normales) de G/H y el de subgrupos (subgrupos normales) de G que contienen a H .

Proposición 2.2.1 Si H es un grupo y para cada $i \in I$ está definido un homomorfismo de grupos $f_i : H \rightarrow G_i$, existe un único homomorfismo de grupos $f : H \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$ tal que $\pi_j \circ f = f_j$, para cada $j \in J$ (Dubreil, 2021).

Teorema 2.8 Teorema de Lagrange. Si G es un grupo finito y H es un subgrupo de G , entonces el orden de H divide al orden de G . Además

$$\#G = \#H(G : H)$$

en donde $(G : H)$ indica el índice de H en G , es decir, el número de clases de equivalencia de H en G (Dubreil, 2021).

2.2.2.2. Teoría de Galois

Definición 2.14 Si F es un cuerpo, el conjunto $\text{Aut}(F)$ de todos los automorfismos de F es un grupo con la operación definida por la composición de aplicaciones (Rodríguez et al., 2021).

Definición 2.15 Calavia (2019) plantea que siendo F un cuerpo y G un subgrupo del grupo $\text{Aut}(F)$. Se define el cuerpo fijo por G como

$$F^G := \{x \in F \mid \sigma(x) = x, \forall \sigma \in G\}$$

Si $F : K$ es una extensión de cuerpos se define el grupo de Galois de la extensión $F : K$ como

$$\text{Gal}(F/K) := \{\sigma \in \text{Aut}(F) \mid \sigma|_K = id_K\}$$

Teorema 2.9 Rodríguez et al. (2021), plantea que el teorema fundamental de la teoría de Galois sostiene que dado $E : K$ una extensión finita de Galois y $G = \text{Gal}(E/K)$, si $\mathcal{F} = \{F \mid F \text{ es cuerpo intermedio entre } K \text{ y } E\}$ y $\mathcal{S} = \{H \mid H \text{ es subgrupo de } G\}$, entonces existe una biyección, que invierte las inclusiones, $\Psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}$, definida por $\Psi(F) = \text{Gal}(E/F)$, cuya inversa es la aplicación $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$, definida mediante $\Phi(H) = E^H$.

Para cada $F \in \mathcal{F}$ la extensión $E : F$ es de Galois finita, y son equivalentes las afirmaciones

1. $F : K$ es de Galois finita.
2. El grupo $\Psi(F) = \text{Gal}(E/F)$ es un subgrupo normal de G .

Además, si $F : K$ es de Galois se tiene

$$\text{Gal}(F/K) \simeq \text{Gal}(E/K) / \text{Gal}(E/F)$$

Teorema 2.10 Según lo establece Brown (2005), cualquier función algebraica y que resuelva la ecuación

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \quad (2.2)$$

entonces puede ser escrita en la forma:

$$y = a_0 + a_1 R^{\frac{1}{p}} + a_2 R^{\frac{2}{p}} + \cdots + a_{p-1} R^{\frac{p-1}{p}}$$

donde p es un número primo, y $a_0, \dots, a_{p-1}, R$ son funciones algebraicas de un orden inferior a y .

Demostración. Se nota que al factorizar p y escribir radicales de p como una secuencia anidada, se puede asumir que p es primo. Por ejemplo, $\sqrt[6]{\alpha} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{\alpha}}$.

Se considera una función algebraica v como se establece en el enunciado del teorema, de modo que por definición, v puede escribirse como $v = \frac{F}{G}$ donde

$$G = g_0 + g_1 R^{\frac{1}{p}} + g_2 R^{\frac{2}{p}} + \cdots + g_q R^{\frac{q}{p}}$$

para algún $q \in \mathbb{N}$ y p primo, y de manera similar para F . Luego, se consideran las sustituciones $R^{\frac{1}{p}} \mapsto \xi R^{\frac{1}{p}}, R^{\frac{1}{p}} \mapsto \xi^2 R^{\frac{1}{p}}, \dots, R^{\frac{1}{p}} \mapsto \xi^{p-1} R^{\frac{1}{p}}$ donde $\xi \neq 1$ es una solución a la ecuación $x^p - 1 = 0$. Se observa que hay $p - 1$ sustituciones diferentes, lo que da $p - 1$ valores diferentes para G , que se denotan como $G_1, \dots, G_{p-1}$. Por tanto, se considera la expresión

$$v = \frac{F G_1 G_2 \cdots G_{p-1}}{G G_1 G_2 \cdots G_{p-1}}$$

Por lo que el denominador de v se puede escribir como una función algebraica de orden 0. Para ver esto, simplemente se multiplica la expresión y se agrupan términos:

$$\begin{aligned} GG_1G_2 \cdots G_{p-1} &= \left(g_0 + g_1R^{\frac{1}{p}} + g_2R^{\frac{2}{p}} + \cdots + g_qR^{\frac{q}{p}}\right) \\ &\quad \times \left(g_0 + g_1\xi R^{\frac{1}{p}} + g_2\xi^2 R^{\frac{2}{p}} + \cdots + g_q\xi^q R^{\frac{q}{p}}\right) \\ &\quad \times \cdots \times \left(g_0 + g_1\xi^{p-1}R^{\frac{1}{p}} + g_2\xi^{2(p-1)}R^{\frac{2}{p}} + \cdots + g_q\xi^{q(p-1)}R^{\frac{q}{p}}\right) \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{p-1} = \frac{1 - \xi^p}{1 - \xi} = 0$$

Si g_0 es un polinomio, se concluye. Si contiene más radicales, se puede repetir el proceso hasta que no queden radicales, lo que deja un g_0 que es simplemente una función racional de los coeficientes, es decir, una función algebraica de orden 0.

Usando este hecho, se puede escribir

$$v = \frac{F}{G} = \frac{FG_1G_2 \cdots G_{p-1}}{GG_1G_2 \cdots G_{p-1}} = f_0 + f_1R^{\frac{1}{p}} + \cdots + f_qR^{\frac{q}{p}}$$

como una función algebraica de orden k para algún entero positivo k , donde se ha absorbido la función racional $GG_1G_2 \cdots G_{p-1}$ en el numerador y los f_i y R son funciones algebraicas de orden $k - 1$. Se puede suponer que $q < p$, ya que si no, se puede escribir $p = n_1q + m_1$ y así $R^{\frac{q}{p}} = R^{m_1}R^{\frac{n_1}{p}}$. Luego, se puede absorber el R^{m_1} en los coeficientes f_i . Lo cual concluye la demostración.

Proposición 2.2.2 Suponga que $x^p - R \in F[x]$ es irreducible y que α es una raíz. Sea β un elemento de $F(\alpha)$ con $\beta \notin F$. Entonces existe un $\gamma \in F(\alpha)$ tal que $\gamma^p \in F$ y

$$\beta = a_0 + \gamma + a_2\gamma^2 + \cdots + a_{p-1}\gamma^{p-1}$$

donde $a_0, a_2, \dots, a_{p-1} \in F$.

Definición 2.16 Noor (2009) define el grupo de Frobenius F_{20} de orden 20 como el subgrupo del grupo simétrico S_5 generado por las permutaciones $(12\ 345)$ y (2354) .

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Introducción

En este capítulo, se especifican los componentes metodológicos que guiaron el proceso de elaboración de esta investigación. Aquí se presenta el diseño, método, tipo, enfoque y procedimientos realizados para el desarrollo de este proyecto.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño de la investigación

La metodología de esta investigación se rige por un diseño no experimental, tal como lo describen Hernández-Sampieri et al. (2018), puesto que no se lleva a cabo una manipulación intencional de las variables. En cuanto al tiempo de estudio, se adopta un enfoque transversal, que Hernández y sus coautores definen como una estrategia en la que los datos se recopilan en un único punto temporal.

3.2.2. Método de investigación

Este estudio se basó en el uso del método analítico-deductivo con fines de caracterizar las ecuaciones de quinto grado no resolubles. Según Espinoza (2020), el método analítico es una estrategia de investigación que busca desglosar un fenómeno en sus componentes esenciales para entender su naturaleza, causas y efectos. Paralelamente, se aplicó el razonamiento deductivo, lo que permitió derivar conclusiones a partir de los hallazgos obtenidos y de esta manera, confirmar los objetivos establecidos en este estudio.

3.2.3. Tipo de investigación

Tal como se plantea en Martínez (2018), esta investigación se fundamentó en una metodología descriptiva, debido a que se pretendió describir las propiedades de las ecuaciones de quinto grado que no son resolubles por radicales, además de plantear ciertas condiciones que las caracterizan.

3.2.4. Enfoque de la investigación

Este estudio contempla utilizar un enfoque cualitativo debido a la naturaleza intrínsecamente compleja de las ecuaciones de quinto grado no resolubles y su caracterización desde la perspectiva de la teoría de grupos (Creswell y Poth, 2018).

3.3. Procedimientos.

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso a realizar en este trabajo de investigación:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, sobre los aspectos básicos y fundamentaciones de los métodos de Newton y Halley en la resolución de las ecuaciones de orden superior.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos constitutivos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada del borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

Las ecuaciones quínticas son ecuaciones que en general, no pueden ser resueltas utilizando solo operaciones algebraicas básicas y radicales. Sin embargo, se presentan casos especiales que si pueden ser resueltas de esta forma. Es por esto, que en este capítulo, se presentan distintos teoremas, proposiciones y ejemplos a los fines de caracterizar las ecuaciones de quinto grado resolubles y no resolubles por radicales.

4.2. Ecuaciones de quinto grado resolubles por radicales

La forma general de una ecuación de quinto grado implica que esta se puede presentar en formas tan variadas que es prácticamente imposible establecer cuáles son todas las ecuaciones de este orden que pueden ser resueltas por radicales. En tal sentido, en esta sección se presentan algunas relaciones y formas que deben cumplir los coeficientes de estas ecuaciones para asegurar que serán resolubles por radicales.

Teorema 4.1 Una ecuación de la forma

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \quad (4.1)$$

es resoluble por radicales si se cumple que para cualesquiera $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

$$A = a + b + d$$

$$B = c + a(b + d) + bd + e$$

$$C = c(a + d) + abd + e(a + b)$$

$$D = c(a + e) + abe$$

$$E = ace$$

Demostración Sustituyendo las expresiones de A, B, C, D y E en la ecuación (4.1), según los valores denotados, se tiene que:

$$\begin{aligned}
& x^5 + [a + b + d] x^4 + [c + a(b + d) + bd + e] x^3 + \\
& [c(a + d) + abd + e(a + b)] x^2 + [c(a + e) + abe] x + [ace] = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Realizando algunas operaciones algebraicas, se tiene que puede ser expresada de la forma:

$$\begin{aligned}
& x^5 + (a + b)x^4 + (c + ab)x^3 + acx^2 \\
& + dx^4 + (a + b)dx^3 + (c + ab)dx^2 + acdx \\
& + ex^3 + e(a + b)x^2 + e(c + ab)x + ace = 0
\end{aligned}$$

Al extraer los factores comunes en cada bloque de expresiones, se tiene:

$$\begin{aligned}
& x^2 [x^3 + (a + b)x^2 + (c + ab)x + ac] \\
& dx [x^3 + (a + b)x^2 + (c + ab)x + ac] \\
& e [x^3 + (a + b)x^2 + (c + ab)x + ac]
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$(x^2 + dx + e) [x^3 + (a + b)x^2 + (c + ab)x + ac] = 0$$

Si ahora solo se toma la expresión, $x^3 + (a + b)x^2 + (c + ab)x + ac$, se organizan estratégicamente los términos y se extrae el factor común, se tiene

$$[x^3 + bx^2 + cx] + [ax^2 + abx + ac] = x [x^2 + bx + c] + a [x^2 + bx + c]$$

Por tanto la ecuación (4.2), puede ser planteada como:

$$(x^2 + dx + e) (x^2 + bx + c) (x + a) = 0$$

puesto que las soluciones de la ecuación $(x^2 + dx + e) = 0$, Y $(x^2 + bx + c) = 0$ están dadas por la fórmula general de ecuaciones cuadráticas y de $(x + a) = 0$ se obtiene que $x = -a$, se concluye la demostración del teorema.

Teorema 4.2 Las ecuaciones de grado 5 de la forma

$$x^5 - a = 0 \tag{4.3}$$

siendo $a \in \mathbb{R}$ son resolubles por radicales.

Demostración. Si $x^5 - a = 0$ entonces es $x = \sqrt[5]{a}$ es una de las raíces de dicha ecuación. Ahora bien, al dividir $\frac{x^5 - a}{x - \sqrt[5]{a}}$, se tiene que:

$$x^5 - a = (x - \sqrt[5]{a}) (x^4 + x^3 \sqrt[5]{a} + x^2 \sqrt[5]{a^2} + x \sqrt[5]{a^3} + \sqrt[5]{a^4}) = 0$$

Luego se sigue que la ecuación $x^4 + x^3 \sqrt[5]{a} + x^2 \sqrt[5]{a^2} + x \sqrt[5]{a^3} + \sqrt[5]{a^4} = 0$, puede ser resuelta por radicales, de acuerdo a la fórmula establecida por Ferrari en (2.5) .

Teorema 4.3 La ecuación quíntica de la forma

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \quad (4.4)$$

es resoluble por radicales.

Demostración. De acuerdo al teorema (2.5), las soluciones de la ecuación ciclotómica quíntica $\zeta^5 - 1 = 0$ son

$$\zeta = e^{i2\pi/5} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

Introduciendo cuatro variables y, z, u, v y utilizando el determinante circular de quinto grado, Tang (2012) demostró la siguiente ecuación idéntica

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = \prod_{j=0}^4 (x + \zeta^j y + \zeta^{2j} z + \zeta^{3j} u + \zeta^{4j} v) \quad (4.5)$$

Las relaciones entre los coeficientes p, q, r, s y las variables y, z, u, v son

$$p = -5(yv + zu) \quad (4.6)$$

$$q = 5(yz^2 + zv^2 + uy^2 + vu^2) \quad (4.7)$$

$$s = 5(yv^2 + z^2u^2 - y^3z - z^3v - u^3y - v^3u - yzuv) \quad (4.8)$$

$$s = y^5 + z^5 + u^5 + v^5 - 5y^3uv - 5z^3yu - 5u^3zv - 5v^3yz + 5u^2v^2y + 5u^2v^2z + 5z^2v^2u + 5y^2z^2v \quad (4.9)$$

De acuerdo con las ecuaciones (4.4) y la (4.5), entonces:

$$x + \zeta^j y + \zeta^{2j} z + \zeta^{3j} u + \zeta^{4j} v = 0 \quad (4.10)$$

donde las cinco soluciones de las ecuaciones quínticas son

$$x_j = -\zeta^j y - \zeta^{2j} z - \zeta^{3j} u - \zeta^{4j} v, j = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (4.11)$$

Si se usa p, q, r, s para representar y, z, u, v en función de las ecuaciones (4.6)-(4.9) se obtienen las cinco soluciones de las ecuaciones quínticas. A continuación, se presentan algunos ejemplos particulares.

Proposición 4.2.1 Sea $q = 0$ en la ecuación (4.4), se convierte en

$$x^5 + px^3 + rx + s = 0 \quad (4.12)$$

y es resoluble por radicales.

Demostración. De acuerdo con la ecuación (4.7), para $q = 0$, se hace $y = 0$ y $v = 0$. Sustituyéndolos en las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.9), se obtiene

$$p = -5zu \quad (4.13)$$

$$r = 5z^2u^2 \quad (4.14)$$

$$s = u^5 + z^5 \quad (4.15)$$

A partir de las ecuaciones (4.13) y (4.14), se obtiene $p^2 = 5r$. De acuerdo a la (4.13), se tiene que $z = -p/(5u)$. Sustituyéndolos en la (4.15), se deduce

$$u^{10} - su^5 - \left(\frac{p}{5}\right)^5 = 0 \quad (4.16)$$

La solución de la ecuación (4.16) es

$$u^5 = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5}$$

Haciendo

$$u = \left[\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5} \right]^{\frac{1}{5}}$$

De acuerdo con la (4.13), implica que

$$z = \left[\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5} \right]^{-\frac{1}{5}}$$

Por lo tanto, bajo la condición de que se cumpla la ecuación (4.16), la solución ($j = 0$) en la ecuación (4.11) es $x_0 = -z - u$, o

$$x_0 = - \left[\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5} \right]^{\frac{1}{5}} - \left[\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{5}\right)^5} \right]^{\frac{1}{5}} \quad (4.17)$$

Al considerar la ecuación (4.15), se puede verificar directamente que la ecuación (4.17) es la solución de la ecuación (4.12). Otras cuatro soluciones están determinadas por la ecuación (4.11). Por otro lado, para la cúbica, se tiene

$$x^3 + px + s = 0$$

$$x_0 = \left[-\frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \right]^{\frac{1}{3}}$$

La solución de la ecuación quintica (4.12) es similar a la de la ecuación cúbica si los coeficientes p y r en la ecuación satisfacen la relación $p^2 = 5r$.

Proposición 4.2.2 Si se hace $p = 0$ en la ecuación quintica (4.4), la ecuación se convierte en

$$x^5 + qx^2 + rx + s = 0 \quad (4.18)$$

y es resoluble por radicales.

Demostración. Tomando $u = v = 0$ en la ecuación (4.6) y sustituyéndolos en las ecuaciones (4.7)-(4.9), se obtiene

$$q = 5yz^2 \text{ o } yz^2 = \frac{1}{5}q \quad (4.19)$$

$$r = -5y^3z \text{ o } y^3z = -\frac{1}{5}r \quad (4.20)$$

$$s = y^5 + z^5 \quad (4.21)$$

Estas tres fórmulas anteriores satisfacen

$$\frac{(y^3 z)^2}{y z^2} + \frac{(y z^2)^3}{y^3 z} = y^5 + z^5 \quad (4.22)$$

Considerando las ecuaciones (4.19)-(4.21), la ecuación (4.22) puede expresarse como

$$q^4 + 25qrs - 5r^3 = 0$$

A partir de las ecuaciones (4.19) y (4.20), se tiene

$$y = \left(\frac{r^2}{5q} \right)^{1/5}, z = - \left(\frac{q^3}{25r} \right)^{1/5}$$

Por lo tanto, una solución de la ecuación (4.18) es

$$x_0 = y + z = \left(\frac{r^2}{5q} \right)^{1/5} - \left(\frac{q^3}{25r} \right)^{1/5}$$

Otras cuatro soluciones están determinadas por la ecuación (4.11).

Teorema 4.4 Cualquier ecuación $x^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$ se puede convertir al eliminar el término de grado cuatro, en el polinomio $x^5 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$.

Demostración. Si el polinomio se dispone en la forma de $(x^2 + px + q)(x^3 - px^2 + q') = 0$, entonces se puede simplificar de la siguiente manera, donde $pq' \neq 0, p \neq 0$ y $q' \neq 0$

$$x^5 - px^4 + q'x^2 + px^4 - p^2x^3 + pq'x + qx^3 - pqx^2 - qq' = 0 \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow x^5 - (p^2 - q)x^3 + (q' - pq)x^2 + pq'x + qq' = 0$$

$$y_1 : p^2 - q = -c \quad (4.24)$$

$$y_2 : q' - pq = d \quad (4.25)$$

$$y_3 : pq' = e \quad (4.26)$$

$$y_4 : qq' = f \quad (4.27)$$

De las ecuaciones (4.26) y (4.27) se obtiene $(p-q)q' = e-f$. Sumando la ecuación (4.24) y (4.25) se obtiene $p^2 - q + q' - pq = -c + d$ y por tanto, $p(p-q) - q + q' = -c + d$.

Multiplicando ambos lados por q' : $p(p-q)q' - qq' + q'^2 = (-c+d)q'$. De la ecuación (4.26) se obtiene $p = e/q'$. Sustituyendo el valor de p y la ecuación $(p-q)q' = e-f$ en $p^2 - q + q' - pq = -c + d$ se obtiene $(e/q')(e-f) - f + q'^2 = (-c+d)q'$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e(e-f) - fq' + q'^3 &= (-c+d)q'^2 \\ \Rightarrow q'^3 + (c-d)q'^2 - fq' + (e^2 - ef) &= 0 \end{aligned}$$

Esto se puede resolver mediante el método de Cardano y al obtener el valor de q' , se puede encontrar los valores de p y q a partir de las ecuaciones (4.26) y (4.27). Por lo tanto, las raíces del polinomio provienen de $(x^2 + px + q)(x^3 - px^2 + q') = 0$.

Ejemplo 4.1 Resolver $x^5 + 5x^4 - 27x^3 - 13x^2 + 82x - 48 = 0$.

Al eliminar el término de grado cuatro, se obtiene $y^5 - 37y^3 + 88y^2 + 12y - 112 = 0$. Sea $(y^2 + py + q)(y^3 - py^2 + q') = 0$. Aquí $c = -37, d = 88, e = 12$ y $f = -112$, y las ecuaciones son $p^2 - q = -(-37) = 37, q' - pq = 88, pq' = 12, qq' = -112$

$$c - d = -37 - 88 = -125, \quad e^2 - ef = 12^2 - 12(-112) = 144 + 1344 = 1488 \quad (4.28)$$

Ahora en la ecuación anterior $q'^3 + (c-d)q'^2 - fq' + (e^2 - ef) = 0$ se convierte en $q'^3 + (-125)q'^2 - (-112)q' + 1488 = 0 \Rightarrow q'^3 - 125q'^2 + 112q' + 1488 = 0$. Esto se puede resolver mediante el método de Cardano. Se obtiene $q' = 4$ y $pq' = 12 \Rightarrow p = \frac{12}{4} = 3$ y $qq' = -112 \Rightarrow q = -\frac{112}{4} = -28$. Teniendo $(y^2 + 3y - 28)(y^3 - 3y^2 + 4) = 0$. Al resolver se tiene que $y = -7, 4$ y $y = 2, 2, -1$, y al poner el valor en $x = y - 1$ se obtiene $x = -8, 3$ y $1, 1, -2$. Estas son las raíces del polinomio dado.

Otra forma de como abordar el planteamiento de que la ecuación general quíntica $a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ puede ser reducida, a través de una transformación apropiada, a la ecuación:

$$y^5 + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0 \quad (4.29)$$

Para eso, se usará la identidad $(uv)^5 + \left(\frac{v^5 - u^5}{2}\right)^2 = \left(\frac{v^5 + u^5}{2}\right)^2$ para obtener la solución algebraica de la ecuación quíntica reducida (4.29) anterior. Para hacerlo, se convierte la ecuación (4.29) a la (4.30) sujeta a la condición (4.31) siguiente:

$$(uv)^5 + k_1 \frac{(uv)^3 \left(\frac{v^5 - u^5}{2}\right)^2}{(uv)^3} + k_2 \frac{(uv)^2 \left(\frac{v^5 - u^5}{2}\right)^2}{(uv)^2} + k_3 \frac{uv \left(\frac{v^5 - u^5}{2}\right)^2}{uv} - \left(\frac{v^5 + u^5}{2}\right)^2 = 0 \quad (4.30)$$

$$k_1 + k_2 + k_3 = 1 \quad (4.31)$$

donde:

$$y = uv \quad (4.32)$$

$$b_3 = k_1 \frac{\left(\frac{v^5 - u^5}{2}\right)^2}{(uv)^3} \quad (4.33)$$

$$b_2 = k_2 \frac{\left(\frac{v^5 - u^5}{2}\right)^2}{(uv)^2} \quad (4.34)$$

$$b_1 = k_3 \frac{\left(\frac{v^5 - u^5}{2}\right)^2}{uv} \quad (4.35)$$

$$b_0 = - \left(\frac{v^5 + u^5}{2}\right)^2 \quad (4.36)$$

de las ecuaciones (4.32) y (4.33), se tiene

$$\frac{b_2}{b_3} = \frac{k_2}{k_1} uv \quad (4.37)$$

asi mismo, de las ecuaciones (4.34) y (4.35), se obtiene

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{k_3}{k_2} uv \quad (4.38)$$

Ahora bien, combinando las ecuaciones (4.37) y (4.38), se deduce

$$\frac{b_2^2}{b_1 b_3} = \frac{k_2^2}{k_1 k_3} \quad (4.39)$$

Las ecuaciones (4.31), (4.39) junto con otra ecuación más pueden ser utilizadas para determinar las raíces de los parámetros k_1 , k_2 y k_3 en términos de los coeficientes a_1 , a_2 y a_3 . Ahora se obtendrá esta otra ecuación. Partiendo de la expresión (4.38):

$$uv = \frac{b_1 k_2}{b_2 k_3} \quad (4.40)$$

de la ecuación (4.36),

$$v^5 + u^5 = \pm 2\sqrt{-b_0} \quad (4.41)$$

Mediante las ecuaciones (4.35) y (4.40)

$$v^5 - u^5 = \pm 2\sqrt{\frac{b_1 uv}{k_3}} = \pm 2\sqrt{\frac{b_1^2 k_2}{b_2 k_3^2}} \quad (4.42)$$

Por medio de las ecuaciones (4.30) y (4.31):

$$b_3(uv)^3 + b_2(uv)^2 + b_1(uv) = \left(\frac{v^5 - u^5}{2}\right)^2 \quad (4.43)$$

Sustituyendo (4.40) y (4.42) en (4.43), se obtiene

$$b_3 \left(\frac{b_1 k_2}{b_2 k_3}\right)^3 + b_2 \left(\frac{b_1 k_2}{b_2 k_3}\right)^2 + b_1 \left(\frac{b_1 k_2}{b_2 k_3}\right) = \frac{b_1^2 k_2}{b_2 k_3^2} \quad (4.44)$$

$$b_3 \left(\frac{b_1 k_2}{b_2 k_3}\right)^2 + b_2 \left(\frac{b_1 k_2}{b_2 k_3}\right) + b_1 = \frac{b_1}{k_3} \quad (4.45)$$

En la ecuación (4.45), se ha obtenido la tercera ecuación que puede ser utilizada para obtener las raíces de los parámetros k_1, k_2 y k_3 en términos de los coeficientes b_1, b_2 y b_3 . A partir de la ecuación (4.39),

$$k_1 = \frac{k_2^2 b_1 b_3}{k_3 b_2^2} \quad (4.46)$$

Sustituyendo (4.46) en (4.31), se deduce

$$\frac{k_2^2 b_1 b_3}{k_3 b_2^2} + k_2 + k_1 = 1 \quad (4.47)$$

$$k_2^2 + \frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3} k_2 + \frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3} (k_1 - 1) = 0 \quad (4.48)$$

Resolviendo la ecuación (4.48), implica que

$$k_2 = \frac{-\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3} \pm \sqrt{\left(\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4k_3 b_2^2}{b_1 b_3} (k_1 - 1)}}{2} \quad (4.49)$$

Simplificando la expresión (4.45),

$$k_2^2 + k_2 \left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3}\right) + \frac{1}{b_3} \left(b_1 - \frac{b_1}{k_3}\right) \left(\frac{b_2 k_3}{b_1}\right)^2 = 0 \quad (4.50)$$

La solución de esta ecuación, es como se muestra en la siguiente formulación,

$$k_2 = \frac{-\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3} \pm \sqrt{\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4}{b_3} \left(b_1 - \frac{b_1}{k_3}\right) \left(\frac{b_2 k_3}{b_1}\right)^2}}{2} \quad (4.51)$$

Ahora igualando la expresiones (4.49) y (4.51) y deshacer la ecuación resultante para obtener una ecuación cuártica en k_3 .

$$\frac{-\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3} \pm \sqrt{\left(\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4k_3 b_2^2}{b_1 b_3} (k_1 - 1)}}{2} = \frac{-\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3} \pm \sqrt{\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4}{b_3} \left(b_1 - \frac{b_1}{k_3}\right) \left(\frac{b_2 k_3}{b_1}\right)^2}}{2} \quad (4.52)$$

de donde

$$\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3} - \frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 = \left(\pm \sqrt{\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4}{b_3} \left(b_1 - \frac{b_1}{k_3}\right) \left(\frac{b_2 k_3}{b_1}\right)^2} - \pm \sqrt{\left(\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4k_3 b_2^2}{b_1 b_3} (k_1 - 1)}\right)^2 \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3} - \frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 &= \\ &\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4}{b_3} \left(b_1 - \frac{b_1}{k_3}\right) \left(\frac{b_2 k_3}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4k_3 b_2^2}{b_1 b_3} (k_1 - 1) \\ &\pm \sqrt{\left(\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4}{b_3} \left(b_1 - \frac{b_1}{k_3}\right) \left(\frac{b_2 k_3}{b_1}\right)^2\right) \left(\left(\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4k_3 b_2^2}{b_1 b_3} (k_1 - 1)\right)} \end{aligned}$$

de ahí que

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3} - \frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 - \left(\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4}{b_3} \left(b_1 - \frac{b_1}{k_3}\right) \left(\frac{b_2 k_3}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4k_3 b_2^2}{b_1 b_3} (k_1 - 1)\right)\right)^2 \\ &= \left(\left(\frac{b_2^2 k_3}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4}{b_3} \left(b_1 - \frac{b_1}{k_3}\right) \left(\frac{b_2 k_3}{b_1}\right)^2\right) \left(\left(\frac{k_3 b_2^2}{b_1 b_3}\right)^2 - \frac{4k_3 b_2^2}{b_1 b_3} (k_1 - 1)\right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

La ecuación (4.54) es una ecuación cuártica en el parámetro desconocido k_3 y los coeficientes de la ecuación (4.29). La ecuación anterior es algebraicamente determinada. Ahora, de las ecuaciones (4.42) y (4.43):

$$v^5 = \pm\sqrt{-b_0} \pm \frac{b_1}{k_3} \sqrt{\frac{k_2}{b_2}} \quad (4.55)$$

$$u^5 = \pm\sqrt{-b_0} \mp \frac{b_1}{k_3} \sqrt{\frac{k_2}{b_2}} \quad (4.56)$$

De la ecuación (4.55):

$$(uv)^5 = -b_0 - \frac{b_1^2 k_2}{k_3^2 b_2} \quad (4.57)$$

$$y = uv = \sqrt[5]{-b_0 - \frac{b_1^2 k_2}{k_3^2 b_2}} \quad (4.58)$$

4.3. Propiedades de las ecuaciones de quinto grado no resolubles

En este apartado, se muestran distintos resultados desde la perspectiva de la teoría de grupos, que si bien no caracterizan directamente las ecuaciones de quinto grado no resolubles por radicales, si establecen las propiedades de los grupos que no son resolubles.

Teorema 4.5 El grupo alternado $\mathbb{A}_5$ es simple.

Demostración. Si $\mathbb{A}_5$ tuviera un subgrupo normal propio y no trivial H , entonces el orden de H debe ser igual a 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 o 30. Dado que $\mathbb{A}_5$ contiene 24 elementos de orden 5, 20 elementos de orden 3 y ningún elemento de orden 15, entonces

1. Si $|H| = 3, 6, 12$ o 15, se tendría que $|\mathbb{A}_5/H|$ es primo respecto a 3, lo que implicaría que H debe contener los 20 elementos de orden 3, lo cual es una contradicción.
2. Si $|H| = 5, 10$ o 20, entonces $|\mathbb{A}_5/H|$ es primo respecto a 5, lo que implicaría que H debe contener los 24 elementos de orden 5, lo cual también es una contradicción.
3. Si $|H| = 30$, entonces $|\mathbb{A}_5/H|$ es primo respecto a 5 y 3, lo que implicaría que H debe contener los 44 elementos de orden 3 y 5, lo cual nuevamente lleva a una contradicción.

4. Si $|H| = 2$ o $|H| = 4$, entonces $|\mathbb{A}_5/H| = 30$ o 15 , pero los grupos de orden 30 o 15 contienen un elemento de orden 15 que $\mathbb{A}_5$ no tiene, lo que lleva a otra contradicción.

Por lo tanto, se concluye que $\mathbb{A}_5$ es simple, como se deseaba demostrar.

Teorema 4.6 Si $n \geq 5$, entonces S_n no es soluble.

Demostración. Por contradicción, se asumirá que para $n \geq 5$, el grupo S_n es soluble. Dado que todo subgrupo de un grupo soluble también es soluble, se infiere que A_n , el grupo alternado de grado n , también es soluble. Además, dado que A_n es simple para todo $n \neq 4$, y en particular, para $n \geq 5$. Se procede a demostrar que esta suposición conduce a una contradicción.

Si A_n es soluble, entonces existe una serie $\langle e \rangle = G_0 < G_1 < \dots < G_n = A_n$ tal que G_i es un subgrupo normal en G_{i+1} y el cociente G_{i+1}/G_i es un grupo abeliano para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Sin embargo, A_n es un grupo simple, lo que implica que los únicos subgrupos normales de A_n son $\langle e \rangle$ y A_n en sí mismo. Por lo tanto, la serie sugerida sería $\langle e \rangle < A_n$, lo que implica que $A_n/\langle e \rangle = A_n$ es un grupo abeliano.

Esta conclusión resulta en una contradicción, ya que para $n \geq 5$, el grupo alternado A_n no es abeliano. Por lo tanto, se concluye que la suposición inicial es incorrecta, y se demuestra que S_n no es soluble para $n \geq 5$.

Teorema 4.7 Sea F un campo con característica $\text{char}(F) = 0$ y $a \in F$. Supongase que E es el cuerpo de descomposición de $x^n - a$ sobre F . Entonces, el grupo de Galois $\text{Gal}(E/F)$ es soluble.

Demostración. Existen dos casos posibles: o bien F contiene la raíz primitiva n -ésima de la unidad ω , o bien no la contiene.

En el caso en que F contiene la raíz primitiva n -ésima de la unidad, se elige b como una raíz de $f(x) = x^n - a$ en E . Se sabe que las raíces de $f(x)$ son $b, \omega b, \omega^2 b, \dots, \omega^{n-1} b$,

lo cual implica que $E = F(b)$. Dado que E se descompone sobre F , se tiene que $\omega \in F$. Se desea demostrar que $\text{Gal}(E/F)$ es abeliano. Como b es una raíz de $f(x)$, los elementos en $\text{Gal}(E/F)$ llevan b a otra raíz de $f(x)$. Sean $\phi, \tau \in \text{Gal}(E/F)$ arbitrarios. Dado que $\omega \in F$ es constante, se tiene que ϕ, τ fijan ω , y que $\phi(b) = \omega^i b$ y $\tau(b) = \omega^j b$. Se quiere demostrar que $\phi\tau = \tau\phi$. Al calcular $\phi(\tau(b)) = \phi(\omega^j b) = \phi(\omega^j)\phi(b) = \omega^j \omega^i b = \omega^{i+j} b$, y que $\tau(\phi(b)) = \tau(\omega^i b) = \tau(\omega^i)\tau(b) = \omega^i \omega^j b = \omega^{i+j} b = \phi(\tau(b))$, se concluye que $\text{Gal}(E/F)$ es abeliano. Dado que todos los subgrupos de un grupo abeliano son normales, se llega a la conclusión de que $\text{Gal}(E/F)$ es soluble.

En el caso en que F no contiene la raíz primitiva n -ésima de la unidad, ω , se elige b como una raíz de $f(x) = x^n - a$ en E . Si $a = 0$, entonces se tiene que $b = 0$, y se sabe que los automorfismos fijan b , por lo que $\text{Gal}(E/F)$ es abeliano y, por lo tanto, soluble. Si $a \neq 0$, se asume que $b \neq 0$. Dado que b y ωb están en E , se tiene que $\omega b/b = \omega \in E$, lo que implica que $F(\omega) \subset E$, y $F(\omega)$ es el cuerpo de descomposición de $x^n - 1$ sobre F . Sean $\phi, \tau \in \text{Gal}(F(\omega)/F)$, donde $\phi(\omega) = \omega^i$ y $\tau(\omega) = \omega^j$. Se desea demostrar que $\phi\tau = \tau\phi$. Al calcular $\phi(\tau(\omega)) = \phi(\omega^j) = (\phi(\omega))^j = (\omega^i)^j$ y $\tau(\phi(\omega)) = \tau(\omega^i) = (\tau(\omega))^i = (\omega^j)^i = (\omega^i)^j = \phi(\tau(\omega))$, se concluye que $\text{Gal}(F(\omega)/F)$ es abeliano. Dado que E también es el cuerpo de descomposición de $f(x)$ sobre $F(\omega)$, donde $F(\omega)$ contiene ω , la raíz primitiva n -ésima de la unidad, se tiene que $\text{Gal}(E/F(\omega))$ es abeliano. Por tanto, la serie $1 \subseteq \text{Gal}(E/F(\omega)) \subseteq \text{Gal}(E/F)$ es una serie normal. Dado que $\text{Gal}(E/F(\omega))$ y $\text{Gal}(F(\omega)/F)$ son abelianos, donde $\text{Gal}(F(\omega)/F) \cong \text{Gal}(E/F)/\text{Gal}(E/F(\omega))$, son solubles. Por lo tanto, se concluye que $\text{Gal}(E/F)$ es soluble, como se deseaba demostrar.

Una ecuación no resoluble por radicales en sentido general, es la ecuación de Bring-Jerrard, que denota una familia de ecuaciones en dos parámetros de la forma $z^5 + az + b = 0$, con $a, b \in \mathbb{C}$ no simultáneamente 0. Para esto se denotará como $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^5$ al conjunto de soluciones de dicha familia, es decir

$$\mathcal{S} = \left\{ (z_1, \dots, z_5) \in \mathbb{C}^5 \mid z_1, \dots, z_5 \text{ son raíces de } z^5 + az + b = 0 \text{ con } a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Notar que si $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathcal{S}$ son raíces de la ecuación $z^5 + az + b = 0$, entonces:

$$\begin{cases} a = \sigma_4(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) := z_2 z_3 z_4 z_5 + z_1 z_3 z_4 z_5 + z_1 z_2 z_4 z_5 + z_1 z_2 z_3 z_5 \\ \quad + z_1 z_2 z_3 z_4. \\ b = -\sigma_5(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) := -z_1 z_2 z_3 z_4 z_5. \end{cases} \quad (4.59)$$

Proposición 4.3.1 $(z_1, z_2, \dots, z_5) \in \mathcal{S}$ si y sólo si satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 z_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^5 z_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^5 z_i^3 &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. $(z_1, \dots, z_5) \in \mathcal{S}$ si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $\prod_{i=1}^5 (z - z_i) = z^5 + az + b$. Eso significa que el coeficiente de z^4 tiene que ser 0, por lo que

$$\sum_i z_i = 0$$

obteniendo así la primera ecuación. También el coeficiente de z^3 debe anularse, de donde $\sigma_2(z_1, \dots, z_5) := \sum_{i < j} z_i z_j = 0$. De forma que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_i z_i \right)^2 = \sum_i z_i^2 + 2 \sum_{i < j} z_i z_j \text{ si y sólo si} \\ &\sum_i z_i^2 = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, como también el coeficiente de z^2 es 0, entonces $\sigma_3(z_1, \dots, z_5) := \sum_{i < j < k} z_i z_j z_k = 0$. Además, se obtiene una ecuación equivalente:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_i z_i \right)^3 = \sum_i z_i^3 + 3 \left(\sum_i z_i^2 \left(\sum_{j \neq i} z_j \right) \right) + 6 \left(\sum_{i < j < k} z_i z_j z_k \right) \text{ si y sólo si} \\ &\sum_i z_i^3 = 0 \end{aligned}$$

A continuación, se presentan varios lemas, cuya comprobación se realiza considerando el sistema de ecuaciones de la proposición (4.3.1) según el caso. Resolviendo el sistema, se obtiene que sólo tiene solución si todo $z_i = 0$, pero eso significaría que $a = b = 0$, lo cual no puede ser.

Lema 4.1 Una ecuación de la forma $z^5 + az + b = 0$ con a y b no simultáneamente cero, tiene a lo más una raíz de multiplicidad 2.

Lema 4.2 Si 0 es una raíz de una ecuación de la forma $z^5 + az + b = 0$ con a y b no simultáneamente cero, entonces el resto de las raíces son distintas de 0 .

Lema 4.3 No existe ecuación de la forma $z^5 + az + b = 0$ con a y b no simultáneamente cero tal que sus cinco soluciones sean todas reales.

Si todas las soluciones son reales, su cuadrado es positivo, y entonces para satisfacer la ecuación del sistema, es necesario que todas las soluciones sean 0.

4.4. Condiciones que garantizan la no resolubilidad de las ecuaciones de quinto grado por radicales

Teorema 4.8 La ecuación general de grado 5

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0 \quad (4.60)$$

no es resoluble por radicales.

Supongase que existe una solución y_0 de este tipo. El teorema (2.10) muestra que se puede escribir

$$y = p + p_1 R^{1/m} + p_2 R^{2/m} + \cdots + p_{m-1} R^{(m-1)/m} \quad (4.61)$$

Aquí, m es un número primo y $R, p, p_1, p_2, \dots$ tienen la misma forma que y . Se continua de esta forma hasta que estén representados como funciones racionales de a, b, c, d, e . Usando R/p_1^m para reemplazar R , o tomando $p_1 = 1$, la ecuación (4.61) puede escribirse como

$$y = p + R^{1/m} + p_2 R^{2/m} + \cdots + p_{m-1} R^{(m-1)/m} \quad (4.62)$$

Sustituyendo la ecuación (4.62) en la ecuación (4.60), se obtiene

$$q + q_1 R^{1/m} + q_2 R^{2/m} + \cdots + q_{m-1} R^{(m-1)/m} = 0 \quad (4.63)$$

donde, $q, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ son funciones racionales de a, b, c, d, e y $p, q_2, \dots$, así como R . Luego, se demuestra por reducción al absurdo que para satisfacer la ecuación (4.63), debe tenerse

$$q = q_1 = q_2 = \cdots = q_{m-1} = 0 \quad (4.64)$$

Si se toma $z = R^{1/m}$ y se considera la ecuación (4.63), se pueden obtener dos ecuaciones

$$z^m - R = 0 \quad (4.65)$$

$$q + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots + q_{m-1} z^{m-1} = 0 \quad (4.66)$$

Si $q, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ no son iguales a cero simultáneamente, estas ecuaciones deben tener una o más raíces en común. Si el número de raíces es k , se puede encontrar una ecuación de grado k , cuyos parámetros serían funciones racionales de $R, q, q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$. Considérese que la ecuación es

$$r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_k z^k = 0$$

Todas sus raíces serían las mismas que las raíces de la ecuación (4.64). Debido a que la raíz de esta ecuación tiene la forma $\alpha_\mu z$, donde α_μ es una raíz de la ecuación $\alpha_\mu^m - 1 = 0$. A través del reemplazo, se pueden obtener las siguientes k ecuaciones

$$\begin{aligned} r + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots + r_k z^k &= 0 \\ r + \alpha r_1 z + \alpha^2 r_2 z^2 + \cdots + \alpha^k r_k z^k &= 0 \\ \vdots & \\ r + \alpha_{k-1} r_1 z + \alpha_{k-1}^2 r_2 z^2 + \cdots + \alpha_{k-1}^k r_k z^k &= 0 \end{aligned}$$

A partir de estas k ecuaciones, se puede obtener el valor de la función racional z , que se representa por $r, r_1, r_2, \dots, r_k$. Debido a que estas cantidades en sí mismas son

funciones racionales de a, b, c, d, e, R y $p, p_1, p_2, \dots, z$ es una función racional de esas cantidades.

Sin embargo, según la definición $z = R^{1/m}$, z generalmente no puede ser un número racional, lo que causa una contradicción. Para que la ecuación (4.66) sea verdadera, la única solución posible es la (4.64). Luego, tomando $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ para representar las raíces de la ecuación de grado m , α sea la raíz de la ecuación $x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1 = 0$,

$$\begin{aligned} y_1 &= p + R^{1/m} + p_2 R^{2/m} + \dots + p_{m-1} z^{(m-1)/m} \\ y_2 &= p + \alpha R^{1/m} + \alpha^2 p_2 R^{2/m} + \dots + \alpha^{m-1} p_{m-1} z^{(m-1)/m} \\ &\vdots \\ y_m &= p + \alpha^{m-1} R^{1/m} + \alpha^{m-2} p_2 R^{2/m} + \dots + \alpha p_{m-1} z^{(m-1)/m} \end{aligned} \tag{4.67}$$

Basándose en la ecuación (4.67), y considerando la simetría de intercambio entre diferentes soluciones, se afirma que m no podía ser igual o mayor que 5. De esta manera, Abel afirmó que las ecuaciones quinticas no tenían soluciones.

Teorema 4.9 Un polinomio irreducible de grado cinco con coeficientes en los números racionales $\mathbb{Q}$ es soluble por radicales si y solo si su grupo de Galois está contenido en el grupo de Frobenius.

Demostración. Sea P un polinomio irreducible de grado cinco con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Si P es soluble por radicales, entonces su grupo de Galois G es transitivo y un subgrupo soluble de S_5 . Por tanto, G está contenido en el normalizador de un subgrupo de Sylow de orden 5 de S_5 . Por otro lado, un subgrupo de Sylow de orden 5 de S_5 está dado por un ciclo de longitud 5 c . Este ciclo c pertenece al grupo de Frobenius F_{20} de orden 20. Entonces, el grupo de Galois G , cuyo orden es divisible por 5, es conjugado a un subgrupo de F_{20} . Finalmente, se deduce que el grupo de Galois es isomorfo a F_{20} , al grupo diédrico D_{10} de orden 10 o al grupo cíclico $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Por otro lado, supongase que el grupo de Galois de P está contenido en el grupo de Frobenius F_{20} . Se verifica que el subgrupo F_{20} del grupo simétrico S_5 es igual a

$GA(5)$, dado que F_{20} es transitivo y soluble. Por lo tanto, el grupo de Galois de P es soluble como subgrupo del grupo soluble F_{20} . Luego, se deduce que el polinomio P es soluble por radicales.

Teorema 4.10 El polinomio irreducible de grado cinco $f(x) = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s \in \mathbb{Q}[x]$ es soluble por radicales si y solo si el polinomio $f_{20}(x)$ tiene una raíz racional.

Demostración. El polinomio f es soluble por radicales si y solo si su grupo de Galois G está contenido en $\sigma_i F_{20} \sigma_i^{-1}$ para algún $\sigma_i \in E'$. Por otro lado, el grupo de Frobenius F_{20} es el estabilizador de θ_1 , y se demuestra que el estabilizador S_{θ_i} de θ_i es igual a $\sigma_i F_{20} \sigma_i^{-1}$ para todo $1 \leq i \leq 6$. Dado que $G \subseteq \sigma_i F_{20} \sigma_i^{-1}$ para algún i , entonces $\sigma(\theta_i) = \theta_i$ para todo σ en el grupo de Galois G . Por lo tanto, se tiene que $\theta_i \in \mathbb{Q}$, lo cual concluye la demostración.

Teorema 4.11 El polinomio irreducible $f(x) = x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s \in \mathbb{Q}[X]$ es resoluble por radicales si y solo si la ecuación resolvente $R(\theta; f)$ tiene una raíz racional. En este caso, el polinomio resolvente $R(\theta; f)$ factoriza como el producto de un polinomio lineal y un polinomio irreducible de grado 5.

Demostración. Dado que $f(x)$ es resoluble $\iff Gal(f) \subseteq (F_{20})^t$ para $t \in T = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$. Por otro lado, se tiene que $K(\theta_1, \dots, \theta_6) = F$, ya que $F/K(\theta_1, \dots, \theta_6)$ es de Galois y si $g \in S_5$ fija a todos los θ_i se tendría que $g \in \bigcap_i \text{Stab}(\theta_i) = \bigcap_{t \in T} (F_{20})^t = 1$, luego $Gal(F/K(\theta_1, \dots, \theta_6)) = 1$ y se deduce que $F = K(\theta_1, \dots, \theta_6)$, luego evaluando se deduce también que $E = \mathbb{Q}(\theta_1, \dots, \theta_6)$.

Además, si $\sigma = (12345)$, se tiene que

$$\theta_2 \xrightarrow{\sigma} \theta_6 \xrightarrow{\sigma} \theta_3 \xrightarrow{\sigma} \theta_4 \xrightarrow{\sigma} \theta_5 \xrightarrow{\sigma} \theta_2$$

De aquí se deduce $\theta_i \notin \mathbb{Q} = \text{Fix}_E(Gal(f))$ con $2 \leq i \leq 6$ y $R(\theta; f)$ puede tener como máximo una única raíz racional que además no puede ser múltiple. Por tanto en este caso, se sigue que el polinomio $f(x)$ es resoluble $\iff Gal(f)$ que está contenido

en algún conjugado de $F_{20} \iff R(\theta; f)$ tiene una raíz racional. Además, si eso sucede $R(\theta; f) = (x - \theta) \cdot q$ con $q \in \mathbb{Q}[x]$ y $q = \prod_{i=2}^6 (x - \theta_i)$, el cual es irreducible ya que $\text{Gal}(f)$ actúa transitivamente en sus raíces.

Teorema 4.12 Sean a y b números racionales tales que el trinomio quíntico $x^5 + ax + b$ es irreducible. Entonces, la ecuación $x^5 + ax + b = 0$ es soluble por radicales si y solo si existen números racionales $\epsilon (= \pm 1)$, $c (\geq 0)$ y $e (\neq 0)$ tales que

$$a = \frac{5e^4(3 - 4\epsilon c)}{c^2 + 1}, \quad b = \frac{-4e^5(11\epsilon + 2c)}{c^2 + 1}, \quad (4.68)$$

en tal caso, las raíces de $x^5 + ax + b = 0$ son

$$x_j = e \left(\omega^j u_1 + \omega^{2j} u_2 + \omega^{3j} u_3 + \omega^{4j} u_4 \right) \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4), \quad (4.69)$$

donde ω es una raíz primitiva quinta de la unidad, y u_1, u_2, u_3, u_4 son raíces racionales de $u^4 + cu^2 + 1 = 0$.

donde $\omega = \exp(2\pi i/5)$ y

$$u_1 = \left(\frac{v_1^2 v_3}{D^2} \right)^{1/5}, \quad u_2 = \left(\frac{v_3^2 v_4}{D^2} \right)^{1/5}, \quad u_3 = \left(\frac{v_2^2 v_1}{D^2} \right)^{1/5}, \quad u_4 = \left(\frac{v_4^2 v_2}{D^2} \right)^{1/5} \quad (4.70)$$

$$\begin{cases} v_1 = \sqrt{D} + \sqrt{D - \epsilon\sqrt{D}}, & v_2 = -\sqrt{D} - \sqrt{D + \epsilon\sqrt{D}} \\ v_3 = -\sqrt{D} + \sqrt{D + \epsilon\sqrt{D}}, & v_4 = \sqrt{D} - \sqrt{D - \epsilon\sqrt{D}} \end{cases} \quad (4.71)$$

$$D = c^2 + 1 \quad (4.72)$$

Demostración. Se comienza suponiendo que el polinomio quíntico irreducible $x^5 + ax + b$ es soluble por radicales. Por lo tanto, el resolvente sexto de $x^5 + ax + b$, es decir,

$$\begin{aligned} & x^6 + 8ax^5 + 40a^2x^4 + 160a^3x^3 + 400a^4x^2 \\ & + (512a^5 - 3125b^4)x + (256a^6 - 9375ab^4) \end{aligned}$$

tiene una raíz racional r . Por lo tanto, r satisface

$$(r + 2a)^4 (r^2 + 16a^2) - 5^5 b^4 (r + 3a) = 0, \quad (4.73)$$

lo que muestra que $r \neq -2a, -3a$ ya que $a \neq 0$. Sea el número racional no negativo c y el número racional no nulo e de la siguiente manera:

$$\epsilon c = \frac{3r - 16a}{4(r + 3a)}, \quad e = \frac{-5b\epsilon}{2(r + 2a)}, \quad \text{donde } \epsilon = \pm 1. \quad (4.74)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} c^2 + 1 &= \frac{25(r^2 + 16a^2)}{16(r + 3a)^2}, \\ 3 - 4\epsilon c &= \frac{25a}{r + 3a}, \\ 11\epsilon + 2c &= \frac{25(r + 2a)\epsilon}{2(r + 3a)}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{5e^4(3 - 4\epsilon c)}{c^2 + 1} = \frac{5^5 ab^4(r + 3a)}{(r + 2a)^4 (r^2 + 16a^2)} = a$$

y

$$\frac{-4e^5(11\epsilon + 2c)}{c^2 + 1} = \frac{5^5 b^5(r + 3a)}{(r + 2a)^4 (r^2 + 16a^2)} = b,$$

lo que proporciona la parametrización requerida. Ahora se muestra que el trinomio quíntico irreducible

$$x^5 + \frac{5e^4(3 - 4\epsilon c)}{c^2 + 1}x - \frac{4e^5(11\epsilon + 2c)}{c^2 + 1} \quad (4.75)$$

con $e = 1$ es soluble por radicales. De hecho, no es necesario asumir que el quíntico es irreducible. Para e general, la transformación $x \rightarrow ex$ da el resultado requerido. A partir de (4.71), se nota que

$$\begin{cases} v_1 + v_4 = 2\sqrt{D}, & v_2 + v_3 = -2\sqrt{D} \\ v_1 v_4 = \epsilon\sqrt{D}, & v_2 v_3 = -\epsilon\sqrt{D} \end{cases} \quad (4.76)$$

y por lo tanto

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \\ v_1 v_4 + v_2 v_3 = 0 \end{cases} \quad (4.77)$$

Además, a partir de (4.70), se obtiene

$$u_1^5 = \frac{v_1^2 v_3}{D^2}, \quad u_2^5 = \frac{v_3^2 v_4}{D^2}, \quad u_3^5 = \frac{v_2^2 v_1}{D^2}, \quad u_4^5 = \frac{v_4^2 v_2}{D^2} \quad (4.78)$$

Combinando las expresiones (4.76) y (4.78) resulta que

$$u_1 u_4 = -\frac{\epsilon}{\sqrt{D}}, \quad u_2 u_3 = \frac{\epsilon}{\sqrt{D}}, \quad (4.79)$$

$$u_1 u_2^2 = \frac{v_3}{D}, \quad u_3^2 u_4 = \frac{v_2}{D}, \quad u_1^2 u_3 = \frac{v_1}{D}, \quad u_4^2 u_2 = \frac{v_4}{D} \quad (4.80)$$

y

$$\begin{aligned} u_1^3 u_2 &= \frac{\epsilon v_1 v_3}{D\sqrt{D}}, & u_2^3 u_4 &= -\frac{\epsilon v_3 v_4}{D\sqrt{D}}, \\ u_3^3 u_1 &= -\frac{\epsilon v_1 v_2}{D\sqrt{D}}, & u_4^3 u_3 &= \frac{\epsilon v_2 v_4}{D\sqrt{D}} \end{aligned} \quad (4.81)$$

que dan las ecuaciones requeridas en vista de la expresión (4.77). A partir de (4.71), (4.78), (4.79), (4.80) y (4.81), se deduce que

$$\begin{aligned} &5 \left(u_1^2 u_4^2 + u_2^2 u_3^2 - u_1^3 u_2 - u_2^3 u_4 - u_3^3 u_1 - u_4^3 u_3 - u_1 u_2 u_3 u_4 \right) \\ &= \frac{5(3 - 4\epsilon\sqrt{D-1})}{D} = \frac{5(3 - 4\epsilon c)}{c^2 + 1} \end{aligned} \quad (4.82)$$

y

$$\begin{aligned} &5 \left(\left(u_1^3 u_3 u_4 + u_2^3 u_1 u_3 + u_3^3 u_2 u_4 + u_4^3 u_1 u_2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(u_1 u_3^2 u_4^2 + u_2 u_1^2 u_3^2 + u_3 u_2^2 u_4^2 + u_4 u_1^2 u_2^2 \right) \right) \\ &\quad - \left(u_1^5 + u_2^5 + u_3^5 + u_4^5 \right) = -\frac{(44\epsilon + 8\sqrt{D-1})}{D} = -\frac{4(11\epsilon + 2c)}{c^2 + 1}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

que son las ecuaciones requeridas. Esto demuestra que

$$x^5 + \frac{5(3 - 4\epsilon c)}{c^2 + 1}x - \frac{4(11\epsilon + 2c)}{c^2 + 1}$$

es soluble por radicales y tiene las raíces dadas.

El discriminante del trinomio quíntico $x^5 + ax + b$ es $4^4a^5 + 5^5b^4$. La ecuación $x^5 + ax + b = 0$ tiene exactamente una raíz real si $4^4a^5 + 5^5b^4 > 0$. El discriminante del quíntico es

$$\frac{4^4 5^5 e^{20}}{D^5} \left(4\epsilon c^3 - 84c^2 - 37\epsilon c - 122 \right)^2 > 0$$

lo que implica que el quíntico tiene exactamente una raíz real. Suponga ahora que es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Dado que es soluble por radicales, por lo tanto su grupo de Galois es soluble. Por lo tanto, su grupo de Galois es isomorfo al grupo de Frobenius F_{20} de orden 20, al grupo diedral D_5 de orden 10, o al grupo cíclico de orden 5. Sin embargo, tiene raíces complejas, por lo que su grupo de Galois no puede ser cíclico de orden 5. Dado que el grupo de Galois de esta ecuación es el grupo diedral D_5 de orden 10 si y solo si $5D$ es un cuadrado perfecto en $\mathbb{Q}$. De lo contrario, el grupo de Galois es el grupo de Frobenius F_{20} de orden 20.

Corolario 4.4.1 $X^5 - 4X + 2$ no es soluble por radicales.

Prueba.. Basta con mostrar que el grupo de Galois de $\mathbb{Q}(Q)/\mathbb{Q}$ no es soluble, donde $Q = X^5 - 4X + 2$.

1. Basta con demostrar que Q es irreducible y tiene exactamente dos raíces no reales. La irreducibilidad se sigue directamente del criterio de Eisenstein. Q tiene al menos tres raíces reales en $\overline{\mathbb{Q}}$ porque hay al menos tres cambios de signo: $Q(-2)Q(-1) < 0$, $Q(-1)Q(1) < 0$ y $Q(1)Q(2) < 0$. Finalmente, como la derivada $Q' = 5X^4 - 4$ tiene exactamente dos raíces reales $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}}\right)$, esto implica que Q tiene a lo sumo tres raíces reales, por lo tanto exactamente tres.
2. Para demostrar que $\mathfrak{S}_5$ no es soluble, basta con mostrar que su subgrupo normal $\mathfrak{A}_5$ tampoco es soluble. Por tanto, se llega a una contradicción con el hecho de que $\mathfrak{A}_5$ es simple y de orden $5 \times 4 \times 3$, y un grupo simple soluble debe tener orden primo.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de las ecuaciones de quinto grado resolubles y no resolubles, resaltando los resultados más relevantes de acuerdo a los objetivos planteados en esta investigación. Además, se establecen las conclusiones y algunas líneas futuras que se pueden generar a partir de las mismas.

5.2. Análisis de los resultados

En los resultados presentados con respecto al objetivo 1 de esta investigación, se muestran algunas condiciones específicas para que una ecuación de quinto grado sea resoluble por radicales. La demostración se basa en la sustitución de las expresiones de los coeficientes en la ecuación general de quinto grado, se realizan operaciones algebraicas para reorganizar la ecuación en una forma más manejable y luego se extraen factores comunes. Al final, se llega a una expresión más simple que demuestra que la ecuación puede ser resuelta por radicales.

Además, se presentan otros dos teoremas sobre la resolubilidad de ecuaciones de quinto grado con condiciones específicas. Uno de ellos involucra ecuaciones de la forma $x^5 - a = 0$, y el otro se aplica a ecuaciones de la forma $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, mostrando transformaciones que permiten reducir una ecuación general de quinto grado a una forma más simple, eliminando el término de grado cuatro.

Con relación al objetivo 2, se presentaron algunas propiedades de las ecuaciones de quinto grado no resolubles desde la perspectiva de la teoría de grupos. El primer teorema y su demostración prueban que el grupo alternado A_5 es simple. Para ello, se utiliza un argumento por contradicción que examina los posibles órdenes de un subgrupo hipotético H y concluye que, en cada caso, tal subgrupo conduciría a una contradicción. De ahí se deduce que A_5 no puede tener un subgrupo normal propio y

no trivial, y por lo tanto, es simple. El segundo teorema y su demostración afirman que, para $n \geq 5$, el grupo simétrico S_n no es soluble, siendo el argumento también por contradicción.

Además, se establece que el grupo de Galois $\text{Gal}(E/F)$ es soluble para un campo F con característica 0 y un elemento $a \in F$, si E es el cuerpo de descomposición de $x^n - a$ sobre F , probándose esto para dos casos, que F contenga o no la raíz primitiva n -ésima de la unidad ω . Adicionalmente, un conjunto de raíces $z_1, z_2, \dots, z_5$ pertenece a las soluciones de la ecuación de Bring-Jerrard $z^5 + az + b = 0$ si y solo si satisfacen un sistema de ecuaciones que suman 0 en las primeras potencias de z hasta el cubo.

En relación al objetivo 3, se presenta un teorema que establece las condiciones bajo las cuales las ecuaciones de quinto grado no pueden resolverse por radicales. Se presenta la ecuación general de grado 5 y se supone que existe una solución de este tipo. Luego, se muestra cómo se puede representar la solución en términos de raíces racionales y se llega a la conclusión de que para satisfacer la ecuación resultante, todas las funciones racionales deben ser iguales a cero simultáneamente. A partir de esto, se llega a una contradicción y se demuestra que las ecuaciones quinticas no tienen soluciones en términos de radicales. Este resultado muestra una limitación fundamental en la resolución de ecuaciones de quinto grado.

Además, se presenta se establece una relación entre el grupo de Galois del polinomio y el grupo de Frobenius. Si el grupo de Galois está contenido en el grupo de Frobenius, entonces el polinomio es soluble por radicales. Luego, se demuestra que si el grupo de Galois está contenido en el grupo de Frobenius, el polinomio resolvente asociado debe tener una raíz racional. La demostración se basa en propiedades de las raíces y el grupo de Galois, lo que lleva a la conclusión de que si la ecuación resolvente tiene una raíz racional, entonces el polinomio original es soluble por radicales. Se muestra cómo ciertas ecuaciones de quinto grado no pueden resolverse mediante radicales y cómo se puede determinar la resolubilidad de otros polinomios quinticos

mediante el análisis del grupo de Galois.

5.3. Conclusiones

En correspondencia con los objetivos planteados en esta investigación, a continuación se plantean las conclusiones más importantes que se derivan de la presentación y análisis de los resultados:

1. Una ecuación de quinto grado puede ser resuelta por radicales bajo condiciones y relaciones específicas entre los coeficientes de la misma, las cuales también pueden ser transformadas en una forma más simple para su resolución. Asimismo, se estableció que si el grupo de Galois de un polinomio está contenido en el grupo de Frobenius, dicho polinomio es soluble por radicales, lo que proporciona un criterio adicional para delimitar la resolubilidad de las ecuaciones de quinto grado.
2. A través de la investigación, se demostró la relevancia de la teoría de grupos en el análisis de ecuaciones quinticas no resolubles. Se presentó la propiedad de que el grupo alternado A_5 es simple y que para $n \geq 5$, el grupo simétrico S_n no es soluble. Además, se exploraron ciertas propiedades relacionadas con la ecuación de Bring-Jerrard, las cuales están inherentemente vinculadas con las ecuaciones de quinto grado no resolubles.
3. Se demostró que bajo ciertas condiciones, las ecuaciones de quinto grado no pueden ser resueltas por radicales. Esta demostración se basó en una contradicción que surge cuando se supone que una solución en términos de raíces racionales puede satisfacer la ecuación de quinto grado. Además, se estableció una relación entre el grupo de Galois del polinomio y el grupo de Frobenius, demostrando que si el grupo de Galois no está contenido en el grupo de Frobenius, entonces la ecuación no es resoluble por radicales.

En respuesta a la pregunta general de investigación, el estudio sobre las ecuaciones de quinto grado indicó que bajo ciertas condiciones, algunas de ellas pueden

resolverse por radicales, mientras que otras son intrínsecamente no resolubles de esta manera. Se destacó la relevancia de la teoría de grupos en el análisis de las ecuaciones no resolubles, y se estableció un criterio adicional basado en el grupo de Galois y el grupo de Frobenius para determinar la resolubilidad.

5.4. Líneas futuras de investigación

Dados los resultados planteados en esta investigación, a continuación se plantean posibles líneas de investigación que permitirán seguir profundizando en el estudio de las ecuaciones de quinto grado no resolubles por radicales:

1. Aplicación de la lógica matemática y los sistemas formales en el análisis de la resolubilidad de las ecuaciones quinticas.
2. Evaluación de las ecuaciones de quinto grado no resolubles en la formación de fractales y patrones complejos.
3. Análisis de las soluciones numéricas de las ecuaciones de quinto grado no resolubles.
4. Estudio de la conexión entre las ecuaciones de quinto grado no resolubles y la teoría de cuerdas.
5. Desarrollo de algoritmos para identificar si una ecuación de quinto grado es o no resoluble por radicales.

Referencias

- Artin, M. (2011). Algebra (Segunda edición). Pearson Education.
- Brown, J. (2005). Abel and the insolvability of the quintic. Mathematic subject Classification. Primary 01A55.
- Calavia, I. G. (2019). Caracterización Clásica de los Grupos Finitos Resolubles. Tesis doctoral, Universidad Zaragoza.
- Cox, D., Little, J., & O'Shea, D. (2007). Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Springer.
- Creswell, J., & Poth, C. (2018). Diseño de investigación cualitativa y metodología de estudio de casos. Editorial Ediciones UC.
- Cvetkovic-Vega, A., Maguiña, J. L., Soto, A., Lama-Valdivia, J., & López, L. E. C. (2021). Estudios transversales. Revista de la Facultad de Medicina Humana, 21(1), 179-185.
- Dubreil, P. (2021). Teoría de grupos. Barcelona. Editorial Reverte.
- Espinoza, E. (2020). La investigación formativa. Una reflexión teórica. Conrado, 16(74), 45-53.
- Garrido, J. (2009). Álgebra Lineal. Pearson Educación.
- George, E. I. (2000). The variable selection problem. Journal of the American Statistical Association, 95(452), 1304-1308.
- González, L., & López, J. M. (2004). Cúbica y cuártica: Métodos de Tartaglia y Ferrari, Teoremas de Sturm y Hua. Boletín (Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas), (66), 51-62.
- Granados, A. L. (2020). Resolvente Del Polinomio De Quinto Grado. Universidad Simón Bolívar, Venezuela.
- Grinberg, E. (2020). A self-contained proof of the fundamental theorem of algebra. American Mathematical Monthly, 127(1), 44-55.

- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2018). Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Ivorra, C. (2011). Las fórmulas de Cardano-Ferrari. <http://www.uv.es/ivorra/Libros/Ecuaciones.pdf>, 17.
- Jiménez P., A. (2020). Elementos algebraicos y ecuaciones polinomiales de grado pequeño. *Riull*, 16(74), 45-53.
- Katz, V., & Parshall, K. H. (2014). Taming the unknown: A history of algebra from antiquity to the early twentieth century. Princeton University Press.
- Martínez, C. (2022). Resolubilidad por radicales de algunos polinomios de grado cinco. Universidad de Zaragoza.
- Martínez, P. (2018). Metodología de la investigación: Guía para una comprensión holística de la ciencia. Editorial Académica Española.
- Mei, X. (2020). Una nueva comprensión del problema de que la ecuación quintica no tiene soluciones radicales. *Avances en Matemáticas Puras*, 10(09), 508.
- Miller, A. (1990). Subset Selection in Regression. Chapman and Hall.
- Muñoz, J. M. S. (2011). Abel y la imposibilidad de resolver la "quintica" por radicales. *Pensamiento Matemático*, (1), 8.
- Noor, M. A., & Mohyud-Din, S. T. (2009). A new approach to fifth-order boundary value problems. *International Journal of Nonlinear Science*, 7(2), 143-148.
- Otazo, H. C. (2014). Representaciones de grupos simétricos. *Reportes Científicos de la FACEN*, 5(2), 39-46.
- Portuondo, D. (2017). La ciclotomía de Gauss. Trabajo de fin de grado. Universidad Autónoma de Madrid Departamento de Matemáticas.
- Rodríguez, N., López, P., & Villanueva, E. (2021). Teoría de Galois. <https://www.usc.es/regaca/apuntes/Galois.pdf>
- Rodríguez, Y., & Franco, Á. Y. (2019). Paolo Ruffini y la Solubilidad de la Ecuación de Quinto Grado. *Visión Antataura*, 3(1), 57-78.
- Rothman, T. (1982). Genius and biographers: The fictionalization of Evariste Galois. *The American Mathematical Monthly*, 89, 84-106.

- Simon, D. (2005). Quadratic equations in dimensions 4, 5 and more (pre-print). Université de Caen – France.
- Sorensen, H. K. (1999). Niels Henrik Abel and the theory of equations. History of Science Department University of Aarhus.
- Sosaya S., S. W. (2015). Aspectos geométricos de la irresolubilidad de una ecuación algebraica de grado cinco. Pontificia Universidad Católica Del Perú.
- Tang, J. E. (2012) Several Quintic Equations Which Can Be Solved by Root's Forms. Advanced Mathematics Research, 15, 58-61.
- Toth, G. (2002). The Icosahedron and the Unsolvable Quintic. En Glimpses of Algebra and Geometry (pp. 345-379).
- Vanderwaerden, B. L. (2013). A history of algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether. Springer-Verlag.
- Zaia, A. C. (2018). Algebra: Apunte teórico. Unidad Temática N° 2: Estructuras Algebraicas. Espacios vectoriales.

ANEXOS.

Anexo I. Presupuesto.

Este apartado contempla un resumen de los recursos económicos invertidos en el proceso de realización de esta tesis.

Descripción	Monto
Transporte y viáticos	4,000.00
Impresión	8,500.00
Encuadernado y empastado	2,500.00
Fotocopias	750.00
Materiales e insumos	3,500.00
Imprevistos	3,000.00
Total	22,250.00

Anexo II. Cronograma de trabajo de la investigación.

En este apartado se describen las diferentes etapas del proceso de elaboración de esta investigación y sus respectivas fechas de ejecución.

Descripción.	Periodos de ejecución.
Solicitud de título.	Abril, 2023.
Aprobación del título.	Mayo, 2023.
Elaboración y entrega del anteproyecto.	Mayo-junio, 2023.
Evaluación del Anteproyecto.	Junio, 2023.
Elaboración de capítulo IV y V.	Junio-julio, 2023.
Entrega de proyecto completo a la Facultad.	Agosto, 2023.
Graduación.	Octubre, 2023.