

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en Matemática

TÍTULO

Análisis de la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de
un cuerpo

SUSTENTANTE

Yoemily Rodríguez Carrasco

ASESOR

José Miguel Gómez Guzmán, MA

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez, Rep. Dom.

Año Académico, 2023.

TÍTULO

Análisis de la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación , es responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y consultas bibliográfica se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que, se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo se requiere de su autorización.

Análisis de la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo

Composición del tribunal evaluador

Leomar Ant. Reyes

Metodología

Danny Daniel Manzueta

Contenido

María Eufemia Fernández

Redacción

Índice general

Declaración de Autoría	III
Dedicatoria	VI
Agradecimientos	VII
Resumen	VIII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	1
1.2.2 Antecedentes académicos	5
1.3 Planteamiento del problema	7
1.4 Justificación	8
1.5 Objetivos	9
1.5.1 Objetivo general	9
1.5.2 Objetivos específicos	9
1.6 Alcance y límites	9
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	10
2.1 Introducción	10
2.2 Marco teórico	10
2.2.1 Preliminares de las ecuaciones diferenciales	10
2.2.2 Ley de enfriamiento de Newton	14
CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO	21
3.1 Introducción	21
3.2 Marco metodológico	21
3.2.1 Diseño de la investigación	21
3.2.2 Tipo de investigación	21
3.2.3 Método de la investigación	22
3.2.4 Enfoque de la investigación	22

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE RESULTADOS	23
4.1 Introducción	23
4.2 Explorar la teoría de la ley de enfriamiento de Newton y su aplicación en diferentes situaciones	23
4.3 Verificar la teoría de la ley de enfriamiento de Newton con algunas aplica- ciones	27
4.4 Evaluar las limitaciones y alcances de la ley de enfriamiento de Newton . .	33
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	36
5.1 Introducción	36
5.2 Conclusiones	36
5.3 Líneas futuras de investigación	37
Referencias	38
Anexo	I
Gráfica	II

Dedicatoria

A **Dios**, mi gran fuente de inspiración y guía, al que me ha dado la fuerza para superar obstáculos y alcanzar mis sueños.

A mi adorada madre, **Miledi Carrasco**, quien con su amor incondicional y apoyo inquebrantable ha sido mi pilar en todo momento. Gracias por ser mi motivación y por creer en mí.

A mis amadas hijas, **Jhoemilsy, Emilsy y Yarisbel**, por iluminar mi vida con su alegría y amor. Cada paso que doy en este camino es para construir un futuro mejor para ustedes.

A **Junior Brito**, mi compañero de vida, gracias por ser mi sostén emocional y mi apoyo incondicional en cada paso de esta travesía.

A mi asesor, **José Miguel Gómez**, por su sabia orientación y dedicación en la dirección de este trabajo. Sus enseñanzas han sido un valioso aporte en mi formación académica y profesional.

Con profundo agradecimiento y amor, dedico esta tesis de maestría a todos aquellos que han sido parte fundamental de mi vida y que me han impulsado a alcanzar este logro. Sin su apoyo, este camino habría sido mucho más difícil de recorrer. Que este trabajo sea un testimonio de mi gratitud y compromiso con seguir creciendo y aprendiendo en busca de nuevos horizontes

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a **Dios** por su guía y fortaleza, brindándome la determinación para enfrentar los desafíos y perseverar en esta travesía académica.

A mi amada **madre** y a mis tres preciosas **hijas**, quienes han sido mi fuente inagotable de apoyo, inspiración y aliento durante todo este proceso. Su amor incondicional y palabras de aliento me han impulsado a superarme cada día.

Gracias al programa de becas **MESCyT**, por brindarme la oportunidad de continuar mis estudios y hacer posible esta realización académica.

Mi gratitud se extiende a la **Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO)** por proporcionarme un ambiente propicio para el aprendizaje y la investigación. Agradezco a todos mis maestros por su dedicación y enseñanzas, que han dejado una huella indeleble en mi formación académica y me han guiado en el proceso de esta tesis.

Agradezco profundamente a mi asesor, **José Miguel Gómez**, cuyo conocimiento, orientación y sabios consejos han sido cruciales en el desarrollo de esta tesis.

Por último, quiero expresar mi agradecimiento especial a mis compañeros de estudio, **Diosmery, Wilmer y Solenny**, por su amistad, colaboración y compañerismo a lo largo de esta experiencia académica.

Este logro no habría sido posible sin el apoyo y aliento de cada una de estas personas y entidades, y me siento profundamente agradecida por ser parte de una comunidad tan enriquecedora

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
UTECO

Facultad De Postgrado y Educación Continuada



Maestría en matemáticas

Título: Análisis de la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo

Sustentante: Yoemily Rodríguez Carrasco

Dirigido por: José Miguel Gómez Guzmán

RESUMEN.

Esta investigación tiene como título Análisis de la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo. Se realizó con el objetivo de analizar la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo.

En ella se plantearon los siguientes objetivos específicos: examinar la teoría de la ley de enfriamiento de Newton y su aplicación en diferentes situaciones, verificar experimentalmente la ley de enfriamiento de Newton por medio de algunas aplicaciones y Evaluar las limitaciones y alcances de la ley de enfriamiento de Newton. Para su ejecución se utilizó un diseño exploratorio y experimental con enfoque descriptivo de corte transversal. Durante el estudio, se llevaron a cabo mediciones y observaciones cuidadosas del comportamiento de la temperatura de un cuerpo en distintos entornos térmicos.

Los resultados obtenidos demostraron que la ley de enfriamiento de Newton es una herramienta eficiente para predecir el comportamiento térmico de un cuerpo en una amplia

gama de situaciones. La correlación entre la tasa de cambio de temperatura y la diferencia de temperaturas con el medio circundante fue consistente con la predicción del modelo.

No obstante, se observó que en situaciones más complicadas, como cambios abruptos en las condiciones ambientales o en la presencia de otros fenómenos, la ley de enfriamiento de Newton podría no ser tan precisa en sus predicciones térmicas. A pesar de sus sólidos resultados en una amplia gama de situaciones, es importante considerar estas excepciones y evaluar la necesidad de ajustar el modelo en escenarios más complejos para garantizar una mayor precisión en la predicción del comportamiento térmico de un cuerpo.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

En este capítulo se exponen todos los elementos básicos o introductorios de esta investigación. En el mismo se desarrollan los antecedentes tanto históricos como académicos; los cuales marcan el origen y evolución del tema; también, el planteamiento del problema, en el cual se describen las situaciones a investigar, además se presentan los objetivos, los cuales muestran la razón de ser del trabajo; se aborda la justificación, en la que se evidencia la importancia del estudio de dicha problemática; por último se explica el alcance y límite que tiene la investigación.

1.2 Antecedentes

1.2.1 Antecedentes históricos

1.2.1.1 Historia de las ecuaciones diferenciales

El análisis matemático ha ocupado durante cerca de 300 años un lugar privilegiado en la rama de la Matemática, en la que las ecuaciones diferenciales juegan un papel central en el análisis, además de permitirle comprender y conjuntar las partes físicas y técnicas. Por lo que se vuelven el instrumento para el estudio del cambio en el mundo físico gracias a la derivada, que puede ser interpretada como el índice de cambio de una variable respecto a la otra. (Katz, 2008)

Newton (1642 – 1727) Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias surgen prácticamente con la aparición del Cálculo. Durante la célebre polémica entre Newton y Leibniz la historia registra que Newton comunica a Leibniz el siguiente Anagrama

6a cc d ae 13e ff 7i el 9n 4o 4q rr 4s 9t 12 v x

El cual en latín quiere decir “Data aequetione quotcunque fluentes quantitaes involvente fluxiones invenire et viceversa”, o bien: “Dada una ecuación con cantidades fluentes, determinar las fluxiones y viceversa”. Este fue, el descubrimiento fundamental de Newton, que consideró necesario mantener en secreto, y el cual en lenguaje matemático contemporáneo significa: “Es útil resolver ecuaciones diferenciales”. Curiosamente, Ince afirma que la fecha de aparición de éstas es el 11 de Noviembre de 1675, cuando Leibniz escribió la ecuación $\int y dy = \frac{y^2}{2}$. Por lo tanto, había fraguado una herramienta poderosa, el signo de integral. El término «Aequatio Differentiali» fue usado primeramente por Leibniz en 1679 para denotar una relación entre las diferenciales dx y dy y dos variables x e y , esta concepción llega a conservarse hasta los tiempos de Euler en los años 1768 - 1770. (Valdés, 1998)

El problema de la integración de Ecuaciones Diferenciales se presentaba como parte de un problema más general: el problema inverso del análisis infinitesimal. Al principio la atención se enfocaba solo a la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Para reducir el problema a la búsqueda de las funciones primitivas, los creadores del análisis tendían a separar las variables en cada ecuación diferencial, al parecer, históricamente este fue el primer método para resolver ecuaciones diferenciales. (Valdés, 1998)

1.2.1.2 Ecuaciones diferenciales de 1er orden

Newton observó que si $d^n y/dx^n = 0$, entonces $y(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$, en particular, y depende de n constantes arbitrarias, aunque esta afirmación tuvo que esperar hasta el siglo XIX para poder ser demostrada con rigor (la demostración estándar actual usa el teorema del valor medio). Los matemáticos de la época con frecuencia usaban argumentos físicos: si $y(t)$ denota la posición en el tiempo t de una partícula, entonces dy/dt es su velocidad. Si $dy/dt = 0$, se tiene que la velocidad es nula, es decir, la partícula no se mueve y su posición, por tanto, permanece constante. (Castaño, 2015)

Leibniz (1693) dice que las ecuaciones diferenciales son funciones de elementos del triángulo característico. En 1690, Jacques Bernoulli planteó el problema de encontrar

la curva que adopta una cuerda flexible, inextensible y colgada de dos puntos fijos, que Leibniz llamó catenaria (del latín cadena). Galileo pensó que esta curva era una parábola, mientras que Huygens probó que esto no era correcto. (Kline, 1972)

En 1691, Leibniz, Huygens y Jean Bernouilli publicaron soluciones independientes. La de Jean Bernouilli es la que se encuentra habitualmente en los textos de mecánica: Consideremos un cable homogéneo sujeto por sus dos extremos (que suponemos a la misma altura) y que distan $2a$ uno del otro y sea ρ la densidad del cable. Sea $y = y(x)$ la función que describe la posición del cable. Por conveniencia se asumirá que la altura mínima del cable ocurre en $x = 0$ (o en otras palabras $y(0) = 0$). (Kline, 1972)

El estudio de funciones dinamizantes llevó al descubrimiento del cálculo de variaciones por Euler a mediados del siglo XVIII y Lagrange a finales del siglo XVIII mejoró y amplió los métodos de Euler. Por otra parte, acabamos de ver que la catenaria se puede obtener por dos caminos distintos: a partir de las leyes de Newton o como la curva que minimiza una cierta magnitud física. Se vio que muchos problemas físicos poseen esta dualidad. La reformulación de las leyes físicas por medio de funciones dinamizantes fue hecha por Hamilton a mediados del siglo XIX. (Kline, 1972)

En 1691 Leibniz descubrió la técnica de separación de variables: indico como se resuelve:

$$y \frac{dx}{dy} = f(x)g(y)$$

También redujo en el mismo año la ecuación homogénea $dy/dx = f(x/y)$ a una separable de primer orden del modo usual: con el cambio $y = vx$. En 1694, Leibniz, publicó la resolución de la ecuación: (Kline, 1972)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x).$$

En 1694, Leibniz y Jean Bernouilli estudiaron el problema de encontrar la familia de curvas que cortan con un ángulo dado a una familia de curvas dadas. Jean Bernouilli señaló

que este problema es importante para determinar las trayectorias de los rayos de luz que recorren un medio no uniforme porque dichos rayos cortan ortogonalmente los llamados frentes de luz. El problema fue resuelto de forma general e independiente por Leibniz y por Jean Bernouilli en 1698. El método empleado es el mismo que se usa hoy en día. Jean Bernouilli planteo el problema de determinar el movimiento de un proyectil en un medio cuya resistencia es proporcional a una potencia de la velocidad. La ecuación diferencial es en este caso: (Kline, 1972)

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^n$$

También fueron identificadas las ecuaciones diferenciales de primer orden exactas, es decir, las ecuaciones $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ para las cuales existe una función $z = z(x, y)$ tal que $dz = Mdx + Ndy$.

En 1739, Clairaut dio la condición $\partial M / \partial y = \partial N / \partial x$, condición que fue dada de forma independiente por Euler en 1734. Si se tiene $dz = M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, como remarcaron Euler y Clairaut, la solución es $z = cte$.

Cuando una ecuación de primer orden no es exacta, es posible muchas veces multiplicarla por una función, llamada factor integrante, que la convierta en exacta. Aunque se había usado esta técnica en algunas ecuaciones, fue Euler en 1734 quien se dio cuenta que este concepto proporcionaba un método de integración e introdujo las expresiones que actualmente se usan. Clairaut amplió la teoría poco más tarde. Hacia 1740 se conocían los métodos elementales de resolución de las ecuaciones diferenciales de primer orden. (Sofan, 2015)

1.2.1.3 Desarrollo histórico de la ley de enfriamiento de Newton

Isaac Newton publicó su trabajo sobre enfriamiento de forma anónima en 1701 como “Scala graduum Caloris. Calorum Descriptiones y signa”. En Philosophical Transac-

tions , volumen 22, número 270.

Newton no estableció originalmente su ley en la forma anterior en 1701. Más bien, usando los términos actuales, Newton notó después de alguna manipulación matemática que la tasa de cambio de temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el cuerpo y su entorno. Esta versión final más simple de la ley, dada por el propio Newton, se debió en parte a la confusión en la época de Newton entre los conceptos de calor y temperatura, que no se desenmarañarían por completo hasta mucho más tarde.

1.2.2 Antecedentes académicos

Gómez (2014) en su artículo “Ley de enfriamiento de Newton de orden fraccionario”. Establece, “Se ha encontrado la relación entre el parámetro σ y el orden de la ecuación diferencial $0 < \gamma \leq 1$ muestra que las soluciones de la ecuación están dadas en términos de la función de Mittag-Leffler dependiendo solo del parámetro γ ”. Fenómenos como el efecto Mpemba (Monwhea, 2006), en el que el agua hirviendo se congela más rápido que el agua a una temperatura más baja es un ejemplo de fenómeno de conducción y difusión anómala; desde la perspectiva del cálculo fraccionario se puede encontrar una mejor descripción de los fenómenos físicos presentes y la descripción detallada de este efecto. Otra posible aplicación del modelo descrito consiste en estimar el flujo de calor existente entre un cuerpo y un fluido homogéneo después de que el cuerpo sea introducido en fluido, el problema radica en corregir la conductividad térmica del fluido por una nueva conductividad térmica, que en este caso sería representada por k^γ .

Urrea M (2016) en su proyecto “Ecuaciones diferenciales, rapidez del cambio de la temperatura del planeta tierra por efectos del calentamiento global ley de enfriamiento y calentamiento de Newton” concluyó que la temperatura que se obtuvo para el año propuesto (2060) no es crítica para el planeta tierra pero si se acerca mucho y da una señal de que tenemos poco tiempo para actuar. Aunque parezca mucho tiempo los 1865 años que tomaría que la humanidad desaparezca por causa del calor del ambiente es poco en compa-

ración de lo que ha estado la humanidad viviendo en la tierra. Tenemos 90 años para actuar en contra del aumento de la temperatura de la tierra y poder evitar todos los desastres que el aumento de 2°C en la temperatura de la tierra pueda traer.

Morales (2018). en su proyecto “Modelo de enfriamiento en el travertino tipo dorado tepexi mediante prueba de enfriamiento de Newton” concluyó que el coeficiente de enfriamiento del travertino es de -0.03565; además, el modelo de enfriamiento se da mediante la ecuación: $T_{(t)} = 35.5e^{-0.03565t}$. El modelo de enfriamiento obtenido cumple satisfactoriamente con los datos obtenidos por el experimento, ya que existe un porcentaje promedio de error del 0.89 % entre las temperaturas obtenidas experimentalmente y las temperaturas obtenidas por el modelo; de esta manera, se concluye que la función obtenida describe en un 99.11 % el comportamiento de enfriamiento.

Fernando y Gálvez (2018) en su taller “Modelación matemática por ecuaciones diferenciales. caso: ley de enfriamiento de Newton,” pues se pudo deducir por medio de la modelación matemática el fenómeno de la Ley de Enfriamiento de Newton, así como la respectiva ecuación diferencial por medio de herramientas básicas de matemáticas, tales como el cálculo, ajuste por mínimos cuadrados, y solución de ecuaciones diferenciales por el método de separación de variables. Además, es posible describir otro tipo de experiencias que junto al análisis del tipo gráfico, simbólico, etc. (análisis cualitativo y cuantitativo) pueden generar nuevo conocimiento, o permiten refutar o confirmar otros ya existentes.

Pérez (2019) en su artículo “estudio del efecto del calentamiento y el enfriamiento de la botella durante la pasteurización de la cerveza” concluyó que para el calentamiento es necesario un mínimo de 70 s, para que el vidrio alcance la temperatura del agua de riego, a partir de allí comenzaría el calentamiento de la cerveza, Durante el enfriamiento de la botella, se observó una estabilidad térmica a los 100 s, por lo que puede considerarse suficiente para este proceso.

Morales (2019). En su proyecto “modelo de enfriamiento en el mármol tipo café ta-

baco mediante una prueba de enfriamiento de newton” concluyó que coeficiente de enfriamiento de este material es de -0.03555 ; además, el modelo de enfriamiento se da mediante la ecuación $T(t) = 39.7e^{-0.03555t}$. De acuerdo con los resultados obtenidos, el modelo de enfriamiento cumple satisfactoriamente con los datos obtenidos por el experimento, ya que existe un porcentaje promedio de error del 1.05% entre las temperaturas obtenidas experimentalmente y las temperaturas obtenidas por el modelo. Por lo que la función obtenida describe en un 98.95% el comportamiento de enfriamiento.

Aníbal (2022) en su proyecto “Aplicación de la ley de enfriamiento de newton en la temperatura de un edificio” dice, La temperatura interior de un edificio está dada por diferentes factores y condiciones del edificio, como la cantidad de personas, los objetos, equipos y máquinas de calentamiento o refrigeración. Todas estas emanan calor, que hace que se tenga una temperatura dentro de un edificio; mientras que la temperatura exterior está dada por factores o condiciones medioambientales o climáticas, también influye las estaciones del año y la altitud.

1.3 Planteamiento del problema

El proceso de enfriamiento de un cuerpo es un tema relevante en la física y en la vida cotidiana, ya que se trata de un fenómeno que ocurre de manera constante en el entorno que nos rodea. En este sentido, la ley de enfriamiento de Newton es un marco teórico que explica cómo se comporta la temperatura de un cuerpo en relación con el ambiente.

Sin embargo, a pesar de la importancia de esta ley en el estudio del enfriamiento de los cuerpos, existen dudas acerca de su aplicación en determinadas condiciones, así como de su validez en relación con otros factores que pueden influir en el proceso de enfriamiento. Por ello, surge la necesidad de realizar un análisis exhaustivo de la ley de enfriamiento de Newton en diferentes situaciones y condiciones, con el fin de determinar su capacidad para explicar y predecir el comportamiento de la temperatura de un cuerpo.

El intercambio de calor es un fenómeno físico en el cual dos objetos entran en con-

tacto térmico a diferentes temperaturas. El objeto con una temperatura más alta transfiere parte de su calor al objeto con una temperatura más baja, hasta que alcanzan un equilibrio térmico, es decir, ambos objetos alcanzan la misma temperatura. Un objeto se encuentra en contacto térmico con el entorno, lo que implica que el objeto cederá o transferirá calor, dependiendo de su temperatura inicial y la temperatura del entorno. Como resultado, la temperatura del objeto disminuirá o aumentará.

Es por eso que esta investigación se centra en la necesidad de evaluar la aplicación de la ley de enfriamiento de Newton, teniendo en cuenta diferentes variables como la temperatura inicial del cuerpo, la temperatura del medio ambiente, el tipo de material y la forma del cuerpo, entre otras. Se busca determinar si esta ley puede considerarse como un modelo adecuado para describir el enfriamiento de los cuerpos en todas las situaciones, o si es necesario tener en cuenta otros factores que puedan influir en el proceso.

Partiendo de lo expuesto anteriormente se plantean las siguientes preguntas que guiarán esta investigación:

1. ¿Dónde se aplica la teoría de la ley de enfriamiento de Newton?
2. ¿Cómo se puede verificar la ley de enfriamiento de Newton mediante la realización de aplicaciones específicas?
3. ¿Qué limitación puede tener la ley de enfriamiento de Newton?

1.4 Justificación

La ley de enfriamiento de Newton es una ley fundamental en termodinámica y física en general. La comprensión de cómo los cuerpos se enfrían es importante en muchos campos, desde la ingeniería y la medicina hasta la climatología y la física de los materiales.

Generalmente se observa que cuando se deja un objeto (cuya temperatura ha sido elevada o disminuida por factores de calentamiento o enfriamiento) sobre una mesa o el fuego, lo encontramos con mayor o menor temperatura después de cierto tiempo. Por lo

tanto, el análisis de la ley de enfriamiento de Newton puede ser útil para una amplia variedad de aplicaciones prácticas y teóricas.

Además, comprender cómo varía la temperatura de un cuerpo a lo largo del tiempo resulta fundamental para abordar problemas ambientales y de conservación de energía. Asimismo, juega un papel crucial en el desarrollo de tecnologías de refrigeración y calefacción.

Este tema también es relevante para la formación académica de estudiantes de física, ya que la ley de enfriamiento de Newton es un tema clave en los cursos introductorios de termodinámica. El análisis profundo y crítico de esta ley ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades de pensamiento crítico y análisis teórico.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Analizar la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo.

1.5.2 Objetivos específicos

1. Explorar la teoría de la ley de enfriamiento de Newton y su aplicación en diferentes situaciones.
2. Verificar experimentalmente la ley de enfriamiento de Newton por medio de algunas aplicaciones.
3. Evaluar las limitaciones y alcances de la ley de enfriamiento de Newton.

1.6 Alcance y límites

Esta investigación está enfocada en las matemáticas aplicadas, específicamente en el área de ecuaciones diferenciales, para el mismo se utilizan las ecuaciones ordinarias de primer orden, cambio de variable y de forma especial la ley de enfriamiento de Newton.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción

En este capítulo se muestra el marco teórico de esta investigación, que trata sobre análisis de la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo. El mismo fue resultado de una ardua labor de consultas en fuentes bibliográficas de autores nacionales e internacionales a fin de sustentar la investigación.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Preliminares de las ecuaciones diferenciales

Definición 2.2.1 Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones, denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos y datos desconocidos o incógnitas, relacionados mediante operaciones matemáticas. (Libro sobre ecuaciones,s/f).

Definición 2.2.2 La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = \phi(x)$ es otra función $\phi'(x)$ que se encuentra con una regla apropiada. La derivada de una función matemática es la razón o velocidad de cambio de una función en un determinado punto. Es decir, qué tan rápido se está produciendo una variación. Desde una perspectiva geométrica, la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al punto donde se ubica x. (Larson, 2003).

En términos matemáticos, la derivada de una función puede expresarse de la siguiente forma:(Larson, 2003).

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En la fórmula, x es el punto en el que la variable toma el valor de x. Asimismo, h es cualquier número. Este luego se igualará a cero pues, como se observa en la ecuación, se

debe calcular el límite de la función cuando h se acerca a cero. (Westreicher, 2021)

Definición 2.2.3 Según lo expone (Zill, 2009) Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial (ED)**

Las ecuaciones diferenciales se clasifican por tipo, orden y linealidad.

Ecuaciones diferenciales según su tipo

Definición 2.2.4 Si una ecuación contiene sólo derivadas de una o más variables dependientes respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (**EDO**) (Zill, 2009)

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = ax + y$$

Definición 2.2.5 Una ecuación que involucra derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial (**EDP**). (Zill, 2009)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (E.D.P.) a una ecuación que liga las variables independientes $x_1, x_2, \dots, x_n$, una función $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que depende de las variables independientes y sus respectivas derivadas parciales

Si el lado derecho de la ecuación se puede expresar como una función $g(x)$ que sólo depende de x , por una función $p(y)$ que sólo depende de y , entonces la ecuación diferencial es separable.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Ecuaciones diferenciales según su orden

Definición 2.2.6 El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación. (Zill, 2009)

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden algunas veces son escritas en la forma diferencial. (Zill, 2009)

$$M(x, y)dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.1)$$

En general, una ecuación diferencial de primer orden adopta la forma

$$F(x, y, y') = 0, \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.2)$$

Donde, en ambos casos, $y = y(x)$. La (2.1) de las ecuaciones anteriores denota una ecuación diferencial en forma implícita, mientras que la (2.2) se dice que está en forma explícita.

Ecuaciones diferenciales según su linealidad

Definición 2.2.7 Una ecuación diferencial de n-ésimo orden $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ se dice que es lineal si F es lineal en $y, y', \dots, y^n$. Esto significa que una EDO de n-ésimo orden es lineal cuando la ecuación $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ es $a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$

$$(y - x)dx + 4xdy = 0 \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} - 5y = e^x$$

Son, respectivamente, ecuaciones diferenciales de primer, segundo y tercer orden. (Zill, 2009)

Definición 2.2.8 Una ecuación diferencial ordinaria no lineal es simplemente no lineal.

Funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como $\sin y$ o $e^{y'}$, no se pueden presentar en una ecuación lineal. Por tanto

$$(1 - y)y' + 2y = e^x \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$$

son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer, segundo y cuarto orden respectivamente. (Zill, 2009)

La solución general de una ecuación diferencial ordinaria es una expresión que proporciona todas las posibles soluciones de la misma. Si la ecuación diferencial es de primer orden, la solución general depende de una constante arbitraria. Precisamente, dando valores a esa constante se van obteniendo las diferentes soluciones, conocidas como soluciones particulares. (González, 2013)

Cualquier función φ , definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I , las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo. (Zill, 2009)

Definición 2.2.9 Integración es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático. Básicamente, una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitesimalmente pequeños: una suma continua. La integral es la operación inversa a la diferencial de una función. Se dice que una función F es una antiderivada o primitiva de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I . (Larson, 2003)

Definición 2.2.10 Un cambio de variable es una técnica empleada en matemática para resolver algunas ecuaciones o sistemas de ecuaciones de grado superior a uno, que de otra forma sería más complejo resolver.

El método de integración por sustitución o cambio de variable se basa en la derivada de la función compuesta.

$$\int f'(u) \cdot u' dx = F(u) + C$$

Para cambiar de variable identificamos una parte de lo que se va a integrar con una nueva variable t , de modo que se obtenga una integral más sencilla. (González, 2003)

Pasos para integrar por cambio de variable

$$\int f'(u) \cdot u' dx$$

Se hace el cambio de variable y se diferencia en los dos términos:

$$t = u \quad dt = u' dx$$

Se despeja u y dx , sustituyendo en la integral:

$$\int f'(t) \cdot u' \frac{dt}{u'} = \int f'(t) dt$$

1. Si la integral resultante es más sencilla:

$$\int f'(t) dt = f(t) + C$$

2. Se vuelve a la variable inicial:

$$f(t) + C = f(u) + C$$

2.2.2 Ley de enfriamiento de Newton

Isaac Newton fue un físico, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Es autor de los *Philosophiae naturalis principia mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describe la ley de la gravitación universal y estableció las bases de la mecánica

clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica, y en matemáticas, el desarrollo del cálculo infinitesimal. (Westfall, 1993)

Según Zill (2009) y Simmons (2017), la ley plantea que la rapidez con la que se enfría un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre su temperatura (T) y la del medio que lo rodea (T_a). La cual se puede expresar mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T - T_a)$$

O que en matemáticas se escribe:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad (2.3)$$

Donde K es una constante de proporcionalidad. Este es el caso de una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes y a su vez se puede resolver por variables separables, donde se requiere para su solución una condición inicial, cuando el cuerpo entra en contacto con el medio que lo rodea, esto es

$$T(0) = T_0$$

El cual para su solución se procede de la siguiente manera

$$\frac{dT}{T - T_a} = k dt$$

Integrando a ambos lados

$$\int \frac{dT}{T - T_a} = k \int dt$$

Se obtiene

$$\ln(T - T_a) = kt + C_1$$

$$T - T_a = C_2 e^{kt}$$

$$T = C_2 e^{kt} + T_a$$

Ahora si se sabe que cuando $t = 0$, entonces $T = T_0$, por lo tanto, se tiene que:

$$C_2 e^{kt} = T_0 - T_a$$

Entonces la solución (2.3), sería entonces:

$$T = (T_0 - T_a) e^{kt} + T_a$$

Pero aún para su solución definitiva se requiere conocer el valor de la constante de proporcionalidad K , y para eso se requiere de una condición de contorno, ósea que para un tiempo T_c . se requiere conocer una temperatura T_c , el cual quedaría de la siguiente manera:

$$k = \frac{1}{t_c} \ln \left| \frac{T_c - T_a}{T_0 - T_a} \right|$$

en la que se requiere que para el caso del enfriamiento se deba de cumplir que $T_a < T_c < T_0$.

Simplificando

$$T - T_a = e^{kt} * e^{c_1}, e^C = C$$

$$T - T_a = C e^{kt}$$

$$T = T_a + e^{kt}(T_0 - T_a), k < 0$$

$$T = (T_0 - T_a) e^{kt} + T_a$$

Que es considerada esta ecuación como un modelo matemático para resolver problemas de calor o enfriamiento de objetos en temperaturas de ambiente. (Toledo, 2017).

Definición 2.2.11 Temperatura es la Propiedad de un cuerpo que determina si habrá o no transferencia de calor entre ese cuerpo y otro próximo a él; Si dos cuerpos están cerca uno del otro y tienen temperaturas diferentes, puede haber una transferencia de calor entre

ellos. La dirección en la que se mueve el calor depende de cuál cuerpo está más caliente. Por ejemplo, si tocas algo caliente con la mano, sentirás el calor transferirse de ese objeto a tu mano. (Melendez, 2018)

Definición 2.2.12 Diferencia de temperatura se considera la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno. Esta diferencia de temperatura impulsa la transferencia de calor desde el objeto hacia el entorno más frío. Por ejemplo, si tienes un vaso de agua caliente y un vaso de agua fría, la diferencia de temperatura entre ellos es la medida de cuánto más caliente está el agua en el vaso caliente en comparación con el agua en el vaso frío. La diferencia de temperatura es lo que impulsa el flujo de calor, ya que el calor siempre tiende a moverse desde el cuerpo más caliente hacia el más frío hasta que las temperaturas se igualen. (Moran et al., 2004)

- En la escala Celsius ($^{\circ}\text{Celsius}$) utilizó como valores de referencia el punto de ebullición (100°C) y el punto de congelación (0°C) del agua. Se simboliza con una ($^{\circ}\text{C}$) .
- La escala termodinámica o Kelvin (K); se simboliza con una “K” y a veces se le llama temperatura absoluta. Sus puntos de referencia son el cero absoluto (0 K) y la temperatura del punto triple del agua (273.16K)
- En la escala Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) ; el punto de congelación para el agua se tomó de (32°F) y el de ebullición de (212°F). Calor; Se define como la energía en transición a través de la frontera de un sistema que no se puede identificar con una fuerza mecánica. Aparece cuando hay una diferencia de temperatura del sistema y sus alrededores.

Definición 2.2.13 La transferencia de calor está relacionada con los cuerpos calientes y fríos llamados fuente y receptor, llevándose a cabo en procesos como condensación, evaporación, cristalización, reacciones químicas, etc. Es la energía en tránsito debido a una diferencia de temperaturas es decir el proceso por el cual la energía térmica se transfiere de un objeto a otro debido a una diferencia de temperatura. La transferencia de calor puede

ocurrir por conducción, convección y radiación. (Melendez, 2018)

Definición 2.2.14 Coeficiente de transferencia de calor es una constante que representa la capacidad de un objeto para transferir calor al entorno. La proporcionalidad entre la tasa de pérdida de calor y la diferencia de temperatura se establece mediante el coeficiente de transferencia de calor (h). Este coeficiente depende de diversos factores, como las propiedades del material, la geometría del objeto y las condiciones de flujo del entorno. En general, un coeficiente de transferencia de calor más alto indica una mayor facilidad de transferencia de calor entre el objeto y su entorno, por lo tanto, un enfriamiento más rápido (Melendez, 2018)

Formas de transferencia de calor:

- **Conducción:** Se transmite energía en forma de calor de unas partículas a otras de un sólido sin desplazamiento de las mismas. Es decir, al calentar un clavo de acero en una llama y se propaga a lo largo de su longitud.
- **Convección:** Tiene lugar mediante el movimiento de las partículas de un fluido (líquido o gas), por lo que ocurre con un transporte de materia. Esto es la transferencia de calor debida al movimiento real del fluido mismo.
- **Radiación:** No requiere un medio material para propagarse. es un proceso en el cual la energía térmica se transmite a través de ondas electromagnéticas, como la radiación infrarroja proveniente del Sol. (Vargas, 2016)

Definición 2.2.15 La superficie de contacto entre el objeto y el medio ambiente también juega un papel importante en el enfriamiento. Cuanto mayor sea la superficie expuesta al entorno, mayor será la tasa de transferencia de calor y, por lo tanto, mayor será la tasa de enfriamiento. Imaginemos, por ejemplo, una taza de café caliente colocada en una habitación fría. Si la taza tiene una superficie grande expuesta al aire, habrá una mayor área para que el calor se transfiera desde el café hacia el ambiente. Esto permite que el café se enfríe

más rápido. Por otro lado, si la taza tiene una superficie de contacto pequeña con el aire, la transferencia de calor será más lenta y el café tardará más en enfriarse.(Melendez, 2018)

La ley de enfriamiento de Newton también tiene en cuenta el factor tiempo. A medida que pasa el tiempo, la diferencia de temperatura entre el objeto y el entorno se reduce, lo que conduce a una disminución en la tasa de enfriamiento. Este proceso sigue una curva exponencial y puede describirse mediante ecuaciones diferenciales.(Moran et al, 2004)

Definición 2.2.16 La capacidad calorífica de un cuerpo es la razón entre la cantidad de calor Q suministrado y el correspondiente aumento de temperatura ΔT del cuerpo. (Moran et al, 2004)

$$\text{Capacidad calorífica} = \frac{Q}{\Delta T}$$

Definición 2.2.17 El calor específico es la cantidad de calor que se necesita para elevar un grado la temperatura de una unidad de masa de una sustancia.

El cálculo fraccionario permite simplificar el modelado de sistemas complejos, como es el caso de la transferencia de calor, mediante ecuaciones más simples. Al aplicar la definición de cálculo fraccionario a la ley de enfriamiento de Newton se obtiene una representación en la cual están intrínsecos fenómenos de difusión anómala, ya que estos fenómenos surgen a partir del incremento de la correlación en el movimiento de las partículas que componen al material en estudio. Estos fenómenos no pueden ser descritos mediante la ley de enfriamiento de orden entero debido a que en el modelado de los sistemas físicos se toman en cuenta procesos ordinarios (es decir, siguen leyes físicas clásicas), pero el medio es complejo; no sólo por ser no homogéneo en el sentido clásico, sino porque el medio se descompone de modo más o menos aleatorio en componentes altamente heterogéneas con muy distinta escalabilidad. (Gómez, 2014)

Definición 2.2.18 Diferenciación Numérica, partiendo de la expansión en Serie de Taylor y el Teorema del Valor Medio, se obtiene la diferenciación numérica finita centrada a tres pasos, como lo expone Chapra y Canale (2007), de la siguiente manera:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

Donde $(h = x_{i+1} - x_i)$, es el tamaño de paso.

Mediante el uso de mínimos cuadrados, se puede hacer uso de la regresión lineal que permite la distribución de los datos, tal como se expone en Walpole y Myers (1998).

CAPÍTULO III DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

A continuación, se presenta la metodología utilizada durante el desarrollo de esta investigación que tiene como objetivo general analizar la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo, tomando en cuenta el diseño, tipo y método de investigación. De donde se ha tomado como referencia las definiciones de Sampieri, (2010).

3.2 Marco metodológico

3.2.1 Diseño de la investigación

De acuerdo con el tiempo de estudio su diseño es transversal porque se recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único, su propósito es describir variables y su incidencia de interrelación en un momento dado, y la misma se realizó en el año 2023. Sampieri (2010)

Acorde a la búsqueda de la causa, su diseño es descriptivo porque se observa y se describe su comportamiento. Asimismo, su diseño es experimental porque se busca establecer relaciones de causa y efecto entre las variables y se basa en la recopilación sistemática y la interpretación de datos.

3.2.2 Tipo de investigación

Esta investigación es de tipo exploratoria porque se busca información para comprenderlo mejor. Del mismo modo es del tipo descriptiva puesto que describe el fenómeno especificando sus propiedades. También es de tipo explicativa porque no solo describe el problema, también explica porque ocurre y como se manifiesta.

3.2.3 Método de la investigación

La investigación adopta el método inductivo, ya que se basa de observaciones específicas para llegar a conclusiones generales.

3.2.4 Enfoque de la investigación

Esta investigación tendrá un enfoque cualitativo, ya que se enfocará en las cualidades de los datos para emitir conceptos. Además, Describe detalladamente las situaciones observadas y sus manifestaciones.

CAPÍTULO IV PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados que permiten analizar la ley de enfriamiento de Newton en el comportamiento de la temperatura de un cuerpo.

4.2 Explorar la teoría de la ley de enfriamiento de Newton y su aplicación en diferentes situaciones

La Ley de Enfriamiento y Calentamiento de Newton es un principio fundamental en la termodinámica que describe cómo la temperatura de un objeto cambia en relación con su entorno.

Según lo expuesto en el Capítulo II de esta investigación la ley de enfriamiento de Newton plantea que la rapidez con la que se enfría un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre su temperatura (T) y la del medio que lo rodea (T_a). La cual se puede expresar mediante la ecuación diferencial: (Zill, 2009) y (Simmons, 2017)

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad (4.1)$$

cuya solución general es:

$$T = (T_0 - T_a)e^{kt} + T_a \quad (4.2)$$

Donde:

T : es la temperatura del cuerpo.

k : es una constante de proporcionalidad que depende de las características del cuerpo y del medio.

T_0 : es la temperatura inicial del cuerpo.

T_a : es la temperatura del medio ambiente.

t : es el tiempo transcurrido.

Esta ecuación indica que cuanto mayor sea la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno, más rápido se enfriará el objeto. El coeficiente de transferencia de calor por convección h está determinado por factores como la conductividad térmica del fluido circundante, la velocidad del fluido y la geometría del objeto.

La ley de enfriamiento de Newton se aplica en diversas situaciones

Al comprender la teoría de la Ley de Enfriamiento de Newton y su aplicación en diferentes situaciones, se pueden adquirir conocimientos valiosos, es por eso que se plantean los siguientes ejemplos prácticos para mostrar su aplicación.

Ejemplo 4.2.1 Un objeto se saca de un horno a 350°F y se deja enfriar en una habitación que está a 70°F . Si la temperatura del objeto desciende a 250°F en una hora, ¿Cuál será su temperatura tres horas después de que se sacó del horno? (Purcell et al., 2007)

SOLUCIÓN: La ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$$

$$\frac{dT}{T - 70} = k dt$$

$$\int \frac{dT}{T - 70} = \int k dt$$

$$\ln |T - 70| = kt + C$$

Como la temperatura inicial es mayor que 70, parece razonable que la temperatura del objeto descenderá hacia 70; por lo tanto, $T - 70$ será positivo y el valor absoluto no es necesario.

Esto conduce a

$$T - 70 = e^{kt} + C$$

$$T = 70 + C_1 e^{kt}$$

En donde $C_1 = e^C$. Ahora se aplica la temperatura inicial, $T(0) = 350$ para determinar C_1 :

$$350 = T(0) = 70 + C_1 e^{k(0)}$$

$$280 = C_1$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial es

$$T(t) = 70 + 280e^{kt}$$

Para determinar k , se aplica la condición que en el tiempo $t = 1$, la temperatura fue $T(1) = 250$.

$$250 = T(1) = 70 + 280e^{k(1)}$$

$$280e^k = 180$$

$$e^k = \frac{180}{280}$$

$$k = \ln \frac{180}{280} \approx -0.44183$$

Esto da

$$T(t) = 70 + 280e^{-0.44183(t)}$$

Al cabo de 3 horas, la temperatura es

$$T(3) = 70 + 280e^{-0.44183(3)} \approx 144.4^\circ F$$

Ejemplo 4.2.2 Un termómetro se cambia de una habitación donde la temperatura es de $70^\circ F$ al exterior, donde la temperatura del aire es de $10^\circ F$. Después de medio minuto el termómetro indica $50^\circ F$. ¿Cuál es la lectura del termómetro en $t = 1$ min? ¿Cuánto tiempo le tomará al termómetro alcanzar los $15^\circ F$? (Zill, 2009)

SOLUCIÓN: En la ecuación $\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$ identificamos $T_a = 10$. Debemos resol-

ver el problema con valores iniciales

Ahora

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 10) \Leftrightarrow \frac{dT}{(T - 10)} = k dt$$

$$\ln(T - 10) = kt + c_1 \Leftrightarrow T - 10 = e^{kt+c_1},$$

$$T = ce^{kt} + 10 \quad (4.3)$$

En

$$t = 0, T = 70 \quad (4.4)$$

Por lo que, al sustituir (4.3) en (4.4) se tiene:

$$70 = ce^{k(0)} + 10$$

$$c = 60 \quad (4.5)$$

(4.5) en (4.3)

$$T = 60e^{kt} + 10 \quad (4.6)$$

$$T(0.5) = 50 \quad (4.7)$$

(4.7) en (4.6)

$$50 = 60e^{0.5k} + 10$$

$$e^{0.5k} = 0.\bar{6} \Leftrightarrow 0.5k = \ln 0.\bar{6} \Leftrightarrow k = \frac{-0.40547}{0.5} \Leftrightarrow k = -0.81094 \quad (4.8)$$

Sustituyendo el valor de k dado por (4.8) en (4.6), se obtiene:

$$T = 60e^{-0.81094t} + 10 \quad (4.9)$$

$$T(1) = 60e^{-0.81094(1)} + 10 \Leftrightarrow 60(0.44444) + 10 = 36.67$$

Para calcular el tiempo en que la temperatura sea de 15° F,

se sustituye $T = 15$ en (4.9):

$$15 = 60e^{-0.81094t} + 10 \Leftrightarrow 60e^{-0.81094t} = 5 \Leftrightarrow e^{0.81094t} = 0.08\bar{3}$$

$$-0.81094t = \ln 0.08\bar{3} \Leftrightarrow t = \frac{-2.48491}{-0.81094} = 3.06$$

Al cabo de un minuto la temperatura del termómetro es de 36.67°F .

El termómetro llegará a 15°F en 3.06 minutos.

4.3 Verificar la teoría de la ley de enfriamiento de Newton con algunas aplicaciones

El intercambio de calor es un proceso físico en el cual dos cuerpos se ponen en contacto a diferentes temperaturas. El cuerpo con una temperatura más alta transfiere parte de su calor al cuerpo con una temperatura más baja, hasta que ambos alcanzan el equilibrio térmico y se encuentran a la misma temperatura. El modelo involucra un cuerpo que entra en contacto térmico con el entorno, lo que implica que el cuerpo cederá o liberará calor, dependiendo de su temperatura inicial y la temperatura del entorno. En consecuencia, su temperatura disminuirá o aumentará.

Desde un punto de vista teórico, el cambio de temperatura de un cuerpo ocurre a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio externo y la temperatura del propio cuerpo. Si se considera que la constante de proporcionalidad es la misma, independientemente de si la temperatura aumenta o disminuye, entonces la ecuación diferencial que representa la ley de enfriamiento es la siguiente:

La tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo $\frac{dT}{dt}$ es igual a menos k veces la diferencia entre la temperatura del cuerpo (T) y la temperatura del medio ambiente (T_a):

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

El proceso experimental involucró el calentamiento de 600 ml de agua hasta alcanzar una temperatura de 74°C . Después, el agua se colocó en un recipiente de vidrio junto

con un termómetro, tal como se indica en el (Anexo 1). Se registraron las mediciones en momentos no uniformes, mientras que la temperatura ambiente permanecía a 28.6°C.

$$\begin{aligned}\frac{dT}{(T - T_a)} &= -k dt \\ \int \frac{dT}{(T - T_a)} &= -k \int dt \\ \ln |T - T_a| + \ln C_1 &= -kt\end{aligned}$$

Despejando usando la base e

$$T - T_a = \frac{1}{C_1} e^{-kt}$$

Haciendo $C_2 = \frac{1}{C_1}$ de donde se obtiene

$$T(t) = C_2 e^{-kt} + T_a \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) es el modelo matemático que representa el experimento. Al resolver esta ecuación, se observa que existen infinitas posibilidades. Sin embargo, para que este modelo sea relevante y describa adecuadamente el fenómeno en estudio, se necesita una solución particular. Para obtener esta solución específica, es necesario utilizar las condiciones iniciales del experimento. Estas condiciones iniciales son fundamentales para obtener resultados significativos y ajustar el modelo matemático a la realidad del fenómeno estudiado.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)
0	74
4	70.7
8	67.9
13.5	64.9
19	62.5
25	60.2
44	53.6
55.24	50.4
66	47.7
77	45.4

Cuadro 4.1: Datos experimentales

Al inicio del experimento, el cuerpo presenta su temperatura inicial, pero con el transcurso de un extenso lapso de tiempo, el cuerpo alcanza el equilibrio térmico, llegando a igualar su temperatura con la del entorno.

Expresando estas condiciones en la ecuación (4.10) se tiene que

$$T(0) = C_2 e^{-k(0)} + 28.6^\circ\text{C}$$

$$74^\circ\text{C} = C_2 + 28.6^\circ\text{C}$$

$$C_2 = 45.4^\circ\text{C}$$

Y finalmente la ecuación (4.10) nos queda:

$$T(t) = 45.4e^{-k(t)} + 28.6^\circ\text{C} \quad (4.11)$$

El valor de la constante “ k ” se obtiene utilizando los datos experimentales y, posteriormente, se calcula la media de los valores de “ k ” obtenidos mediante la ecuación (4.11).

Al final, se determina que el valor de $K=0.01503549$ y así, nuestra ecuación se presenta de la siguiente manera:

$$T(t) = 45.4e^{-0.01503549t} + 28.6^\circ\text{C}$$

Tiempo (min)	Temperatura (°C)	$K(\text{min}^{-1})$
0	74	-
4	70.7	0.01886609108
8	67.9	0.01803594812
13.5	64.9	0.01656995287
19	62.5	0.01537353108
25	60.2	0.01449419937
44	53.6	0.01355991542
55.24	50.4	0.01328026991
66	47.7	0.01311854197
77	45.4	0.01291082102

Cuadro 4.2: Tabla que muestra el valor de “ k ” obtenido para cada conjunto de datos correspondiente.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)	Temperatura Calculada (°C))
0	74	74
4	70.7	71.35
8	67.9	68.8548
13.5	64.9	65.6598
19	62.5	62.7184
25	60.2	59.7753
44	53.6	52.0284
55.24	50.4	48.3855
66	47.7	45.4301
77	45.4	42.8646

Cuadro 4.3: Comparación entre el modelo matemático y los datos teóricos.

ver (Anexo 2), la gráfica del experimento modelado

Para corroborar el modelo obtenido, se comparan los datos teóricos con los datos experimentales.

Las discrepancias encontradas entre los datos teóricos y experimentales se deben a la presencia de factores no considerados, tales como corrientes de aire, el material del recipiente que contiene el cuerpo, variaciones en las condiciones ambientales, entre otros.

Es importante mencionar que estas discrepancias entre datos teóricos y experimentales no invalidan el modelo en sí mismo, sino que señalan la necesidad de realizar mejoras

o ajustes en el mismo.

El segundo proceso experimental consistió en enfriar 600 ml de agua desde su temperatura inicial hasta alcanzar una temperatura de 4°C. Para ello, se utilizó un recipiente de vidrio junto con un termómetro.

Durante el experimento, las mediciones de la temperatura del agua se tomaron en momentos no uniformes, es decir, en intervalos de tiempo no constantes. Estas mediciones se realizaron mientras la temperatura ambiente se mantuvo constante a 29.5°C.

Haciendo uso de la ecuación (4.10) que representa nuestro experimento, y utilizando las condiciones iniciales, lo cuales son fundamentales para obtener resultados significativos y ajustar el modelo matemático a la realidad del fenómeno estudiado.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)
0	4.1
5.15	5.9
20	8
43.34	13.7
85.46	20.5
121	23.7
146.10	25.3
182	27.2
206.18	28.4
219	29
229.29	29.5

Cuadro 4.4: Datos experimentales

Al inicio del experimento, el cuerpo tiene una temperatura inicial distinta a la del entorno. A medida que transcurre un largo período de tiempo, el cuerpo experimenta un proceso de calentamiento. Con el tiempo, el cuerpo alcanza gradualmente el equilibrio térmico con el ambiente, lo que significa que su temperatura se iguala a la del entorno circundante. En este estado de equilibrio, no hay transferencia neta de calor entre el cuerpo y el entorno, y el proceso calentamiento se detiene. El tiempo que lleva alcanzar este equi-

librio térmico depende de las propiedades del cuerpo, del entorno y de la magnitud de la diferencia inicial de temperatura.

Expresando estas condiciones en la ecuación (4.10) se tiene que

$$T(t) = C_2 e^{-kt} + T_a$$

$$T(0) = C_2 e^{-k(0)} + 29.5^\circ\text{C}$$

$$4^\circ\text{C} = C_2 + 29.5^\circ\text{C}$$

$$C_2 = -25.5^\circ\text{C}$$

Y finalmente la ecuación (4.10) nos queda:

$$T(t) = -25.5e^{-k(t)} + 29.5^\circ\text{C} \quad (4.12)$$

El valor de la constante “ k ” se obtiene utilizando los datos experimentales y, posteriormente, se calcula la media de los valores de “ k ” obtenidos mediante la ecuación (4.12).

Tiempo (min)	Temperatura ($^\circ\text{C}$)	K(min)
0	4.1	-
5.15	5.9	0.015035289
20	8	0.008531275
43.34	13.7	0.011044497
85.46	20.5	0.012186448
121	23.7	0.012238186
146.10	25.3	0.012344927
182	27.2	0.013218512
206.18	28.4	0.015245747
219	29	0.017953541
229.29	29.5	-

Cuadro 4.5: Tabla que muestra el valor de “ k ” obtenido para cada conjunto de datos correspondiente.

Al final, se determina que el valor de $K=0.013088713$ y así, la ecuación se presenta de la siguiente manera:

$$T(t) = -25.5e^{-0.013088713t} + 29.5^{\circ}\text{C}$$

Tiempo (min)	Temperatura ($^{\circ}\text{C}$)	Temperatura Calculada ($^{\circ}\text{C}$))
0	4.1	4
5.15	5.9	5.6622
20	8	9.8730
43.34	13.7	15.0396
85.46	20.5	21.1678
121	23.7	24.2672
146.10	25.3	25.7324
182	27.2	27.1450
206.18	28.4	27.7839
219	29	28.0490
229.29	29.5	28.2318

Cuadro 4.6: Comparación entre el modelo matemático y los datos teóricos.

ver (Anexo 3), la gráfica del experimento modelado.

En este segundo experimento, se llevó a cabo la comparación entre los datos teóricos y los datos experimentales para validar el modelo propuesto. A pesar de los esfuerzos realizados, se encontraron discrepancias notables entre ambos conjuntos de datos.

Estas diferencias en los resultados pueden deberse a la presencia de factores no anticipados ni considerados en el modelo teórico, como los mencionados anteriormente. La presencia de estos factores no considerados en el análisis puede haber afectado significativamente el proceso de enfriamiento y, como resultado, generó las discrepancias observadas entre los datos teóricos y experimentales en este segundo experimento.

4.4 Evaluar las limitaciones y alcances de la ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton es una herramienta fundamental en el estudio de los procesos de enfriamiento y transferencia de calor entre un objeto y su entorno. Esta ley ha brindando una aproximación válida para describir numerosos fenómenos de enfriamiento.

Sin embargo, toda aproximación teórica tiene sus limitaciones, y la ley de enfriamiento de Newton no es una excepción. En los experimentos anteriores se puede mostrar algunas diferencias. Estas discrepancias, en ocasiones, pueden atribuirse a factores no considerados en el modelo original, como la presencia de corrientes de aire, las propiedades del recipiente que contiene el cuerpo o incluso la respuesta térmica no instantánea de ciertos materiales.

La ley asume que la diferencia de temperatura entre el objeto y su entorno es constante durante el proceso de enfriamiento. En situaciones reales, esta suposición puede no ser válida, especialmente en casos donde hay grandes variaciones de temperatura o cambios en las condiciones ambientales. En la vida cotidiana y en numerosos escenarios industriales, las condiciones ambientales pueden cambiar considerablemente. Las fluctuaciones en la temperatura del entorno pueden afectar la tasa de enfriamiento del objeto, lo que hace que la suposición de una diferencia de temperatura constante sea menos precisa. También, el objeto que se está enfriando puede tener una variación en su propia temperatura a lo largo del tiempo. Esto puede deberse a procesos internos del objeto o a cambios en su entorno cercano.

Las propiedades térmicas, como la capacidad calorífica, conductividad térmica y cambios de fase, son características intrínsecas de cada material y desempeñan un papel crucial en los procesos de enfriamiento y transferencia de calor.

Al no tener en cuenta estas propiedades, el modelo de Newton puede subestimar o sobreestimar la tasa de enfriamiento y no reflejar con precisión la dinámica térmica real del objeto en cuestión. En situaciones donde el material tiene una capacidad calorífica alta, por ejemplo, se requerirá una mayor cantidad de energía para cambiar su temperatura, lo que influirá en la velocidad de enfriamiento. De manera similar, la conductividad térmica del material afectará cómo el calor se transfiere dentro y fuera del objeto, lo que puede tener un impacto significativo en la tasa de enfriamiento.

Además, en casos donde el material experimenta cambios de fase (como la solidificación o evaporación), se producirán absorciones o liberaciones de energía adicionales, esto altera aún más el proceso de enfriamiento

Muchos materiales tienen una capacidad de retener calor, es decir, no responden de inmediato a cambios en la temperatura del entorno, y puede llevar tiempo antes de que alcancen un nuevo equilibrio térmico.

La presencia de corrientes de aire alrededor del objeto puede alterar el proceso de enfriamiento, ya que pueden acelerar la transferencia de calor entre el objeto y su entorno al llevar aire más frío y alejar el aire caliente. Además, las propiedades del recipiente que contiene el objeto también pueden tener un impacto en el enfriamiento, un recipiente con alta conductividad térmica permitirá que el calor se disipe más rápidamente hacia el entorno, mientras que un recipiente con baja conductividad térmica reducirá la pérdida de calor y ralentizará el proceso de enfriamiento del objeto.

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1 Introducción

En el transcurso de esta investigación sobre el análisis de la ley de enfriamiento de Newton y su comportamiento en la temperatura de un cuerpo, se ha logrado alcanzar los objetivos planteados de manera satisfactoria. A través del estudio teórico, la verificación experimental y la evaluación de sus limitaciones, se ha adquirido una comprensión más profunda y completa de esta importante ley física.

5.2 Conclusiones

En el contexto de esta investigación, la ley de enfriamiento de Newton, formulada por Sir Isaac Newton y los ejemplos tomado de Purcell y Zill, (ver ejemplos (4.2.1)) ha demostrado su solidez y efectividad al describir cómo los objetos buscan alcanzar un equilibrio térmico con su entorno circundante.

La aplicación de la ley de enfriamiento de Newton ha arrojado resultados prometedores y significativos (Ver cuadro (4.3)) en el análisis detallado del proceso de enfriamiento del agua. Los datos obtenidos permitieron calcular constantes de enfriamiento específicos para el agua en diferentes condiciones ambientales, lo que proporcionó una comprensión más profunda de cómo el agua se enfría en función del tiempo y las condiciones ambientales.

De acuerdo al segundo objetivo, se logró llevar a cabo el experimento que se enfocó en el enfriamiento y/o calentamiento del agua, y a través de este experimento se pudo confirmar que la ley de enfriamiento de Newton no siempre arroja resultados exitosos en todas las aplicaciones prácticas con diversos materiales y entornos. Aunque esta ley ha demostrado ser eficaz en muchas situaciones, su capacidad para proporcionar resultados precisos puede variar en función de las circunstancias particulares. A pesar de esto, su versatilidad

sigue siendo una valiosa herramienta en la investigación y el diseño de sistemas de enfriamiento y calentamiento.

Es importante destacar las limitaciones en ciertos contextos particulares, que pueden influir en la precisión del modelo.

Este modelo presenta limitaciones que influye significativamente en el proceso de enfriamiento. No toma en consideración las características particulares de la superficie del objeto, como su forma y composición, lo que puede afectar la forma en que se disipa el calor. Además, no incluye los efectos causados por la radiación térmica, que pueden ser significativos en situaciones donde las diferencias de temperatura son notables.

Así mismo, este modelo omite el impacto de la corriente de aire o el flujo convectivo, que es una variable esencial en la transferencia de calor en muchos casos prácticos. En entornos con movimientos de aire significativos, la convección puede tener un papel crucial en el proceso de enfriamiento, pero la ley de Newton no contempla este fenómeno.

5.3 Líneas futuras de investigación

1. Comparar y analizar cómo la Ley de Enfriamiento de Newton se compara con otras leyes de enfriamiento, como la Ley de Stefan-Boltzmann, para diferentes casos y en diferentes condiciones.
2. Estudiar cómo la presencia de humedad en el ambiente afecta el enfriamiento de objetos y cómo se puede incluir este factor en el modelo de enfriamiento.
3. Explorar cómo la radiación térmica puede afectar el enfriamiento de objetos en el espacio exterior o en ambientes de alta radiación.

Referencias

- Castaño, D. (2015). Breve historia de las ecuaciones diferenciales. Issuu. <https://issuu.com/danielcastano0/docs/breve-historia-de-las-ecuaciones-di>
- Edwards C. Henry, Penney David E. (2009) Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. cuarta edición: Pearson.
- Fernando, L., & Gálvez, P. (2018). Modelación matemática por ecuaciones diferenciales. Caso: Ley de enfriamiento de Newton. Edu.co. <http://funes.uniandes.edu.co/14342/1/Plaza2018Modelacion.pdf>
- Gómez Aguilar, J. F., & Razo Hernández, J. R. (2014). Ley de enfriamiento de Newton de orden fraccionario. Investigación y Ciencia, 22(61), 12-18. <https://www.redalyc.org/articulo.oaid=67431579002>
- González Rodríguez, B. J. (2013). Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Ull.es. <https://campusvirtual.ull.es/ocw/pluginfile.php/6024/mod-resource/content/1/tema5/ME5-ecdiferenciales.pdf>
- Katz, V. J. (2008). A History of MATHEMATICS. [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6075667/mod-resource/content/1/Vic-tor %20J. %20Katz %20- %20A %20History %20of %20Mathematics-Pearson %20 %282008 %29.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/6075667/mod-resource/content/1/Vic-tor%20J.%20Katz%20-%20A%20History%20of%20Mathematics-Pearson%20%282008%29.pdf)
- Kline, M. (1972). El pensamiento matemático. Librosmaravillosos.com. <http://www.librosmaravillosos.com/elpensamientomatematico/pdf/elpensamientomatematico-Parte-I.pdf>
- Larson, R. (2003). calculo con geometria analitica. Wordpress.com. <https://calculounicaes.files.wordpress.com/2012/04/calculo-larsson-8-edicion.pdf>

Libro sobre ecuaciones. (s/f). Calameo.com. Recuperado el 2 de septiembre de 2023, de <https://www.calameo.com/read/0009436372e209582aab4>

Melendez, R. (2018). Fundamentos de transferencia de calor y de masa, 4ta. <https://www.academia.edu/36019670/Fundamentos-de-transferencia-de-calor-y-de-masa-4ta>

Morales T. Adolfo.(2019). Modelo de enfriamiento en el mármol tipo café tabaco mediante una prueba de enfriamiento de newton. Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica. Vol. 23, N.º 1. <https://docplayer.es/151980637-Modelo-de-enfriamiento-en-el-marmol-tipo-cafe-tabaco-mediante-una-prueba-de-enfriamiento-de-newton.html>

Moran, M. J., & Shapiro, H. N. (2004). Fundamentos de termodinámica técnica. Reverte.

Pérez, M.(2020).Simulación de la pasteurización de la cerveza considerando el efecto del envase de vidrio, utilizando dinámica de fluidos computacional. <https://revistas-cientificas.cuc.edu.co/ingecuc/article/view/3153/3629>

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2007). Cálculo diferencial e integral. Recuperado de [https://www.cimat.mx/ciencia para jovenes/bachillerato libros\[Purcell,Varberg,Rigdon\]Calculo/\[Purcell,Varberg,Rigdon\]Calculo.pdf](https://www.cimat.mx/ciencia%20para%20jovenes/bachillerato/libros[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo/[Purcell,Varberg,Rigdon]Calculo.pdf)

Sampieri, R. H., Collado, C. F., & del Pilar Baptista Lucio, M. (2010). Metodología de la investigación. Gob.mx. <https://www.icmujeres.gob.mx/wp-content/uploads/2020/05/0Sampieri.Met.Inv.pdf>

Sofan, S. (2015). Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera - Boyce, Di Prima - 4ed. <https://www.academia.edu/15259755/Ecuaciones-Diferenciales-y-Problemas-con-Valores-en-la-Frontera-Boyce-Di-Prima-4ed>

- Toledo, K. (2017). Ley de enfriamiento de Newton. Slideshare.net. <https://es.slideshare.net/EduviguesSerrudo/proyecto-final-matematicas-superior-ley-de-enfriamiento-de-newton>
- Urrea, M. y Ramírez, P. (2016). Rapidez del cambio de temperatura del planeta tierra por efecto del calentamiento global. <https://es.slideshare.net/MiguelUrrea1/proyecto-ecuaciones-diferenciales-cambio-de-la-temperatura-de-la-tierra-en-funcin-del-tiempo>
- Valdés. (1998). El legado histórico de ecuaciones diferenciales ordinarias. Dialnet. <http://file:///C:/Users/HP/Downloads/Dialnet-ElLegadoHistoricoDeLasEcuaciones-DiferencialesOrdin-6950859.pdf>
- Westfall, R. S. (1993). A vida de Isaac Newton. Oiipdf.com. <https://media.oiipdf.com/pdf/8da39c7d-fbf3-415e-8825-1077ca6612d4.pdf>
- Westreicher, G. (2021). Derivada de una función. Economipedia. <https://economipedia.com/definiciones/derivada-de-una-funcion.html>
- Zill, D. G. (2009). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Wordpress.com. <https://cutbertblog.files.wordpress.com/2019/01/zill-d.g.-ecuaciones-diferenciales-con-aplicaciones-de-modelado-cengage-learning-2009.pdf>

ANEXO

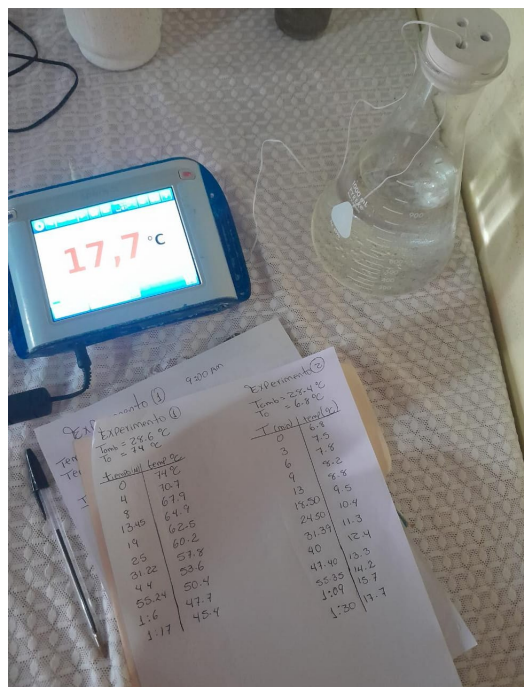


Figura Anexo 1: Experimento

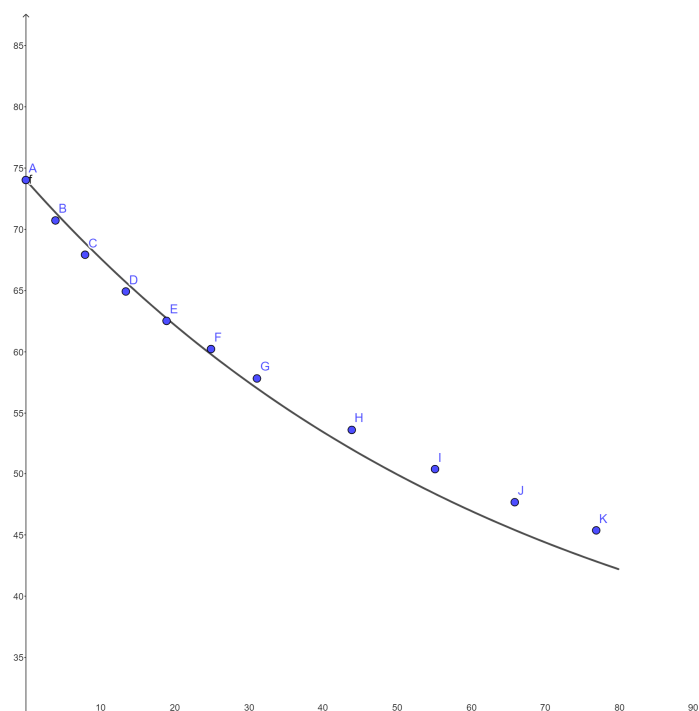


Figura Anexo 2: Modelación del experimento 1 en comparación con el modelo matemático

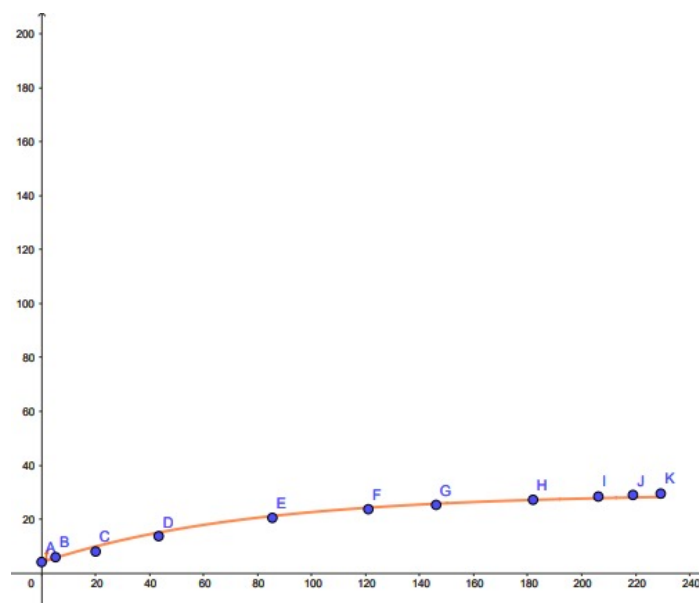


Figura Anexo 3: Modelación del experimento 2 en comparación con el modelo matemático

Tiempo (min)	Temperatura (°C))
0	63.6
2.52	61.2
14.40	55.6
22.26	52.9
31.37	50.4
49	46.8
62.44	44.7
77.35	43
152.12	48.3

Cuadro 5.1: Experimento 3: Datos experimentales de intervalos no uniformes de la temperatura de 700 ml de agua de 63.6°C y con una temperatura ambiente constante de 29.4°C.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)	$K(\text{min}^{-1})$
0	63.6	-
2.52	61.2	0.028872759
14.40	55.6	0.0185045599
22.26	52.9	0.016856479
31.37	50.4	0.015546802
49	46.8	0.13790927
62.44	44.7	0.012882332
77.35	43	0.011921859
152.12	48.3	0.008849423

Cuadro 5.2: Experimento 3: Tabla que muestra el valor de k'' obtenido para cada conjunto de datos correspondiente.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)	Temperatura Calculada (°C))
0	63.6	63.6
2.52	61.2	60.99669
14.40	55.6	51.15421
22.26	52.9	46.39403
31.37	50.4	42.1642
49	46.8	36.7356
62.44	44.7	34.209
77.35	43	32.4103
152.12	48.3	29.6873

Cuadro 5.3: Experimento 3: Comparación entre el modelo matemático y los datos teóricos.

Tiempo (min)	Temperatura (°C))
0	6.8
3	7.5
9	8.2
13	8.8
24.50	10.4
40	12.4
69	15.7
90	17.7
137	20.9

Cuadro 5.4: Experimento 4: Datos experimentales de intervalos no uniformes de la temperatura de 800 ml de agua de 6.8°C con una temperatura ambiente constante de 28.4°C.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)	$K(\text{min}^{-1})$
0	6.8	-
3	7.5	0.010981385
9	8.2	0.0074456344
13	8.8	0.0074741344
24.50	10.4	0.0074416961
40	12.4	0.0075026148
69	15.7	0.0076969756
90	17.7	0.00780449952
137	20.9	0.007721097

Cuadro 5.5: Experimento 4: Tabla que muestra el valor de k ” obtenido para cada conjunto de datos correspondiente.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)	Temperatura Calculada (°C))
0	6.8	6.8
3	7.5	7.31277
9	8.2	8.30208
13	8.8	8.93570
24.50	10.4	10.64826
40	12.4	12.72055
69	15.7	15.097013
90	17.7	17.8942
137	20.9	21.1896

Cuadro 5.6: Experimento 4: Comparación entre el modelo matemático y los datos teóricos.