

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Tesis para Optar por el Título de Maestría en Matemáticas

TÍTULO

**ANÁLISIS DEL MÉTODO DE DISCOS Y ARANDELAS PARA CALCULAR
VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN.**

SUSTENTANTE

Maribel Núñez Núñez.

ASESOR

Dr. VÍCTOR JOSÉ GALÁN CÉSPEDES.

Cotuí, Prov. Sánchez Ramírez,

2023-2024

TÍTULO

ANÁLISIS DEL MÉTODO DE DISCOS Y ARANDELAS PARA CALCULAR
VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Declaración de Autoría

Los conceptos expuestos en el presente trabajo de investigación, son de exclusiva responsabilidad del sustentante de dicho trabajo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo se requiere de su autorización.

Maribel Núñez Núñez

TÍTULO

ANÁLISIS DEL MÉTODO DE DISCOS Y ARANDELAS PARA CALCULAR VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Tesis presentada por la maestrante Maribel Núñez Núñez para la obtención del grado de Magister en Matemáticas.

28 de Diciembre de 2023

Composición del tribunal evaluador

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Metodología

MA. José Miguel Gómez

Contenidos

MA. Ángela Merejo

Redacción

Índice general

Declaración de Autoría	III
Agradecimientos	VIII
Dedicatorias	IX
RESUMEN	XI
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes.	2
1.2.1 Antecedentes históricos	2
1.2.2 Antecedentes académicos.	3
1.3 Planteamiento del problema.	4
1.4 Objetivos	6
1.4.1 Objetivo general	6
1.4.2 Objetivos específicos.	6
1.5 Justificación	6
1.6 Delimitación del tema.	7
2 MARCO REFERENCIAL	8
2.1 Introducción.	8
2.2 Marco teórico	8
2.2.1 Cálculo integral.	8
2.2.1.1 Función	8
2.2.1.2 Integral	9
2.2.1.3 Sumatoria de Riemann	10
2.2.1.4 Integral definida	10
2.2.2 Sólido de revolución	10
2.2.2.1 Cono	11
2.2.2.2 Cilindro	12
2.2.2.3 Esfera	13
2.2.2.4 Toro	14

2.2.2.5	Hiperboloide	15
2.2.3	Volumen de un sólido de revolución	15
2.2.4	Métodos para calcular volúmenes de sólidos de revolución . . .	16
2.2.4.1	Método de los discos	16
2.2.4.2	Método de las arandelas	18
2.2.4.3	Método de las capas	18
3	METODOLOGÍA	20
3.1	Introducción.	20
3.2	Diseño de investigación	20
3.3	Tipo de investigación	20
3.4	Enfoque de la investigación	21
3.5	Método de la investigación	21
3.6	Procedimientos	21
4	PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	23
4.1	Introducción.	23
4.2	Relación entre la cantidad de discos o arandelas utilizados y la precisión del cálculo del volumen.	23
4.2.1	Método de discos	26
4.2.2	Método de arandelas	27
4.3	Ventajas y desventajas que tienen los métodos de discos y de arandelas para obtener volúmenes a sólidos de revolución.	29
4.3.1	Ventajas del método de discos	29
4.3.1.1	Desventajas del método de discos	29
4.3.1.2	Ventajas del método de arandelas	29
4.3.1.3	Desventajas del método de arandelas	29
4.4	La herramienta computacional GeoGebra para implementar el método de discos y arandelas en la eficiencia del cálculo automático de volúmenes.	30
4.5	Formas que presentan desafíos particulares para los métodos.	33

5 CONCLUSIONES	35
5.1 Introducción.	35
5.1.1 conclusiones.	35
5.2 Líneas futuras de investigación	36
BIBLIOGRAFÍA	38
ANEXOS	41
Anexo A: Recursos	42
Anexo B: Presupuesto	42

Índice de figuras

2.1 Sólido de revolución Cono.	11
2.2 Sólido de revolución Cilindro.	12
2.3 Sólido de revolución Esfera.	13
2.4 Sólido de revolución Toro.	15
2.5 Sólido de revolución Hiperboloide.	15
2.6 Volumen del disco.	17
2.7 Método de los discos.	17
2.8 Método de las arandelas.	18
2.9 Método de capas cilíndricas.	19
4.1 Secuencia normal de particiones.	25
4.2 Bosquejo del método de discos.	26
4.3 Bosquejo del métodos de Arandela.	28
4.4 Construcción gráfica del método de disco.	30
4.5 Valor de las sumas de Riemann y sólido.	31
4.6 Volumen S , V y valor exacto.	32

4.7	Construcción del método de arandelas.	32
4.8	Volumen de S_a y V_a	32
4.9	Sólido de revolución esferoide con intersección central.	33
4.10	Sólido de revolución, toroide	33
4.11	Sólido de revolución, paraboloides.	34

Índice de tablas

5.1	Recursos	42
5.2	Presupuesto	42

Agradecimientos

A Dios:

Agradezco por brindarme la posibilidad de convertir mis sueños en realidad, por la ocasión de alcanzar las metas que me he propuesto y por recibir la fortaleza necesaria para perseverar y lograr mis objetivos.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO):

Agradezco sinceramente por permitirme acceder a este ilustre centro de enseñanza y por otorgarme la ocasión de perfeccionarme, ampliando de manera constructiva y significativa mi acervo de conocimientos.

A mi asesor:

Dr. Victor José Galán. por su sabio liderazgo y la entrega total de su persona, lo cual ha sido fundamental para asegurar la eficiencia y excelencia en la ejecución de esta investigación.

Al coordinador:

Efraín Martínez Gabino y posteriormente a Arismendy Batista. Por su apoyo y entrega en todo el transcurso de esta maestría.

A los profesores:

Por la constante manifestación de su afecto, respaldo y deferencia. Su disposición inquebrantable para colaborar en mi desarrollo académico y en la ampliación de mis conocimientos, la cual no solo enriquece mi formación, sino que también contribuye significativamente a mi capacidad de aportar más a la sociedad en general, especialmente a aquellos que están inmersos en el proceso de aprendizaje.

Al Ministerio De Educación Superior Ciencia y Tecnología (MESCYT):

Por brindarme esta magnífica oportunidad de seguir creciendo y superándome en la vida.

Dedicatorias

A Dios:

Elevo mi gratitud hacia ti, fuente de sabiduría y guía constante. Tú has sido mi faro en cada desafío académico, mi fortaleza en las horas de estudio y mi inspiración para superar obstáculos. Cada logro es un reflejo de tu gracia y misericordia, y cada lección aprendida es una manifestación de tu divina sabiduría.

A mi padre: Ángel Núñez.

Porque aunque no estés aquí conmigo sé que me cuidas y me proteges, y si estuvieras me apoyarías siempre.

A mi madre: Dionicia Nuñez Gerardo.

En este viaje académico, cada logro lleva impreso tu amor, sacrificio y dedicación. Eres mi fuente de inspiración constante, el faro que ilumina mi camino en los días difíciles y la razón por la cual cada esfuerzo vale la pena. Tu inquebrantable apoyo me impulsa a alcanzar nuevas alturas. Agradezco infinitamente por tu paciencia, aliento y la fe inquebrantable que depositas en mí. Este logro no es solo mío, sino también tuyo. Gracias por ser mi guía, mi inspiración y, sobre todo, por ser la increíble madre que eres.

A mis hermanos: Ramón Antonio Núñez, Yajaria Núñez, Angélica Núñez, Miguel Ángel Núñez y Antonio Núñez.

Por apoyarme siempre, y estar ahí cuando más los necesito, porque en el tejido de la vida, ustedes son los hilos que han entrelazado mi historia con amor, complicidad y apoyo incondicional.

A mi novio: Frank Leandro De Jesús E.

Por servirme de sustento y siempre estar ahí apoyándome en todo, porque en mis momentos más difíciles, valoro profundamente tu presencia, ya que no solo eres mi pareja, sino también mi colega y amigo. Tu apoyo constante y preocupación por mi bienestar, independientemente de las circunstancias, ha sido reconfortante. Aprecio sinceramente toda la ayuda que me has brindado, tanto emocional como práctica, haciendo que todo el recorrido sea más ameno.

A mis Profesores:

A todos los profesores que han sido parte fundamental de mi formación profesional.

A mis compañeros de maestría:

A aquellos que, de manera fortuita, coincidimos en las aulas, pero que, por elección consciente, hemos tejido un lazo que va más allá de las clases, convirtiéndonos en una estrecha familia de amantes de las matemáticas. En especial Yulenny Santos, Carola Gómez, Yeraldy Reinoso y Carla Merejo.

Ministerio De Educación Superior Ciencia y Tecnología (MESCYT):

por ser el generoso mecenas que respaldó mi posgrado, por confiar en mi capacidad y permitirme continuar mis estudios en mi campo de interés. Su constante preocupación por mi bienestar en la universidad y todas las innumerables contribuciones de esta institución en mi vida son invaluables

A la universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO):

Por brindarme la oportunidad de realizar mi sueño y por permitirme conocer personas que admiro mucho.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Facultad de Postgrado y Educación Continuada



MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

Análisis del método de discos y arandelas para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

Maribel Núñez Núñez

Sustentante

Dr. Victor José Galán Céspedes

Asesor

RESUMEN

La investigación subraya la relevancia del cálculo integral en la determinación precisa de volúmenes de sólidos de revolución, destacando métodos como el de arandelas y discos. La investigación, de naturaleza inductivo-deductiva, busca ampliar la comprensión de estos métodos matemáticos para su aplicación en la obtención de volúmenes a sólidos de revolución. Además el tipo de investigación se despliega a través de la exploración documental, con un enfoque cualitativo y un diseño no experimental.

Dentro los principales resultados de esta investigación se determina que la utilización de una cantidad infinita de elementos demuestra la eficacia de estas herramientas para lograr aproximaciones volumétricas cada vez más precisas. Se aborda la distinción entre el método de discos y el de arandelas, señalando sus diferencias fundamentales en términos de flexibilidad y capacidad para manejar formas comple-

jas. GeoGebra, como herramienta, se destaca por ofrecer representaciones dinámicas que optimizan el tiempo y revelan comportamientos difíciles de capturar con métodos tradicionales, mejorando la precisión de las aproximaciones volumétricas. La elección entre los métodos de discos y arandelas se sugiere depender de la forma específica del sólido, resaltando la conveniencia del primero para formas cilíndricas simples y del segundo para formas más complejas.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción.

En la rama del análisis matemático, una parte esencial es el calculo integral, que se centra en el estudio de procesos de acumulación y cambio. A través de este campo de las matemáticas, podemos abordar cuestiones relacionadas con áreas, volúmenes, velocidades, tasas de cambio y muchas otras aplicaciones en la ciencia y la ingeniería.

Esta disciplina se desarrolló principalmente como una respuesta a interrogantes que surgieron en el calculo diferencial. El calculo integral permite resolver o encontrar la acumulación total o la suma acumulada de pequeños cambios a lo largo de un intervalo continuo. Su notación y técnicas, como las integrales definidas e indefinidas, se han convertido en herramientas esenciales para modelar y resolver problemas en una amplia gama de campos científicos y tecnológicos.

En este primer capítulo se presentaron los aspectos introductorios concernientes a este trabajo de investigación; se describirán: los antecedentes históricos y académicos, el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos y la delimitación del tema.

1.2 Antecedentes.

1.2.1 Antecedentes históricos

Los griegos dieron un impulso al desarrollo del cálculo al utilizar ideas que fueron retomadas por los creadores del cálculo diferencial e integral. Demócrito (siglo V a.C.) calculó el volumen de pirámides y conos, considerándolos que estaban formados por un número infinito de secciones de grosor infinitamente pequeñas (indivisibles). (Garzón et al, 2013).

Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) creó el método de exhaustión, antecedente del cálculo integral para calcular áreas y volúmenes, al postular que “toda magnitud finita puede ser agotada mediante la resta de una cantidad determinada”. Con este método él logró demostrar que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura. Además demostró que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura (Katz, 2009).

Arquímedes (287-212 A.c.), considerado el precursor del cálculo integral, hizo una de las más significativas contribuciones griegas. Arquímedes utilizó el método de Eudoxo (de exhaustión) para el cálculo de áreas y volúmenes. Por supuesto, es un ejemplo temprano de integración, el cual condujo a aproximar valores de π . Entre otras “integrales” calculadas por Arquímedes, están el volumen y área de una esfera, volumen y área de un cono, área de una elipse, volumen de cualquier segmento de un paraboloides de revolución y de un segmento de un hiperboloides de revolución. (Villalba, 2002)

Johannes Kepler (1571-1630). Nació en Leonberg, Sacro Imperio Romano, hoy Alemania. En su trabajo sobre el movimiento planetario, tuvo que encontrar el área de sectores de una elipse; para ello su método consistió en determinar las áreas como

sumas de líneas. En cambio, en su trabajo Nueva Geometría Sólida de los Barriles de Vino calculó en forma exacta o aproximada el volumen de más de 90 sólidos de revolución, considerando el sólido compuesto de infinitos cuerpos infinitesimales de volúmenes conocidos. (Villalba, 2002)

Para determinar con precisión el volumen de un barril de vino, Kepler pensó en el vino en un barril lleno, o en cualquier cuerpo sólido, como formado por numerosas láminas delgadas dispuestas en capas, y trató el volumen como la suma de los volúmenes de estas hojas. En el caso de un barril de vino, cada una de estas hojas era un cilindro. (Klein, 2004).

1.2.2 Antecedentes académicos.

Alwis, Tilak. (2022), en su artículo “Volumes of Solids of Revolution via Summation Methods”, se propuso calcular volúmenes de ciertos sólidos de revolución sin usar Integración, y concluyó lo siguiente:

En este artículo, mostramos cómo calcular los volúmenes de ciertos sólidos de revolución utilizando un método de suma. El método tradicional calcula directamente éstos volúmenes mediante ciertas integrales definidas, basadas en el método de discos o el método de carcasa y, en general, es mas rápido que el método propuesto.

Vergara Ibarra, J. L. (2022), en su artículo “Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra”, se propuso aplicar los métodos de discos, arandelas y capas para calcular el volumen de sólidos de revolución con el programa GeoGebra, y concluyó lo siguiente:

Mediante la variación en aumento de la cantidad de las formas geométricas como son los rectángulos, discos, anillos y capas cilíndricas se puede analizar y comprender de manera intuitiva la idea de límite como el área bajo la curva o volumen de un sólido.

El valor del volumen por medio de las sumas de Riemann es obtenido a la vez que se suman las formas geométricas que modelan el sólido; esto permite pensar y entender la aplicación de las sumas de Riemann en dos y tres dimensiones.

M Widiari et al (2019), en su artículo "Computer vision system in measurement of the volume and mass of egg using the disc method", se propusieron calcular el volumen y masa de un huevo utilizando un sistema de visión de computadora y el método de discos, y concluyeron lo siguiente:

El método propuesto se ha utilizado en 50 muestras de huevos desde 9 ángulos diferentes (0° , 35° , 45° , 60° , 90° , 120° , 135° , 150° , 180°). según los resultados de los experimentos, en el método propuesto midió con éxito el volumen y la masa de los huevos de forma rápida, exacta, precisa y sin dañar el huevo.

1.3 Planteamiento del problema.

A través de la historia, el interés humano por la determinación del volumen de distintos cuerpos geométricos ha sido motivado por su amplia aplicabilidad en campos tan diversos como la ingeniería, la manufactura e incluso la medicina, donde la medición de líquidos, aire procesado y otros elementos es fundamental. No obstante, el cálculo de dichos volúmenes se torna una tarea desafiante para muchos, debido a la complejidad inherente de ciertos sólidos, especialmente en aquellos de revolución.

La problemática radica en que algunos cuerpos sólidos de forma redonda presentan secciones transversales no uniformes, lo cual dificulta su medición mediante los enfoques tradicionales de la geometría elemental. Por consiguiente, surge la necesidad imperiosa de explorar alternativas y métodos que permitan aproximar o calcular con precisión los volúmenes asociados a estas estructuras.

Entre los métodos más populares y útiles para lograr resultados casi precisos se encuentran el método de los discos y el de las arandelas o anillos. Sin embargo, estos métodos se enfrentan a limitaciones específicas, lo que subraya la importancia de analizarlos, profundizar en su comprensión y, en algunos casos, descartar su aplicabilidad en escenarios particulares. Esta exclusividad o singularidad de los métodos implica un análisis detallado y crítico para comprender su alcance y sus limitaciones en la aproximación de volúmenes en cuerpos de formas complejas, destacando así la necesidad de estrategias más avanzadas en el ámbito del cálculo integral y la geometría para abordar estas dificultades de manera más eficiente y precisa.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente se emiten las siguientes preguntas de investigación:

General:

¿Cómo pueden ser utilizado los métodos de discos y arandelas para calcular volúmenes a sólidos de revolución?

Específicas:

¿Cuál es la relación entre la cantidad de discos o arandelas utilizados y la precisión del cálculo de volumen?

¿Cuáles ventajas y desventajas tiene el método de discos y arandelas para obtener volúmenes a sólidos de revolución?

¿La herramienta computacional GeoGebra puede ser eficiente para implemen-

tar el método de discos y arandelas en el cálculo automático de volúmenes?

¿Existen ciertos sólidos que presentan desafíos particulares para los métodos?

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Usar el método de discos y el de arandelas en el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución.

1.4.2 Objetivos específicos.

- Examinar la relación entre la cantidad de discos o arandelas utilizados y la precisión del cálculo de volumen.
- Analizar las ventajas y desventajas que tienen los métodos de discos y arandelas para obtener volúmenes a sólidos de revolución.
- Examinar la herramienta computacional GeoGebra, con respecto a su eficiencia, para implementar el método de discos y arandelas en el cálculo automático de volúmenes.
- Examinar si existen ciertos sólidos que presentan desafíos particulares para los métodos.

1.5 Justificación

El cálculo integral ha sido una herramienta fundamental a lo largo del tiempo para la determinación de volúmenes en cuerpos geométricos, particularmente en el caso de sólidos de revolución. Métodos tales como el de las arandelas, discos y otros

han sido empleados para aproximar o precisar el volumen de estos sólidos. La importancia de analizar estos métodos radica en la variedad de aplicaciones que poseen, lo cual ha motivado a los matemáticos a profundizar en su estudio con el fin de obtener volúmenes de sólidos de revolución de manera más precisa.

Estas técnicas, mencionadas anteriormente, han encontrado una amplia utilización en diversas disciplinas debido a su eficacia en el cálculo, permitiendo obtener resultados que se acercan de manera significativa a la precisión exacta. En consecuencia, el propósito de esta investigación es fomentar el reconocimiento y estudio más detallado de estos métodos, ya que su comprensión aportaría beneficios significativos en múltiples campos de aplicación. La intención es impulsar un mayor conocimiento y comprensión de estas herramientas matemáticas para su aplicación más amplia y precisa en la resolución de problemas reales.

1.6 Delimitación del tema.

Esta investigación se especificó en las matemáticas aplicada, en correspondencia en el área del cálculo integral, utilizando así los métodos de los discos y el de las arandelas. Orientándose en un constructor de aspecto analítico y aplicativo de ambos métodos para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción.

En este capítulo se presentaron las definiciones y teoremas, mismos que son de suma importancia para el desarrollo efectivo de esta investigación, representando estas informaciones el marco teórico.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Cálculo integral.

Cálculo integral, rama del cálculo que se ocupa de la teoría y aplicaciones de las integrales. Mientras que el cálculo diferencial se centra en tasas de cambio, como las pendientes de las rectas tangentes y las velocidades, el cálculo integral se ocupa del tamaño o valor total, como longitudes, áreas y volúmenes. Las dos ramas están conectadas por el teorema fundamental del cálculo, que muestra cómo se calcula una integral definida utilizando su antiderivada (una función cuya tasa de cambio, o derivada, es igual a la función que se integra). Por ejemplo, la integración de una función de velocidad produce una función de distancia, que permite calcular la distancia recorrida por un objeto durante un intervalo de tiempo. (Britannica, 2016)

2.2.1.1. Función

Es una regla f que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B . (Jiménez R, 2006)

En otras palabras Sean A y B dos conjuntos no vacíos, que llamamos dominio y

conjunto de llegada respectivamente. Entendemos por función de A en B a toda regla que hace corresponder a cada elemento del dominio un único elemento del conjunto de llegada.

Teoremas sobre el cálculo

Teorema 2.2.1 (Teorema fundamental del cálculo) Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a, b]$, entonces (Larson y Edwards, 2009)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Teorema 2.2.2 (Segundo teorema fundamental del cálculo) Si f es continua en el intervalo abierto I que contiene a , entonces, para todo x en el intervalo, (Larson y Edwards, 2015)

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^b f(t)dt \right] = f(x)$$

2.2.1.2. Integral

Se denomina primitiva de la función $f(x)$ en un intervalo (a,b) a toda función $F(x)$ diferenciable en (a,b) y tal que $F'(x) = f(x)$. (Cardona Guio, Juan Pablo, et al, 2016)

2.2.1.3. Sumatoria de Riemann

Asumamos que f esta definida en un intervalo $[a,b]$, pero no es necesariamente continua en dicho intervalo. Sea una partición arbitraria del intervalo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Y sea Δx_i la longitud del i -ésimo subintervalo. Además, sea c_i cualquier punto del subintervalo i -ésimo, la suma

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

se le conoce como suma de Riemann para la partición Δ . (Larson y Hostetler, 1993)

2.2.1.4. Integral definida

Si f está definida en el intervalo $[a,b]$ y el límite de la suma de Riemann existe, entonces decimos que f es integrable en $[a,b]$ y denotamos este límite mediante: (Larson y Hostetler, 1993)

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

2.2.2 Sólido de revolución

Un sólido de revolución es un objeto que se obtiene al rotar geométricamente sobre una superficie plana, alrededor de una recta que se encuentra en el mismo plano, usualmente y . (Candela et al, 2021)

2.2.2.1. Cono

El cono es un cuerpo de revolución engendrado por un triángulo rectángulo al girar sobre uno de sus catetos como eje. (Madrid, 2015)

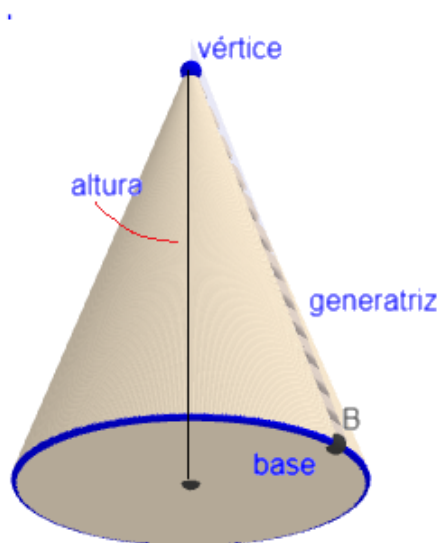


Figura 2.1: Sólido de revolución Cono. (Construcción propia)

Elementos de un cono

Generatriz: Es la recta que une el vértice con cualquier punto de la directriz. Es decir, cualquier segmento que une el vértice con el contorno de la base. Además, es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se está girando para formar el cono.

Vértice: Es el punto exterior la directriz donde coinciden todas las generatrices de la figura. Se trata de la cúspide del cuerpo geométrico.

Altura: Es el segmento perpendicular que une vértice y la base. Coincide con el cateto alrededor del cual rota el triángulo para generar el cono. (Westreicher, 2020)

2.2.2.2. Cilindro

De acuerdo con Madrid (2015), el cilindro es un cuerpo de revolución engendrado por un rectángulo al girar sobre uno de sus lados como eje.

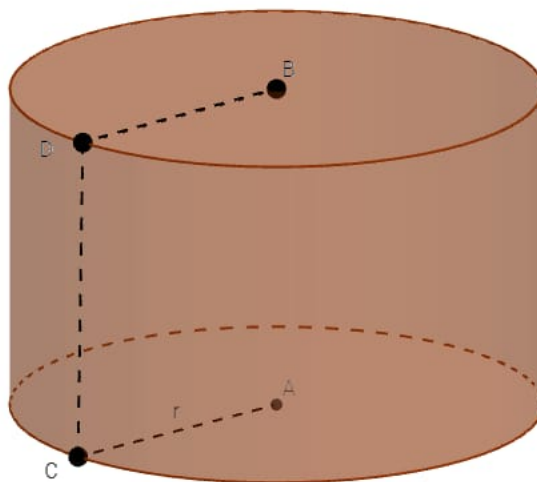


Figura 2.2: Sólido de revolución Cilindro. (Construcción propia)

Los elementos de un cilindro son los siguientes

Bases: Son los dos círculos que constituyen la cara superior y la cara inferior del cilindro.

Eje: Es la recta imaginaria sobre la cual se gira para generar el cilindro.

Generatriz: Es el lado opuesto al eje que se genera con la formación del cilindro (CD).

Altura: Es la longitud del segmento que une de forma perpendicular (formando un

ángulo de 90°) ambas bases. Si el cilindro es recto, coincide con el eje, une los centros de las bases, y además su longitud coincide con la de la generatriz ($AB=CD$). (Guillermo Westreicher, 2020)

2.2.2.3. Esfera

La esfera es un cuerpo geométrico generado por una semicircunferencia que gira alrededor de un determinado eje. Es decir, la esfera es un cuerpo o sólido de revolución, pues se puede obtener haciendo girar una figura o superficie plana alrededor de un eje. (Guillermo Westreicher, 2020)

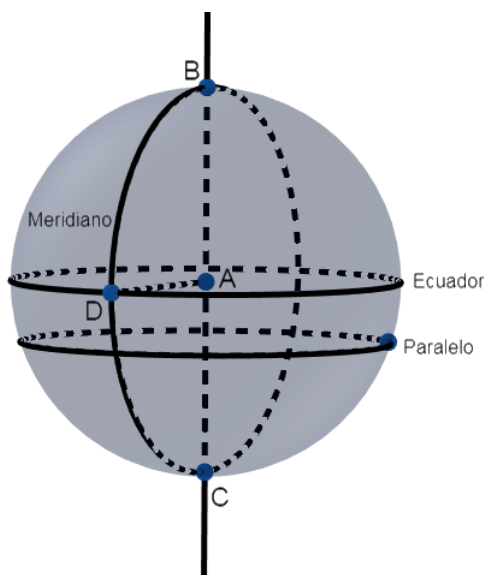


Figura 2.3: Sólido de revolución Esfera. (<https://economipedia.com/definiciones/solido-de-revolucion.html>)

Los elementos de una esfera son los siguientes

Eje: Es la recta imaginaria sobre la cual gira la semicircunferencia que forma la esfera.

Centro: Es el punto equidistante a cualquier punto del contorno de la esfera, es decir, de la superficie esférica.

Radio: (Segmento AD): Es la distancia entre el centro y cualquier punto de la super-

ficie esférica.

Cuerda: Es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la superficie esférica.

Diámetro (Segmento BC): Es aquella cuerda que tiene la particularidad de pasar por el centro de la esfera. Su longitud es el doble del radio.

Meridianos: Son las circunferencias que se obtienen al cortar la esfera con planos que albergan al eje.

Paralelos: Son las circunferencias resultantes de cortar la esfera con planos que sean perpendiculares al eje (que corten el eje formando un ángulo de 90°).

Ecuador: Es la circunferencia que se obtiene al cortar la esfera con un plano perpendicular al eje y que, a su vez, contiene el centro de la figura. Se puede también definir como el paralelo con la mayor longitud.

Polos: (Punto B y Punto C): Son los puntos del eje ubicados en la parte superior e inferior de la superficie esférica.

2.2.2.4. Toro

El toroide es un sólido de revolución que se genera al hacer girar un polígono, o una curva, alrededor de un eje que es exterior, es decir, que no lo contiene. El toroide se caracteriza por tener una forma hueca, como la de un anillo, un donut, o incluso puede asemejarse al neumático de un coche. (Guillermo Westreicher, 2020)

Cuando se trata de una circunferencia la que gira, nos encontramos frente a un tipo particular de toroide llamado toro.

El toro habitual incrustado en el espacio tridimensional tiene forma de rosquilla, pero el concepto de toro es extremadamente útil también en espacios de dimensiones superiores. En general, los toros también pueden tener múltiples agujeros, con el término n -toro usado para un toro con n -agujeros. El caso especial de un toroide de 2 a veces se denomina toroide doble, el toroide de 3 se llama toroide triple. (Weisstein, 2022)

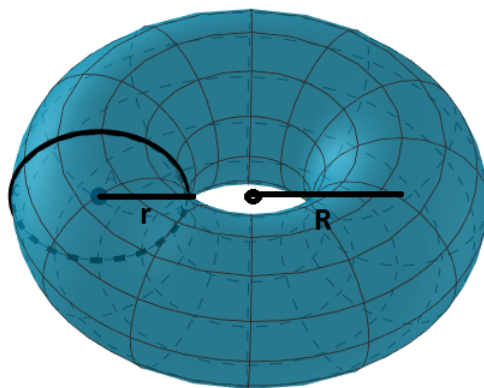


Figura 2.4: Sólido de revolución Toro. (<https://economipedia.com/definiciones/solido-de-revolucion.html>)

2.2.2.5. Hiperboloide

Un hiperboloide es una superficie cuadrática que puede tener una o dos hojas. El hiperboloide de una hoja es una superficie de revolución obtenida al rotar una hipérbola sobre la bisectriz perpendicular a la línea entre los focos (Hilbert y Cohn-Vossen, 1991)

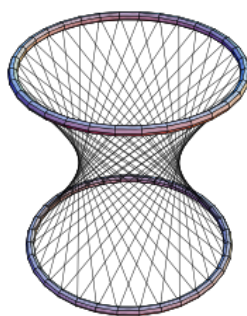


Figura 2.5: Sólido de revolución Hiperboloide. (<https://mathworld.wolfram.com/One-SheetedHyperboloid.html>)

2.2.3 Volumen de un sólido de revolución

En general, para el cálculo del volumen de un sólido de revolución se puede recurrir al cálculo integral. Una forma, llamada el método de discos, consiste en divi-

dir la figura en infinitos discos o porciones circulares, haciendo una sumatoria de sus volúmenes. (Guillermo Westreicher, 2020)

Otro método es el de las arandelas, utilizado cuando tenemos una figura hueca como el toroide, donde el eje de revolución no está contenido en la región plana que gira. (Guillermo Westreicher, 2020)

2.2.4 Métodos para calcular volúmenes de sólidos de revolución

2.2.4.1. Método de los discos

El método o la técnica consiste expresar el volumen del sólido como el límite de una suma de los volúmenes de discos de aproximación. (Hoffmann y Bradley, 1994)

Encontrar el volumen de un sólido general de revolución, se considera un sólido de revolución formado al girar una región plana alrededor del eje indicado. Para determinar el volumen de este sólido se hace rotar un rectángulo representativo en la región plana, y cuando ese rectángulo se hace girar alrededor del eje de revolución, se genera un disco cuyo volumen es: (Larson y Edwards, 2015)

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x$$

Aproximando el volumen del sólido por n de estos discos de ancho Δx y radio $R(x_i)$ se obtiene

$$\pi \sum_{i=1}^n [R(x_i)]^2 \Delta x$$

Esta aproximación mejora a medida que $\|\Delta\| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. Por lo que se puede definir el volumen del sólido como

$$Volumen\ del\ sólido = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \pi \sum_{i=1}^n [R(x_i)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

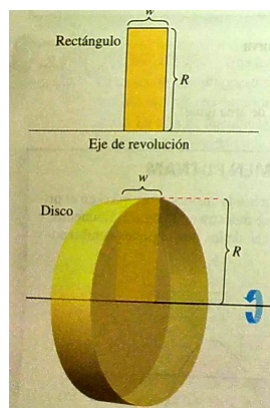


Figura 2.6: Volumen del disco. (Esta imagen fue tomada del libro de cálculo tomo 1 de Larson y Edwards)

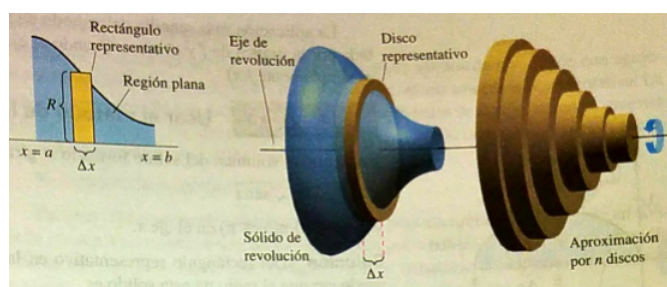


Figura 2.7: Método de los discos. (Esta imagen fue tomada del libro de cálculo tomo 1 de Larson y Edwards)

Para obtener el volumen mediante el método de disco se deben de utilizar una de las dos ecuaciones siguientes:

Cuando el eje de revolución es horizontal

$$= \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx \quad (2.1)$$

Cuando el eje de revolución es vertical

$$= \pi \int_a^b [R(y)]^2 dy \quad (2.2)$$

2.2.4.2. Método de las arandelas

Es el caso en que el área que gira en torno al eje de revolución de su variable independiente, está producido por la figura limitada por dos funciones. (Paniagua y Castele, 2002)

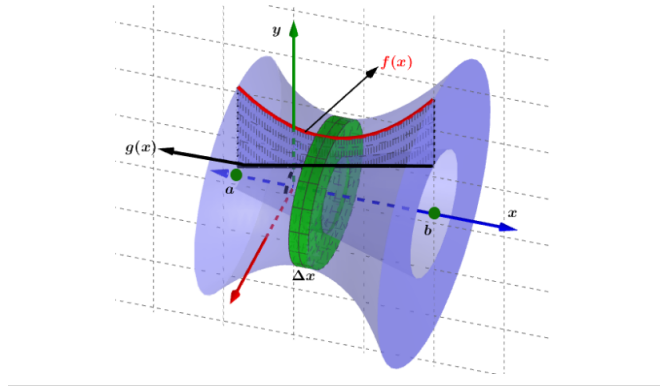


Figura 2.8: Método de las arandelas. (<https://www.redalyc.org/journal/6079/607968030005/html/>)

Si r y R son los radios interiores y exteriores de la arandela y w es la anchura, su volumen está dado por $V = \pi(R^2 - r^2)w$ (Bruce y Larson, 2010). Por lo tanto, si $f(x) > g(x)$ se tienen las expresiones siguientes:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2]dx \quad (2.3)$$

$$V = \int_c^d \pi[f(y)^2 - g(y)^2]dy \quad (2.4)$$

2.2.4.3. Método de las capas

El método se llama así, porque utiliza capas cilíndricas. Cuando un rectángulo se hace girar alrededor de su eje de revolución, se forma una capa cilíndrica o tubo. Para encontrar el volumen de esta capa, se consideran dos cilindros. El radio del cilindro mas grande corresponde al radio exterior de la capa, y el radio del cilindro mas pequeño corresponde al radio interior de la capa. (Larson y Edwards, 2015)

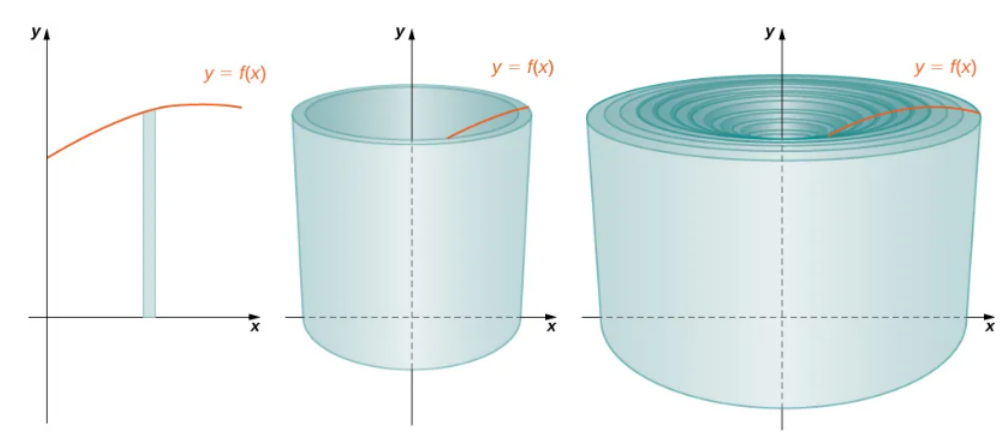


Figura 2.9: Método de capas cilíndricas.

El volumen de la capa es

$$\Delta V = 2\pi[p(y)h(y)]\Delta y$$

El volumen de un sólido de revolución se puede calcular mediante la expresión

$$\text{Volumen del sólido} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=1}^n [p(y_i)h(y_i)]\Delta y = 2\pi \int_c^d [p(y)h(y)]dy$$

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

3.1 Introducción.

En este capítulo se presentaron todos los aspectos metodológicos que permitirán el desarrollo de esta investigación. Aquí, se encuentran el tipo y diseño de la investigación, así también el enfoque y el método.

3.2 Diseño de investigación

Conforme a la intervención el diseño de la investigación es no experimental, porque solo nos competen observar los fenómenos y no intervenir en ellos, implica que no se utilizó un carácter manipulativo de forma intencionada (Sampieri et al., 2014). De acuerdo al tiempo de estudio el diseño de este proyecto es transversal, ya que con respecto al mismo autor los datos son recolectados en un solo lapso de tiempo, es decir, en un solo momento, y el mismo se realizó durante el período 2023-2024. Con relación a la búsqueda de la causa, el diseño es analítico-descriptivo, porque implica un registro de información en forma de análisis, descripción e interpretación, basándose en el comportamiento comparativo de los métodos, esto según Pelella y Martins (2012).

3.3 Tipo de investigación

Esta investigación fue del tipo exploratorio, porque busca enfatizar el conocimiento de temas no muy notables o conocidos, para recopilar y profundizar informaciones más acabada, es decir, según (Sampieri et al., 2014), es exploratoria cuando la revisión de la literatura revela que sólo hay pocas guías investidas o conceptos vagamente relacionados con el problema de estudio, o bien, si deseamos indagar sobre

temas y áreas desde otro enfoque. Del mismo modo fue descriptivo, ya que busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Y de igual manera este proyecto tuvo un carácter documental, porque con respecto a (Arias, 2012), esta se fundamenta en la recopilación, organización y análisis de informaciones escritas, habladas o audiovisuales.

3.4 Enfoque de la investigación

El presente proyecto tuvo un enfoque cualitativo, porque esta no se enfoca en manipular o medir variables. Es decir, según (Sampieri et al., 2014), este enfoque usa la recopilación de datos sin medición numérica, para relucir o afinar preguntas de investigación para el proceso de análisis.

3.5 Método de la investigación

El método utilizado fue el inductivo-deductivo, el cual consiste en explorar en documentos y encontrar explicaciones, para luego describir y analizar los métodos aplicados a los cuerpos de revolución. Esta investigación es inductiva, ya que busca revisar documentos, para identificar ciertos resultados e inducir algunas propiedades, que permiten verificar los objetivos y dar respuesta a las preguntas de investigación. Y, es deductiva debido a que se trata de extraer conclusiones sobre resultados importantes y así verificar los objetivos planteados. (Rodríguez et al., 2017)

3.6 Procedimientos

En esta sección se describieron los diferentes pasos que se desarrollaron para realizar esta investigación. Hasta el momento se han agotado las siguientes etapas:

Se llenó y luego se envió el formulario de solicitud de tema de investigación;

luego se convocó a una reunión en donde se defendió el tema de investigación. Luego de que se aprobó el tema, se realizaron varias reuniones presenciales y virtuales con el asesor, en las cuales se fueron presentando los avances del anteproyecto. Se entregó el anteproyecto con los tres primeros capítulos terminados.

Se recogieron los anteproyectos con las sugerencias del jurado evaluador. Se tomaron en cuenta las sugerencias del jurado y se corrigieron algunos aspectos del anteproyecto. Se realizó una reunión con el asesor, en la cual se trató el tema sobre el capítulo IV y el capítulo V, para hablar sobre los aspectos importantes de estos dos capítulos y como desarrollarlos de manera adecuada.

Se imprimieron y encuadernaron los tres ejemplares con los 5 capítulos para los jurados. Se recibieron los ejemplares con las correcciones de los jurados, y por ultimo se entregó este ejemplar con todas las correcciones hechas.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1 Introducción.

Este capítulo tiene como objetivo analizar los métodos de discos y arandelas para calcular volúmenes a sólidos de revolución, para lograr esto, se presentaron una serie de resultados, en los que queda evidenciado el uso de estos métodos.

4.2 Relación entre la cantidad de discos o arandelas utilizados y la precisión del cálculo del volumen.

La integral definida como el límite de sumas.

Teorema 4.2.1 Dada una función continua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, y un número $\varepsilon > 0$. Entonces, existe un número $\delta > 0$ con la siguiente propiedad: si los puntos $a_0 < a_1 < \dots < a_m$, donde $a_0 = a$ y $a_m = b$, satisfacen la desigualdad $a_k - a_{k-1} < \delta$ para cada $k = 1, 2, \dots, m$ y si los puntos $x_1, \dots, x_m$ son elegidos de los intervalos $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$, respectivamente (es decir, $a_{k-1} \leq x_k \leq a_k$), entonces

$$\left| \sum_{k=1}^m f(x_k)(a_k - a_{k-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Teorema 4.2.2 Dada una función continua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, y una secuencia normal de particiones de este segmento. Si el punto $x_{n,k}$ pertenece al k -ésimo intervalo de la n -ésima partición (es decir, $a_{n,k-1} \leq x_{n,k} \leq a_{n,k}$ para un $k = 1, 2, \dots, l_n$; $n = 1, 2, \dots$), entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Dado un $\epsilon > 0$. Elegimos N de tal manera que $n > N$ y que se cumpla la desigualdad $r_n < \delta$, es decir, que todos los intervalos de la n -ésima partición tienen una longitud $< \delta$ (donde δ tiene el mismo significado que en el teorema anterior). Entonces por el teorema 4.2.1 tenemos

$$\left| \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})(a_{n,k} - a_{n,k-1}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon. \quad (4.1)$$

Esto significa que se cumple la igualdad (4.1). En particular, se deduce que si todos los segmentos de la n -ésima partición son de la misma longitud, es decir, $2^{-n}(b-a)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^n} f(a_{n,k}).$$

La notación $\int_a^b ydx$ está estrechamente relacionada con el Teorema 2. El símbolo $\int$, la letra S modificada, tenía que indicar la suma de infinitos términos “infinitesimales” de la forma ydx ; este concepto que no estaba bien definido desde el punto de vista lógico ahora queda expresado estrictamente en el Teorema 4.2.2. Se ve claramente que este teorema representa la integral definida, no como una suma infinita sino como un límite de sumas de un número creciente de términos.

El volumen y el área superficial de un sólido de revolución

Sea una función continua $y = f(x)$, $\alpha \leq x \leq b$, dada. Además, sea $f(x) \geq 0$. Denotamos por P la región formada por los puntos x, y que satisfacen las condiciones $\alpha \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$. Al girar la región P alrededor del eje X , obtenemos un sólido de revolución. Denotemos su volumen como V . Tenemos

$$(13) \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Para explicar esta fórmula, consideremos una secuencia normal de particiones (ver teorema 4.2.2). Sea

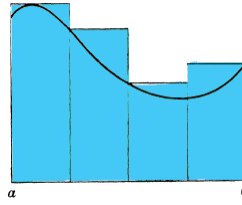


Figura 4.1: Secuencia normal de particiones.

$f(x_{n,k})$ la cota superior de la función f en el intervalo $a_{n,k-1}, a_{n,k}$. Reemplazando el área de nuestra curva que se encuentra sobre este intervalo por el segmento $y = f(x_{n,k})$ obtenemos al rotar alrededor del eje X un cilindro con la base $\pi f(x_{n,k})^2$ y con la altura $a_{n,k} - a_{n,k-1}$, y por lo tanto con el volumen

$$\pi f(x_{n,k})^2 (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Procediendo de esta manera para cada k (siendo n constante), reemplazamos el sólido de revolución considerado por otro, circunscrito en el sólido dado y compuesto por un cierto número de cilindros. El volumen de este sólido es la suma de los volúmenes de los cilindros particulares: denotando este volumen como V_n , tenemos entonces

$$V_n = \pi \sum_{k=1}^{l_n} f(x_{n,k})^2 (a_{n,k} - a_{n,k-1}).$$

Por el Teorema 4.2.2 obtenemos en el límite

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$$

Análogamente, al reemplazar la cota superior por la cota inferior en la construcción anterior, demostramos que V es el límite de los volúmenes de ciertos sólidos inscritos en el sólido de revolución considerado, cada uno de los cuales es la suma de cierto número de cilindros en este caso.

4.2.1 Método de discos

Ejemplo 1 Encontrar el volumen de un sólido formado al hacer girar la curva $y = 1/x$, desde $x = 1$ hasta $x = 2$, alrededor del x

Para poder entender este problema, es conveniente realizar un bosquejo representativo, como se muestra en la figura 4.1a, $y = 1/x$ se observa la curva junto con el elemento diferencial, es decir, un disco x con radio $R(x) = 1/x$. En la Figura 4.1b se representa todo el sólido, junto con el elemento diferencial, o sea con el disco representativo.

El volumen del elemento diferencial mostrado en la figura 4.1a es aproximadamente $\pi R(x_i) \Delta x$, donde $R(x_i)$ representa el radio del disco y Δx es el grosor de esa rebanada. El radio $R(x_i)$ es la distancia desde el eje x hasta la curva, de ahí $R(x_i) = 1/x_i$.

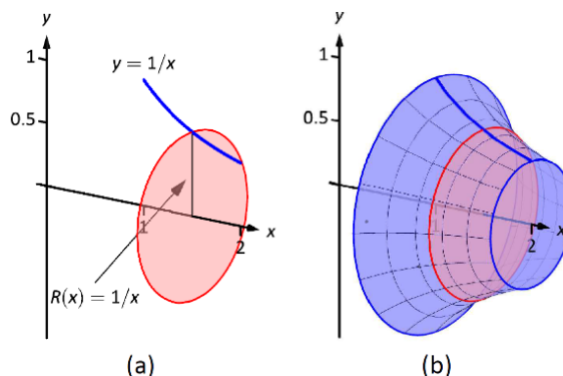


Figura 4.2: Bosquejo del método de discos. (<https://espanol.libretexts.org/Matematicas/>)

Si se rebana el sólido en n rebanadas igualmente espaciadas, se puede aproximar el volumen total, sumando el volumen aproximado de cada disco:

$$\text{Volumen aproximado} = \sum_{i=1}^n \pi \left(\frac{1}{x_i} \right)^2 \Delta x$$

Tomando el límite de la suma anterior cuando $n \rightarrow \infty$ nos da el volumen real o aproximado del sólido generado; y mediante esta suma de Riemann nos permite evaluar el límite como una integral definida.

Como se está girando alrededor del eje horizontal, se trabajará con la ecuación

2.1

$$\begin{aligned}
 V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \left(\frac{1}{x_i} \right)^2 \Delta x \\
 &= \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx \\
 &= \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \pi \left[\frac{1}{x^2} \right]_1^2 \\
 &= \pi \left[-\frac{1}{2} + 1 \right] \\
 &= \frac{\pi}{2} u^3
 \end{aligned}$$

4.2.2 Método de arandelas

Ejemplo 2 Obtener el volumen del sólido formado, el cual rota por la región delimitada $y = x^2 - 2x + 2$ y $y = 2x - 1$ alrededor del eje x.

Igual que en el ejemplo anterior, es conveniente realizar un bosquejo representativo del problema, como se muestra en la figura 4.2a, se observa la región entre las dos curvas $y = x^2 - 2x + 2$ y $y = 2x - 1$. En la figura 4.2b al girar alrededor del eje x se engendraran secciones transversales en forma de arandelas. En la Figura 4.2c se muestra el sólido de revolución completo.

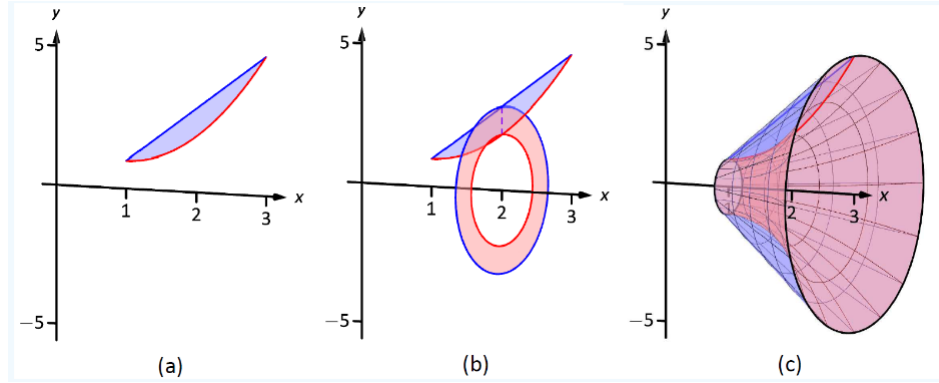


Figura 4.3: Bosquejo del métodos de Arandela. (<https://espanol.libretexts.org/Matematicas/>)

El radio exterior de la arandela es $R(x) = 2x - 1$; el radio interior de la misma es $r(x) = x^2 - 2x + 2$. Como la región está delimitada desde un $x = 1$ hasta un $x = 3$, se integra de la siguiente forma para obtener el volumen del sólido, ya que, la región rota alrededor del eje horizontal se tomará la ecuación 2.3.

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_1^3 ((2x - 1)^2 - (x^2 - 2x + 2)^2) dx \\
 &= \pi \int_1^3 (4x^2 - 4x + 1 - (x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4)) dx \\
 &= \pi \int_1^3 (-x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 4x - 3) dx \\
 &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 \\
 &= \pi \left[-\frac{1^5}{5} + 1^4 - \frac{4}{3}1^3 + 2(1)^2 - 3(1) \right] - \left[-\frac{3^5}{5} + 3^4 - \frac{4}{3}3^3 + 2(3)^2 - 3(3) \right] \\
 &= \frac{104}{15}\pi u^3
 \end{aligned}$$

4.3 Ventajas y desventajas que tienen los métodos de discos y de arandelas para obtener volúmenes a sólidos de revolución.

4.3.1 Ventajas del método de discos

- Ideal para sólidos de revolución con formas cilíndricas simples.
- Se puede aplicar a otros sólidos con secciones transversales conocidas.
- Puede adaptarse para manejar sólidos con agujeros o región bajo dos funciones.

4.3.1.1. Desventajas del método de discos

- Está limitado a sólidos de revolución con formas cilíndricas, y su adaptabilidad a formas más complejas puede ser limitada o su aplicabilidad es muy compleja.

4.3.1.2. Ventajas del método de arandelas

- Eficiente para sólidos de revolución.
- Permite calcular volúmenes con formas irregulares.
- Conceptualmente es sencillo de entender.

4.3.1.3. Desventajas del método de arandelas

- No es adecuado para todos los tipos de sólidos.
- Requiere una correcta división en anillos para una precisión óptima.
- Puede ser complicado de aplicar a problemas complejos.

4.4 La herramienta computacional GeoGebra para implementar el método de discos y arandelas en la eficiencia del cálculo automático de volúmenes.

En este aspecto, la herramienta GeoGebra cuenta con diversos modos de representación, tales como la vista algebraica, la de cálculo simbólico CAS, además de las representaciones gráficas bidimensionales y tridimensionales, entre otras. Estas distintas vistas están interconectadas para generar y activar de manera dinámica elementos algebraicos y gráficos, posibilitando su transformación fluida de una dimensión a otra. Estas representaciones no solo optimizan el tiempo, sino que también ofrecen la capacidad de exhibir una amplia gama de comportamientos del objeto en estudio, algo que resultaría complicado lograr mediante métodos tradicionales como el dibujo con lápiz y papel.

La visualización tridimensional en GeoGebra presenta un modelo geométrico que posibilita la creación de sólidos de revolución ajustables. La representación analítica y numérica combina definiciones con ecuaciones en el software, permitiendo que las formas geométricas de la vista gráfica 2D y 3D sean dinámicas y manipulables, junto con la valoración de las aproximaciones del volumen del sólido. Además se va a observar, de manera simultánea, que a medida que el sólido de revolución se acerca a su forma real, la aproximación del volumen tiende a ser más precisa.

Método de Discos

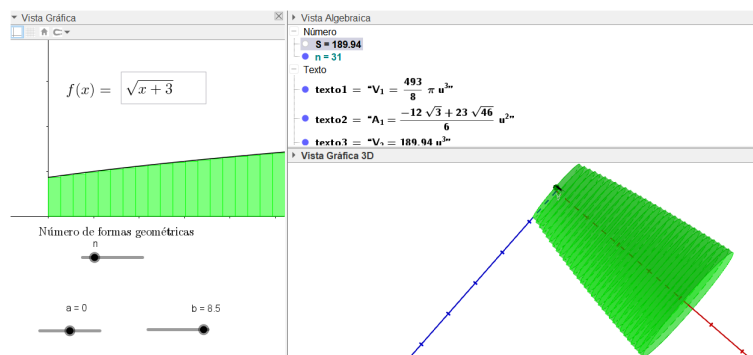


Figura 4.4: Construcción gráfica del método de disco. (Construcción propia)

Para demostrar la eficiencia de la herramienta GeoGebra se aborda el siguiente ejercicio, con el objetivo de calcular las sumas de Riemann, para luego obtener el volumen del sólido mediante la integración en la representación tridimensional.

Para calcular la suma de los discos en la representación tridimensional de la Figura 4.4, empleamos el comando $\text{Suma}(< \text{Lista} >)$ y reemplazamos C , que representa la lista de discos, ajustando el deslizador para asignarle el valor de $n = 150$. Al introducir $S = \text{Suma}(C)$, en la entrada se obtiene el resultado de la suma en la representación algebraica de la Figura 4.2.

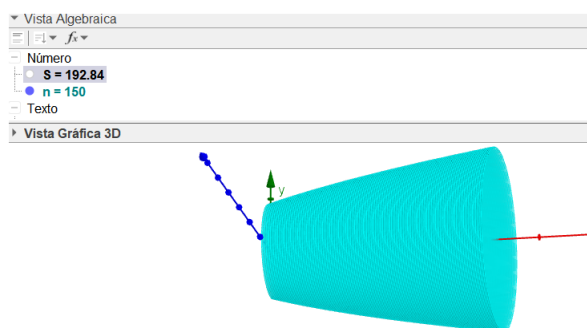


Figura 4.5: Valor de las sumas de Riemann y sólido. (Construcción propia)

Después de eso, para determinar el volumen del sólido de revolución, utilizamos la fórmula $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$ y la adaptamos al comando $\text{Integral}(<\text{función}>, <\text{Extremo inferior del intervalo}>, <\text{Extremo superior del intervalo}>)$ para obtener la solución al problema. Al introducir $V = \text{Integral}(\pi f(x)^2, a, b)$ en la entrada, se obtiene el volumen V , como se muestra en la (Figura 4.6b) de la representación algebraica.

Al comparar los resultados de S y V observamos que a medida que n aumenta, S tiende hacia V y cuando n tiende al infinito S se aproxima o es V .

Para obtener el volumen exacto de la (Figura 4.6a), activamos la vista cálculo simbólico CAS y también ingresamos el comando $\text{Integral}(\pi f(x)^2, a, b)$.

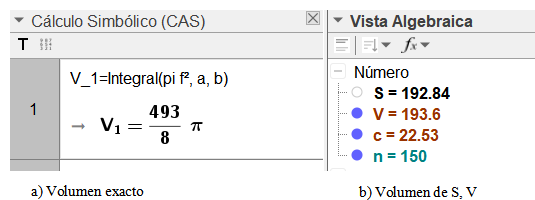


Figura 4.6: Volumen S , V y valor exacto. (Construcción propia)

Método de Arandelas

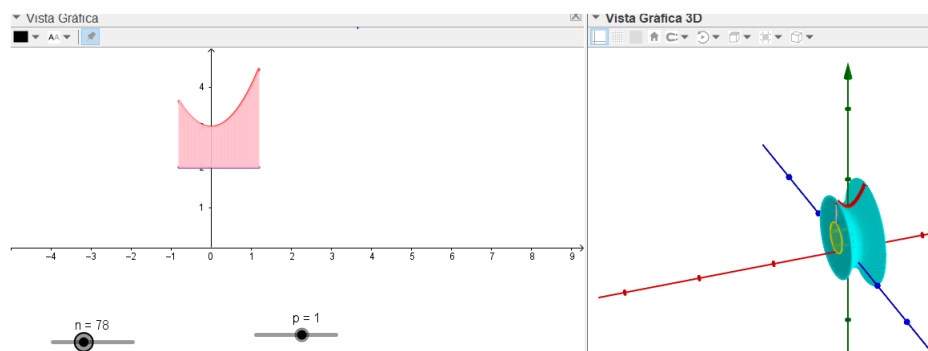


Figura 4.7: Construcción del método de arandelas. (Construcción propia)

En primer lugar se observa en la figura 4.7, la construcción del método de arandelas en el programa, luego de esto, Para obtener una aproximación del volumen mediante sumas, ajustamos n hasta 200 e ingresamos $S_a = Suma(C_R - C_r)$ en la entrada, obteniendo este resultado en la vista algebraica. El volumen del sólido de revolución, calculado a través de la integral $V = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2]dx$ se obtiene ingresando la siguiente sintaxis en la entrada de la vista CAS: $V_a = Integral(\pi((f)^2 - (g)^2), a, b)$. Ambos valores se presentan visualmente en la Figura 4.8.

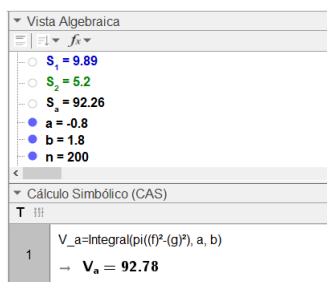


Figura 4.8: Volumen de S_a y V_a . (Construcción propia)

4.5 Formas que presentan desafíos particulares para los métodos.

Algunas formas o sólidos de revolución y situaciones pueden presentar desafíos particulares al aplicar métodos como el de las arandelas y de discos para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

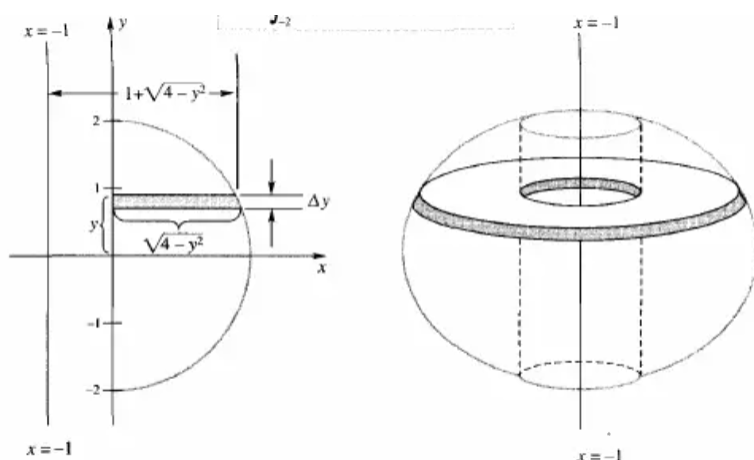


Figura 4.9: Sólido de revolución esferoide con intersección central.(Imagen tomada del libro de Calculo de Purcell)

En la Figura 4.9, se evidencia el uso del método de las arandelas, pero se dificultaría, si se intentase por el método de discos, ya que, la región acotada está definida por dos funciones. Entonces el método mas conveniente es el de arandelas.

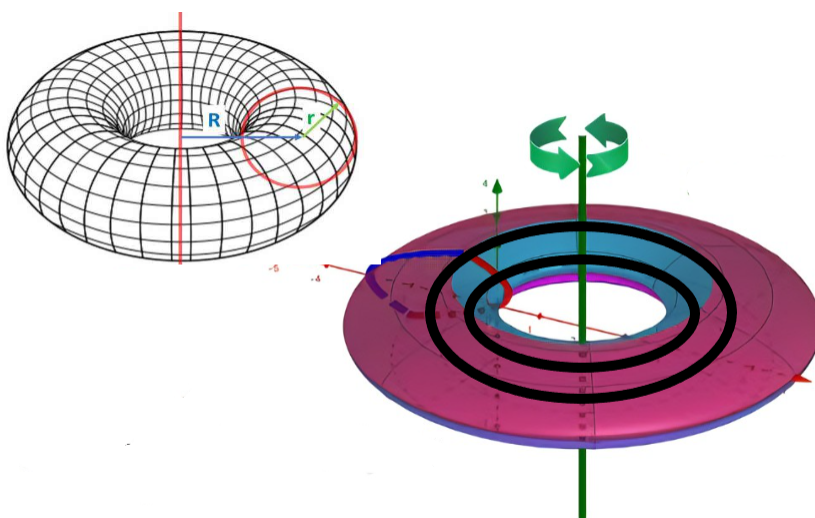


Figura 4.10: Sólido de revolución, toroide

Como se puede apreciar en la Figura 4.10, tanto el método de discos como el método de las arandelas son fáciles de aplicar, aunque para el método de los discos que se limita a sólidos con un hueco en el centro, aquí si se rebana el sólido de forma horizontal al eje de giros, el cálculo del volumen por el método disco, puede ser eficaz. Como se esta frente a un cuerpo de revolución definido por dos funciones, el método de las arandelas se ejecutará de manera eficaz, ya sea perpendicularmente a los ejes de la abscisa o de la ordenada.

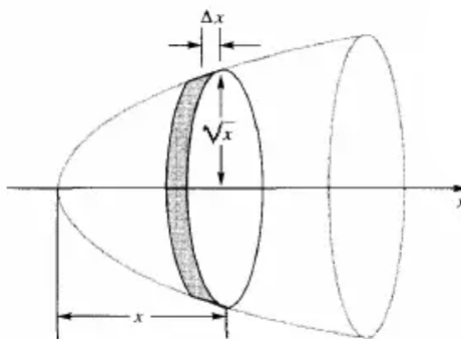


Figura 4.11: Sólido de revolución, paraboloide. (Imagen tomada del libro de Calculo de Purcell)

De manera analítica en la Figura 4.11, el método de las arandelas sería complejo de aplicar, ya que no se presenta bajo una región entre dos funciones, sin embargo el método de discos resulta ser el mas conveniente, de modo que se pueden rebajar discos de forma cilíndrica.

CAPÍTULO IV

CONCLUSIONES

5.1 Introducción.

En este capítulo, se han reunido los resultados fundamentales y los logros más destacados de la tesis, lo cual posibilitó derivar las conclusiones más significativas de la investigación. Para concluir, este apartado culmina con la propuesta de posibles direcciones para investigaciones futuras.

5.1.1 conclusiones.

En este estudio de investigación, se llevó a cabo un análisis con el objetivo de analizar el método de discos y el de arandelas para calcular volúmenes de sólido de revolución.

- **Incremento en la cantidad de elementos:** A medida que se aumenta la cantidad de discos o arandelas utilizadas, se está dividiendo el sólido en elementos más pequeños y, por lo tanto, se obtiene una representación más detallada de la forma del sólido.

Aumento de la precisión: Cuanto más discos o arandelas se usen en la aproximación, más se acercará la suma de los volúmenes individuales al volumen real del sólido. En el límite, a medida que la cantidad de elementos tiende a infinito, la aproximación se convierte en la integral definida, y el resultado se vuelve más preciso.

Convergencia hacia la solución exacta: Al utilizar una cantidad infinita de discos o arandelas, la aproximación converge hacia la solución exacta del volumen del sólido.

- El método de disco y arandelas comparten la capacidad de abordar sólidos de revolución, pero sus diferencias fundamentales residen en la flexibilidad y

complejidad de los sólidos que pueden manejar. Mientras el método de discos es más versátil al adaptarse a secciones transversales conocidas y a ciertos sólidos con agujeros, el método de arandelas destaca por su eficiencia y capacidad para lidiar con cuerpos irregulares, es decir, si el sólido presenta una irregularidad mas compleja este es mas eficiente.

- GeoGebra es una herramienta que ofrece diversas representaciones interconectadas que dinamizan objetos algebraicos y gráficos, permitiendo transformaciones fluidas entre dimensiones. Estas representaciones optimizan el tiempo y revelan comportamientos difíciles de capturar con métodos tradicionales. Especialmente, la vista gráfica 3D facilita la construcción de sólidos de revolución modificables, mejorando la precisión de las aproximaciones volumétricas a medida que el sólido se acerca a su forma real. En conjunto, esta herramienta demuestra eficacia y exactitud, superando las limitaciones de las representaciones estáticas convencionales.
- La obtención de volúmenes mediante el método de discos y arandelas, aplicado a sólidos de revolución, presenta desafíos en la precisión del cálculo debido a la variabilidad de la forma tridimensional. La elección entre ambos métodos a menudo dependerá de la forma específica del sólido. Si el sólido tiene una forma cilíndrica simple, el método de discos puede ser más conveniente. Si la forma es más compleja, el método de arandelas puede ser preferible.

5.2 Líneas futuras de investigación

Como líneas futuras de investigación se pueden considerar las siguientes:

1. Análisis de los errores en el Método de discos y arandelas, y propuesta de estrategias para minimizarlos.
2. Análisis comparativo entre el método de discos y arandelas y otros métodos para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

3. Aplicar el método de discos y arandelas a sólidos de revolución con formas geométricas más complejas, explorando su validez y eficacia en contextos más diversos.

BIBLIOGRAFÍA

- Alwis, Tilak. (2022) Volumes of Solids of Revolution via Summation Methods
- Arias F. (2012). El proyecto de investigación. Introducci'ón a la metodología. Sexta edición. Editorial Episteme.
- Britannica, T. Editors of Encyclopaedia (2016, May 11). integral calculus. Encyclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/science/integral-calculus>
- Bruce, E. y Larson, R. (2010). Cálculo 1 de una variable. México, D.F: McGrawHill/ Interamericana.
- Cálculo integral/ Juan Pablo Córdoba, Jhon Jairo Leal Gómez y Juan Camilo Vásquez. Bogotá: Ediciones de la U, 1ra ed.2016.
- Candela, V. E. N. Sólidos de Revolución con Geogebra: Método de discos y Método de anillos o arandelas.
- Canizales Garzón, G. D., y Erazo Castro, J. F. (2013). "Métodos heurísticos para el cálculo de volúmenes en el siglo XVII bajo la idea naciente de integral definida: una aproximación desde Arquímedes, Cavalieri y Torricelli".
- Felix Klein, Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint - Arithmetic - Algebra - Analysis (especially pp. 207-210), Dover Publications, New York, 2004; originally published in 1908 in Leipzig.
- Guillermo Westreicher, 02 de diciembre, 2020 Sólido de revolución. Economipedia.com
- Guillermo Westreicher, 03 de diciembre, 2020 Cilindro (geometría). Economipedia.com
- Guillermo Westreicher, 14 de diciembre, 2020 Cono (geometría). Economipedia.com
- Guillermo Westreicher, 16 de diciembre, 2020 Toroide. Economipedia.com
- Guillermo Westreicher, 22 de diciembre, 2020 Esfera (geometría). Economipedia.com
- Hilbert, D. y Conh-Vossen, S. Geometry and the imagination. Nueva York: Chelsea,

págs. 10-11, 1999.

Hoffmann, L. D., y Bradley, G. L. (1994). Cálculo aplicado a administración, economía, contaduría y ciencias sociales. McGraw-Hill

Jiménez, R. (2006). Funciones. Pearson Educación de México, SA. de CV.

Katz, V. (2009). A history of mathematics: An introduction. New York: Addison Wesley

Kuratowski, K. (1962). Introduction to calculus / by Kazimierz Kuratowski; translated from polish by Julian Musielak. ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY INC, 1962(1962), 1-99.

Larson, R., y Hostetler, R. (1993). Cálculo y Geometría Analítica. Programas Educativos, S.A. de C.V. Callzada Chabacano 65-A.

Larson, R., y Edwards, B. (2015). Calculo, Tomo I. Cengage Learning Editores.

Larson, R., y Edwards, B. (2009). Calculus. Brooks/Cole.

Libretexts. (2022, 1 noviembre). 7.2: Volumen por área transversal- métodos de disco y arandela. LibreTexts Español.<https://espanol.libretexts.org/Matematicas/>

M Widiastri et al 2019 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 703 012050

Madrid, M. J. (2015). Enseñando Geometría: Geogebra 3D en la formación para maestros. Epsilon.

Paniagua, Castele, R. P., José Manuel Castele. (2002). cálculo integral. ESIC Editorial.

Paniagua, Castele, R. P., José Manuel Castele. (2002). cálculo integral. ESIC Editorial.

Purcell, E. J., Rigdon, S. E., y Varberg, D. E. (2007). Calculo. Pearson Educación.

Rodríguez Jiménez, A., y Pérez Jacinto, A. O. (2017). Métodos científicos de inda-

gação e de construção do conhecimento. Revista Ean, (82), 179-200.

Sabino, C. (1992). El Proceso de Investigación, Universidad Francisco Marroquín.
http://paginas.ufm.edu/sabino/ingles/book/proceso_investigacion.pdf

Sampieri, R. H., Collado, C. F., Lucio, P. B., Valencia, S. M., y Torres, C. P. M.
 (2014). Metodología de la investigación.

Stewart, J. (2017). Cálculo de una variable.

Vergara Ibarra José L. . Sólidos de Revolución y suma de Riemann en GeoGebra.
 Revista Digital: Matemática, Educación e Internet [en línea]. 2022, 22(2), 1-
 20[fecha de Consulta 9 de Noviembre de 2023]. ISSN: 1659-0643. Disponible
 en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=607968030005>

Villalba y Gtz., M. C. (n.d.). EL NACIMIENTO DEL CÁLCULO. Uson.Mx. Retrie-
 ved November 9, 2023, from [http://mat.uson.mx/depto/publicacionesapuntes/
 pdf/1-1-5-calculo.pdf](http://mat.uson.mx/depto/publicacionesapuntes/pdf/1-1-5-calculo.pdf)

ANEXOS

Anexo A: Recursos

Dentro de los recursos utilizados se encuentran los recursos humanos, tecnológicos y bibliográficos.

Recursos	
Humanos	La sustentante, el asesor las personas que han realizado la impresión y encuadernación del trabajo de investigación.
Tecnológicos	Computadora, impresora, celular, el Wifi y el vehículo de transporte.
Bibliográficos	Libros, revistas, artículos de investigación, artículos web, diccionarios digitales y páginas web.

Tabla 5.1: Recursos

Anexo B: Presupuesto

Presupuesto	
Descripción	Costo
Impresión	27,900
Encuadernación	3,000
Viáticos y transporte	10,853
Imprevistos	3,000
Total	44,753

Tabla 5.2: Presupuesto