

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemáticas

Título

Aplicación de la Transformada de Laplace a los Sistemas de Ecuaciones
Diferenciales Ordinarias sin Coeficientes Constantes.

Sustentante

Solenny Espinal Marte

Asesor

Dr. Víctor José Galán Céspedes

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico 2024.

TÍTULO

APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A LOS SISTEMAS DE
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS SIN COEFICIENTES
CONSTANTES.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Aplicación de la Transformada de Laplace a los Sistemas de Ecuaciones
Diferenciales Ordinarias sin Coeficientes Constantes.

Trabajo de Postgrado presentado por **Solenny Espinal Marte** para optar por el
título de Maestría en Matemáticas

Composición del tribunal evaluador

MA. Wilson Lucilo Heredia Amparo

Jurado de metodología

MA. Nelson Sánchez Adames

Jurado de Redacción

MA. Danny Manzueta Pérez

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Dedicatorias	VI
RESUMEN.....	VIII
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos de sistemas de ecuaciones diferenciales.	1
1.2.2 Antecedentes históricos de la transformada de Laplace.	2
1.2.3 Antecedentes académicos	4
1.3 Planteamiento del problema.	6
1.4 Justificación.	7
1.5 Objetivos.	8
1.5.1 Objetivo general.	8
1.5.2 Objetivo específicos.	8
1.6 Alcances y límites.	8
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.	9
2.1 Introducción.	9
2.2 Marco teórico.	9
2.2.1 Ecuaciones diferenciales.	9
2.2.2 Estabilidad de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ..	11
2.2.3 Transformada de Laplace	12
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA	27
3.1 Introducción	27
3.2 Marco metodológico	27
3.2.1 Diseño de la investigación	27
3.2.2 Método de investigación	27
3.2.3 Tipo de investigación	27
3.2.4 Enfoque de la investigación	28
3.3 Procedimientos.	28

CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	29
4.1 Introducción	29
4.2 Caracterización de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes.	29
4.3 Análisis de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes, mediante la transformada de La- place	35
4.3.1 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes de funciones algebraicas	37
4.3.2 Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias con co- eficientes de funciones exponenciales	40
4.4 Estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes mediante la Transformada de Laplace	42
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y CONCLUSIONES DE RESULTADOS	45
5.1 Introducción	45
5.2 Análisis de los resultados	45
5.3 Conclusiones	47
5.4 Líneas futuras de investigación	48
Referencias	49
ANEXOS.....	51

Dedicatorias.

A Dios. Por ser mi fortaleza espiritual, por ayudarme en los momentos difíciles en esta trayectoria de mi vida y por enseñarme a ser confidente y resiliente en los momentos tristes.

A mis padres: Crecencio Espinal, por siempre motivarme a que siga hacia delante, enseñarme que los obstáculos que se nos presentan, se pueden vencer y de que sí se puede.

A mi madre: Simona Marte por ser la persona más especial en mi vida, aunque empezamos estos caminos juntas y no pudimos terminarlos juntas, siempre fuiste la mejor madre del mundo y se que desde el cielo estás orgullosa de mi. Te amo y siempre te voy a amar.

A mis hijos: Jefferson Ramos Espinal y Jelenni Ramos Espinal, a quienes he sacrificado en muchos momentos con mi ausencia, gracias le doy a Dios porque me concedió tenerlos y que me los guíe por un buen camino. A ustedes le dedico este esfuerzo, ya que por ustedes pude lograr este triunfo.

A mis hermanos: Elsa María, Alexander y María Paula, gracias por ofrecerme todo el apoyo moral y así ayudarme a comprender que podía lograr mis objetivos y alcanzar el éxito.

A mi novio: Miguel Ángel Santos de León, gracias por haber llegado a mi vida en el momento más indicado, brindándome incondicionalmente su apoyo, amor y comprensión durante todo este tiempo, darle una sonrisa a mi vida y formar parte de ella.

A mis compañeros de estudios, que a pesar de todos los obstáculos y los malos momentos que tuvimos que pasar, Dios nos dió la oportunidad de convertir este sueño en realidad.

A los profesores quienes se encargaron de dirigir nuestros procesos de formación,
dando lo mejor de sí, gracias.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante
Solenny Espinal Marte

Asesor
Dr. Víctor José Galán Céspedes

RESUMEN

Esta tesis presenta un análisis de la Transformada de Laplace en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias cuando los coeficientes no son constantes, a los fines de caracterizar y analizar las soluciones, además de evaluar la estabilidad de estos sistemas con estos coeficientes que varían en función del tiempo.

La metodología de esta investigación es no experimental y transversal, Utilizó el método analítico-deductivo para analizar la transformada de Laplace en sistemas de ecuaciones diferenciales, además de adoptar un enfoque cualitativo.

Esta investigación concluye que es posible la aplicación de la transformada de Laplace en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes, pero que estas soluciones son altamente dinámicas a lo largo del tiempo, influenciadas directamente por los coeficientes variables, lo que genera respuestas que varían desde comportamientos estables hasta dinámicas oscilatorias complejas. Además, el análisis de la estabilidad señala la sensibilidad de estos sistemas a las variaciones en sus parámetros.

Palabras claves: Transformada de Laplace. Sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Coeficientes no constantes. Estabilidad.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción.

Este capítulo detalla los fundamentos esenciales e introductorios de esta investigación, abordando los antecedentes y planteamiento del problema, los objetivos propuestos, la justificación, los alcances y límites.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes históricos de sistemas de ecuaciones diferenciales.

En la historia de las ecuaciones diferenciales se pueden considerar cinco etapas, donde cada una de ellas marca un avance definitivo. Quizás se podría situar la primera idea sobre ecuación diferencial hacia finales del siglo XVI y principios del siglo XVII en los trabajos realizados por John Napier (1550 – 1617) cuando inventó los logaritmos. Vistas las tablas confeccionadas por él, si se utilizara el simbolismo moderno del cálculo infinitesimal, se podrían considerar como la resolución numérica de una ecuación diferencial.(Garmendia et al., 2007).

La primera etapa iría desde los inicios hasta 1820 cuando Cauchy publica su teorema de existencia, que da inicio a la segunda etapa que marca la edad del rigor. La tercera comienza en 1870 con Lie (1842–1899) y la aplicación de la teoría de grupos continuos a las ecuaciones diferenciales, particularmente aquellos de la dinámica de Hamilton-Jacobi. La cuarta comienza en 1880 con el trabajo de Picard (1856–1941) y su teorema de existencia. La construcción de las ecuaciones diferenciales es análoga a la teoría de las ecuaciones algebraicas de Galois. La última etapa comienza en 1930 donde el análisis se hace más general. Ya Moore en 1908 estudia ecuaciones con un número infinito numerable de variables; estudiando ecuaciones diferenciales de dimensión infinita, y comienza el cálculo de variaciones y el análisis funcional (Garmendia et al., 2007).

Las ecuaciones diferenciales aparecen simultáneamente al cálculo infinitesimal. Por ejemplo, en 1638 apareció el problema de la tractriz, propuesto por René Descartes (1596–1650) a Fermat, que realmente es un problema de tangentes a una curva, (no pudo resolverlo), y fue resuelto en 1674 por Leibniz y en 1690 por Jakob Bernoulli, cuando ya se conocían los trabajos de Newton y Leibniz (Valdés y Segura, 2002).

Las ecuaciones diferenciales comienzan con Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Withelm Leibniz (1 646 – 1 716). Dice este último “Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor”. Muy pronto los científicos se dan cuenta de que las ecuaciones diferenciales son la expresión matemática de las leyes naturales (Lozano, 2021).

La primera clasificación de las EDO de primer orden (en lenguaje de la época ecuaciones fluxiales) fue propuesta por Newton. El primer tipo estaba compuesto de aquellas ecuaciones en las cuales dos fluxiones x', y' y un fluente x o y están relacionados, como por ejemplo $x'/y' = f(x)$ o $x'/y' = f(y)$, o bien como se escribiría en la actualidad $\frac{dx}{dy} = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = f(y)$; el segundo tipo abarcaba aquellas ecuaciones que involucran dos fluxiones y dos fluentes $\frac{x'}{y'} = f(x, y)$ ($\frac{dy}{dx} = f(x, y)$). Y, finalmente, el tercer tipo abarcaba a ecuaciones que involucran más de dos fluxiones, las cuales en la actualidad conducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En la Teoría de Fluxiones, Newton resuelve dos problemas principales, formulados tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos (Lozano, 2021).

1.2.2. Antecedentes históricos de la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace recibe su nombre debido al matemático francés Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), quien le dio forma a dicho operador en la obra *Théorie Analytique des Probabilités*, usando sus propios descubrimientos junto con numerosas ideas ajenas (Motero Contioso, 2018).

Todo comienza en 1744, cuando el físico y matemático Leonhard Euler (1707-1783) investigó la posibilidad de encontrar soluciones a ecuaciones diferenciales que fueran integrales de la forma:

$$y = \int X(x)e^{ax} dx \quad \text{e} \quad y = \int X(x)x^A dx \quad a, A \in \mathbb{R}$$

A su vez, el también físico y matemático Joseph Louis Lagrange (1736-1813) vinculó a la teoría de la probabilidad este tipo de integrales en un trabajo sobre funciones de densidad de probabilidad, pero esta vez usó integrales con la forma:

$$\int X(x)e^{-ax^2} dx, \quad a \in \mathbb{R}$$

En 1782, siguiendo las ideas de Euler, Laplace investiga dichas integrales vistas como soluciones de ecuaciones diferenciales. Fue tres años más tarde cuando, después de familiarizarse con estas integrales, Laplace las usa para transformar ecuaciones diferenciales, observando que dichas ecuaciones transformadas eran aún más fáciles de resolver que las originales. Sin embargo, Laplace usa libremente en su libro la transformada sin asentar sus bases teóricas, únicamente describiendo algunas de sus propiedades (Motero Contioso, 2018).

Después de esto, la transformada de Laplace cayó en el olvido para que en la segunda mitad del siglo XIX fuera desenterrada por Oliver Heaviside (1850-1925), quien la usó en sus trabajos de teoría de vibraciones (electromagnetismo). El ingeniero, físico y matemático inglés Heaviside desarrolló esta técnica al descubrir que usando la transformada de Laplace podía convertir las ecuaciones diferenciales con las que trabajaba en ecuaciones algebraicas fácilmente resolubles (Tonidandel y Araújo, 2012).

Pero a medida que su uso iba incrementándose en trabajos de físicos, ingenieriles y científicos en general, también crecía la incredulidad de determinados matemáticos, que veían esta técnica como una “manipulaciones” realizadas con éxito pero sin fun-

damento alguno. Así que, no satisfechos con este tipo de respuestas, a principios del siglo XX algunos matemáticos tales como Thomas Bromwich (1875-1929) trataron de encontrar una base teórica fundamentada a estas “manipulaciones” con la ayuda de la variable compleja, entre otras cosas, creando lo que actualmente se conoce como el método de las transformadas (Alfonso y Rodriguez, 2019).

1.2.3. Antecedentes académicos

Jorge (2011) en su investigación titulada “Transformada de Laplace: Aplicación a vibraciones mecánicas”, concluyó que los métodos de la transformada de Laplace tienen un papel clave en el enfoque moderno del análisis y diseño en los sistemas de ingeniería.

Por su parte, Lacasa (2011) en el artículo titulado “Transformadas de Laplace en resolución de circuitos RLC”, presenta como el desarrollo de las transformadas de Laplace brindan una forma sencilla y práctica de resolver ecuaciones diferenciales lineales. En particular, se analiza la aplicación directa sobre circuitos eléctricos del tipo RLC, muy comunes y usados en la Física y Matemática.

Por su parte, Tiberi (2013) en su artículo “Aplicación de la Transformada de Laplace en el análisis de circuitos eléctricos”, estableció que la transformada de Laplace es útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales en el origen, ya que las transforma en ecuaciones polinómicas, que se resuelven utilizando solamente operaciones algebraicas.

Córdoba (2015) en su investigación “Transformada de Laplace aplicada en filtros analógicos”, estableció que la transformada de Laplace describe el comportamiento de sistemas dinámicos complejos utilizando ecuaciones ordinarias en lugar de ecuaciones diferenciales. Su propósito de utilizar una transformación es generar un nuevo dominio en el cual sea más fácil manipular el problema a ser investigado, para luego anti-transformarlo y así llegar a los resultados deseados en el dominio original.

Además, presenta una aplicación de ésta herramienta ligada a filtros analógicos pasa bajos, los cuales no permiten el paso de las altas frecuencias.

Además, Motero (2018) en su “Estudio de la transformada de Laplace”, presentan diversas situaciones cuyo comportamiento puede ser modelado y estudiado a través de las ecuaciones diferenciales. Muestra un método alternativo de resolución a este tipo de problemas, ahorrando los numerosos cálculos que implican la derivación y la integración, pudiendo optimizar la resolución y convirtiéndolo en un proceso más efectivo. Presenta el método de la transformada de Laplace junto con todas sus propiedades acompañadas de ejemplos, para usarlas en la resolución de problemas que involucren algunos tipos de ecuaciones diferenciales.

Proy (2021) en su tesis titulada “Inversión de la transformada de Laplace mediante integración numérica”, concluyó que la transformada de Laplace es una herramienta matemática de gran importancia para simplificar las ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales que modelizan gran cantidad de fenómenos en diversos campos científicos. Una vez resuelto el problema simplificado, para obtener la solución del problema original, se debe calcular la transformada inversa. Cuando este cálculo no es posible hacerlo de forma analítica, se debe recurrir a métodos numéricos para su aproximación. Además, analiza aquellos métodos basados en la integración numérica que resultan más eficientes para este problema.

Por otro lado, en la investigación realizada por Márquez et al., (2022) titulada “Desarrollo De Una Aplicación Para Su Uso En La Enseñanza De La Transformada De Laplace”, se muestra y analiza la creación de un desarrollo tecnológico diseñado en lenguaje de programación Python que resuelve ejercicios relacionados con la Transformada de Laplace. Para su elaboración, y desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, fue construida una organización matemática devenida de las técnicas utilizadas en actividades escolares, conveniente para la transposición informática de los elementos colocados en su interfaz. Se privilegió como técnica el propio teorema

que determina el concepto de transformada. El proceso informático causa un fenómeno didáctico inverso mediante el cual se naturaliza la definición de transformada, por encima de las técnicas que de ella se desprenden. La aplicación resuelve todos los ejercicios relacionados con el tema contenidos en los textos de uso.

1.3. Planteamiento del problema.

La transformada de Laplace es una herramienta matemática ampliamente utilizada en el análisis de sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Esta transformada permite convertir una EDO en una ecuación algebraica resoluble, lo que facilita el estudio y la resolución de problemas en ingeniería, física y otras disciplinas científicas. Tradicionalmente, esta técnica ha sido particularmente útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, ya que la transformada de Laplace de una derivada no depende de la función original, sino solo de su transformada.

Sin embargo, cuando se intenta aplicar la Transformada de Laplace a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias que no tienen coeficientes constantes, surge una situación interesante, y es que la transformada de una derivada sí depende de la función original, lo que puede hacer que el problema sea más difícil de resolver. Esto lleva a un punto crítico sobre la estabilidad de la Transformada de Laplace en el análisis de sistemas dinámicos, ya su eficacia está intrínsecamente ligada a la naturaleza de las ecuaciones involucradas. Aunque hay técnicas para abordar este tipo de situaciones, como el método de los coeficientes indeterminados o el método de variación de parámetros y otros, en ocasiones, estos pueden ser muy tediosos y no siempre es posible encontrar una solución.

Es innegable que existe una era de creciente avance tecnológico, donde los sistemas que se deben modelar y entender son cada vez más complejos y dinámicos, y muchas veces estos varían con el tiempo o dependen de otras variables. Es por esto, que esta propuesta investigativa concibió la aplicación de la transformada de

Laplace cuando los coeficientes de las ecuaciones diferenciales ordinarias dadas no son constantes, y con ello dar respuesta a la pregunta de investigación, ¿Cómo aplicar la transformada de Laplace a los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes utilizando la transformada de Laplace?

1. ¿Cuáles condiciones caracterizan las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes?
2. ¿De qué manera se pueden analizar las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes utilizando la transformada de Laplace?
3. ¿Cuál es la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes mediante la aplicación de la transformada de Laplace?

1.4. Justificación.

Muchos sistemas dinámicos en el mundo real no pueden modelarse adecuadamente utilizando coeficientes constantes, ya que estos coeficientes varían con el tiempo o dependen de las variables de estado. Por lo que esta investigación ha de permitir encontrar soluciones más precisas y realistas para problemas prácticos en diversas disciplinas. En este sentido, también esta investigación puede contribuir al desarrollo de nuevas estrategias y enfoques que lleven a la creación y perfeccionamiento de técnicas analíticas y numéricas para resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Aplicar la transformada de Laplace a los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes es un tema relevante debido a su posible impacto en la automatización y el control de sistemas, el modelado de fenómenos físicos, el análisis de datos en series temporales, además de la contribución a la literatura científica del país, ya que pretende servir de base para investigaciones futuras en esta área de las matemáticas.

1.5. Objetivos.

1.5.1. Objetivo general.

Aplicar la Transformada de Laplace en la solución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias sin Coeficientes Constantes.

1.5.2. Objetivo específicos.

1. Caracterizar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes.
2. Analizar las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes, mediante la transformada de Laplace.
3. Evaluar la estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes mediante la Transformada de Laplace.

1.6. Alcances y límites.

El desarrollo de esta investigación se centró en el contexto de las matemáticas aplicadas, ya que consistió en la aplicación de la transformada de Laplace para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, cuando los coeficientes no son constantes, pero sin incurrir en situaciones de modelado de las mismas en un contexto real. También, se enmarcó dentro del análisis matemático y específicamente en ecuaciones diferenciales ordinarias.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.

2.1. Introducción.

En este capítulo se plantean los fundamentos conceptuales que sustentan las bases teóricas de los sistemas de ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace.

2.2. Marco teórico.

2.2.1. Ecuaciones diferenciales.

Definición 2.1 Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes (Zill, 2012).

Definición 2.2 Las ecuaciones diferenciales según el tipo, se clasifican en:

- 1) Ecuación diferencial ordinaria: si una ecuación diferencial contiene únicamente derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO), de acuerdo con (Zill, 2012).

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \quad (2.1)$$

donde $y^{(n)}$ es la n-ésima derivada de y con respecto a x , $a_i(x)$ son funciones de x que pueden variar, y $g(x)$ es la función término independiente.

- 2) Ecuación diferencial en derivadas parciales: se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0$$

que permite conexas las variables independientes $x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$, la función que se busca y sus derivadas parciales. Se cumple que: $k_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ son enteros no negativos tales que: $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$ m (Campuzano, 2016).

Definición 2.3 El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación (Zill, 2009).

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden algunas veces son escritas en la forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Simbólicamente se puede expresar una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden con una variable dependiente por la forma general

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.2)$$

donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables: $x, y, y', \dots, y^{(n)}$.

Definición 2.4 Según Zill (2009), una ecuación diferencial de n -ésimo orden como (2.2) se dice que es lineal si F es lineal en $y, y', \dots, y^{(n)}$. Esto significa que una EDO de n -ésimo orden es lineal cuando la ecuación (2.2) es $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (2.3)$$

Dos casos especiales importantes de la ecuación (2.3) son las ED lineales de primer orden ($n = 1$) y de segundo orden ($n = 2$) :

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{y} \quad a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Definición 2.5 Solución de una EDO. Cualquier función ϕ , definida en un intervalo I y que tiene al menos n derivadas continuas en I , las cuales cuando se sustituyen en una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden reducen la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo (Zill, 2009).

En otras palabras, una solución de una ecuación diferencial ordinaria de n -ésimo orden (2.2) es una función ϕ que posee al menos n derivadas para las que

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } I.$$

Definición 2.6 Solución implícita de una EDO. Se dice que una relación $G(x, y) = 0$ es una solución implícita de una ecuación diferencial ordinaria (2.2) en un intervalo I , suponiendo que existe al menos una función ϕ que satisface la relación así como la ecuación diferencial en I (Zill, 2009).

2.2.2. Estabilidad de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Cuando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es lineal, esto significa que hay una matriz A que forma parte del conjunto $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, y se establece que

$$x' = A \cdot x$$

En este sentido, Candela (2015) establece el siguiente teorema que plantea condiciones para examinar la estabilidad de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

Teorema 2.1 Considérese un entero positivo n , una matriz A de tamaño $n \times n$ con elementos en $\mathbb{R}$, y un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de la forma $x' = A \cdot x$. El análisis de estabilidad de este sistema puede realizarse mediante el polinomio característico asociado a la matriz A , definido como:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

A partir de este polinomio, se establecen los siguientes criterios:

1. Si se determina que cada raíz de la ecuación $p(\lambda) = 0$ posee una parte real negativa, se concluye que todas las soluciones del sistema dado son estables de manera asintótica.
2. En el caso de que alguna raíz de la ecuación $p(\lambda) = 0$ tenga una parte real positiva, se establece que todas las soluciones del sistema son inestables.
3. En la situación donde todas las raíces de $p(\lambda) = 0$ tengan una parte real no positiva y ciertas raíces, digase $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, sean puramente imaginarias, con λ_j

de multiplicidad k_j , el polinomio se puede expresar como

$$p(\lambda) = (\lambda - i\omega_1)^{k_1} \cdots (\lambda - i\omega_l)^{k_l} Q(\lambda)$$

donde Q contiene raíces con partes reales negativas exclusivamente. Bajo estas condiciones, una solución $x = x(t)$ se clasifica como estable pero no necesariamente asintóticamente estable si, para cada λ_j , la matriz A asocia k_j autovectores linealmente independientes. De no cumplirse esta condición, se considera que todas las soluciones son inestables.

2.2.3. Transformada de Laplace

Definición 2.7 Si $f(t)$ es una función definida para $t \geq 0$, entonces la integral

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt = F(s)$$

se llama Transformada de Laplace de f . El dominio de la función $F(s)$ consta de aquellos valores de s para los que el límite anterior exista como número real (Vergel et al., 2022).

Teorema 2.2 Cengel (2022) plantea que para k constante se tiene

1. $L\{1\}(s) = \frac{1}{s}, s > 0$ $L\{k\}(s) = \frac{k}{s}, s > 0$
2. $L\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0, n = 1, 2, \dots$
3. $L\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \text{ para } s > a$
4. $L\{\sin(kt)\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}, \text{ para } s > 0$
5. $L\{\cos(kt)\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}, \text{ para } s > 0$
6. $L\{\sin(kt)\}(s) = \frac{s}{s^2-k^2}, \text{ para } s > |k|$
7. $L\{\cos(kt)\}(s) = \frac{k}{s^2-k^2}, \text{ para } s > |k|$
8. $L\{t^n e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a, n = 1, 2, \dots$

Demostración. A continuación, se verifican los dos primeros literales.

1. A partir de la definición se obtiene:

$$L\{1\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}(1)dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

2. La demostración se realiza por el método de inducción. Para ello, se supone que $s > 0$ y se utiliza el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{t^n}{e^{st}} \right| = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para $n = 1$, se obtiene:

$$L\{t\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}t dt \tag{2.4}$$

Ahora se resolverá la integral definida en (2.4) por el método de integración por partes. Sea $u = t$ y $dv = e^{-st}dt$, entonces se tiene $du = dt$ y $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ respectivamente. Luego,

$$L\{t\}(s) = \left. \frac{te^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st}dt = -(0-0) + \frac{1}{s} \left. \frac{1}{-s} e^{-st} \right|_0^{\infty} = -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2}.$$

A continuación, se supone que la hipótesis se cumple para $n-1$ y se verifica que también se satisface para n . En efecto, sea $u = t^n$ y $dv = e^{-st}dt$, entonces $du = nt^{n-1}dt$ y $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$, respectivamente. Reemplazando en:

$$L\{t^n\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}t^n dt$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
L\{t^n\}(s) &= -\left.\frac{t^n e^{-st}}{s}\right|_0^\infty + \underbrace{\frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt}_{L(t^{n-1})(s)} = -(0-0) + \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\}(s) \\
&= \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\}(s).
\end{aligned}$$

Pero por la hipótesis de inducción

$$L\{t^{n-1}\}(s) = \frac{(n-1)!}{s^n},$$

luego

$$L\{t^n\}(s) = \frac{n}{s} \frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

De manera similar se verifican los literales restantes.

Definición 2.8 Según Ross (2021), si $L[f(t)] = F(s)$, se dice que $f(t)$ es la transformada inversa de $F(s)$ y se escribe

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

Teorema 2.3 Bravo (2006), plantea que para a y k constantes se tiene

1. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$, y $L^{-1}\left\{\frac{k}{s}\right\} = k$, si $s > 0$.
2. $L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n$, y $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$, si $s > 0$.
3. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$, si $s > a$.
4. $L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \text{sen}(kt)$, y $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\} = \frac{\text{sen}(kt)}{k}$, si $s > 0$.
5. $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos(kt)$, si $s > 0$.
6. $L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \text{senh}(kt)$ y $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-k^2}\right\} = \frac{\text{senh}(kt)}{k}$, si $s > |k|$.

$$7. L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 - k^2} \right\} = \cosh(kt), \text{ si } s > |k|.$$

$$8. L^{-1} \left\{ \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \right\} = t^n e^{at} \text{ y } L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \right\} = \frac{t^n e^{at}}{n!}, \text{ si } s > a.$$

Ejemplo 2.1 Evaluar $L^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-3)(s+2)(s-1)} \right\}$.

Solución. Por medio de fracciones parciales se obtiene

$$\frac{3s+1}{(s-3)(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1}, \quad (2.5)$$

donde A, B y C son constantes. Luego, evaluando la transformada inversa en la ecuación (2.5) se obtiene

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-3)(s+2)(s-1)} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-1} \right\} \\ &= AL^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} + BL^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + CL^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando el método de fracciones lineales en la ecuación (2.5), se obtiene $A = 1$, $B = -1/3$ y $C = -2/3$. Utilizando la tabla de transformadas se tiene

$$L^{-1} \left\{ \frac{3s+1}{(s-3)(s+2)(s-1)} \right\} = e^{3t} - \frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^t$$

Ejemplo 2.2 Con factores lineales repetidos

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2(s+2)^3} \right\} &= L^{-1} \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3} \right\} \\ &= AL^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} + BL^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} + CL^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + DL^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} \\ &\quad + EL^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^3} \right\} \\ &= A + Bt + Ce^{-2t} + D \frac{te^{-2t}}{1!} + E \frac{t^2e^{-2t}}{2!}. \end{aligned}$$

Utilizando el método de las fracciones parciales, se tiene

$$A = -\frac{1}{16}, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = \frac{1}{16}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{4}$$

luego

$$L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2(s+2)^3} \right\} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}$$

Para los teoremas y propiedades siguientes, se asume que $L[f(t)] = F(s)$ y $L[g(t)] = G(s)$. Estos fueron tomados, conjuntamente con sus demostraciones de Vergel et al., (2022).

Teorema 2.4 Si $f(t)$ es continua a trozos para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t > T (T \in \mathbb{R}, T > 0)$, entonces $L[f(t)] = F(s)$ existe para $s > c$ y para algún $c \in \mathbb{R}$. Además

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L[f(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

Teorema 2.5 (Primer teorema de Traslación). Si a es un número real cualquiera, entonces

$$L[e^{at}f(t)] = F(s-a) = L[f(t)]_{s \rightarrow s-a}$$

Equivalentemente,

$$e^{at}f(t) = L^{-1}[F(s-a)] = L[f(s)]_{s \rightarrow s-a}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} L\{e^{at}f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt \\ L\{f(t)\}(s-a) &= F(s-a). \end{aligned}$$

Teorema 2.6 (Segundo teorema de Traslación) Si $a > 0$, entonces

$$L[u_a(t)f(t-a)] = e^{-as}L[f(t)] = e^{-as}F(s)$$

Equivalentemente,

$$u_a(t)f(t-a) = L^{-1} \left[e^{-as} F(s) \right]$$

Teorema 2.7 (Derivadas de una transformada). Para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{L^n}{Ls^n} \{L[f(t)]\}$$

Equivalentemente,

$$f(t) = \frac{(-1)^n}{t^n} L^{-1} \left\{ \frac{L^n}{Ls^n} [F(s)] \right\}$$

Demostración. Por inducción sobre n , se tiene que para $n = 1$ se sigue

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

luego derivando $F(s)$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} (e^{-st} f(t)) dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st} f(t) dt = - \int_0^\infty e^{-st} (tf(t)) dt \\ &\stackrel{\text{def.c.}}{=} -L\{tf(t)\}(s), \end{aligned}$$

entonces

$$L\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds} F(s)$$

Suponga que se cumple para $n = k$

$$L\{t^k f(t)\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s).$$

Ahora se prueba que se cumple para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
L\{t^{k+1}f(t)\}(s) &= L\{tt^k f(t)\}(s) \\
&\stackrel{n=1}{=} -\frac{d}{ds} L\{t^k f(t)\}(s) \\
&\stackrel{n=k}{=} -\frac{d}{ds} \left[(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s) \right] \\
&= (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} F(s).
\end{aligned}$$

Teorema 2.8 (Transformada de una Derivada). Si $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es continua parte por parte para $t \geq 0$, entonces,

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Teorema 2.9 (Teorema de Convolución) Si $f(t), g(t)$ son continuas parte por parte y de orden exponencial para $t \geq 0$, entonces

$$L[f * g] = F(s)G(s)$$

Equivalentemente,

$$L^{-1}[F(s)G(s)] = f * g$$

Teorema 2.10 (Transformada de una Función Periódica). Si $f(t)$ es continua parte por parte y de orden exponencial para $t \geq 0$, y es periódica con periodo T (para $T > 0, f(t+T) = f(t)$), entonces

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

Definición 2.9 La función Delta de Dirac, está definida de la siguiente forma

$$\delta(t - t_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t - t_0)$$

donde,

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & t_0 - a < t < t_0 + a \\ 0, & t \leq t_0 - a, 0 \text{ bien } t \geq t_0 + a \end{cases}$$

$\delta_a(t - t_0)$ es conocida como la función impulso unitario y $\delta(t - t_0)$ es la llamada Función Delta de Dirac (que entre otras cosas realmente no es una función en el sentido tradicional).

Teorema 2.11 (La transformada de la función Delta).

$$L[\delta(t - t_0)] = e^{-st_0}.$$

En particular

$$L[\delta(t)] = 1$$

2.2.3.1. Aplicaciones de la transformada de Laplace a las Ecuaciones diferenciales

Tal como lo señala Ross (2021), la Transformada de Laplace puede ser utilizada para resolver ecuaciones diferenciales con valores iniciales, ecuaciones integrales y ecuaciones integro diferenciales. Los dos últimos tipos de ecuaciones son como se definen a continuación:

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(x)h(t-x)dx$$

Donde las funciones g, h son conocidas

$$f'(t) = g(t) + \int_0^t f(x)h(t-x)dx,$$

donde las funciones g, h son conocidas. Para resolver cualquiera de estas ecuaciones se debe tomar transformada a ambos lados de la igualdad, resolver la ecuación algebraica en s y luego tomar transformada inversa para hallar la solución en t . Los pasos son:

1. Aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación.

2. Aplicar el teorema de la transformada de la derivada.

$$L\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$L\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

Cuando las condiciones iniciales no están dadas en $t = 0$, sino en $t = a$, se hace el cambio de variable $\tau = t - a$, con este cambio de variable, la nueva E.D. tiene condiciones iniciales en $\tau = 0$

1. Conseguir una función en s , es decir, despejar $Y(s)$.

2. Hallar la transformada inversa: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$.

Ejemplo 2.3 Resolver el problema de valores iniciales (Vergel et al., 2022)

$$\frac{d^3Y}{dt^3} + 4\frac{d^2Y}{dt^2} + 5\frac{dY}{dt} + 2Y = 10\cos(t), Y(0) = 0, Y'(0) = 0, Y''(0) = 3$$

Paso 1. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación diferencial

$$L\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\} + 4L\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} + 5L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} + 2L\{Y(t)\} = 10L\{\cos(t)\}$$

Denotando $L\{Y(t)\}$ por $y(s)$, entonces las siguientes transformadas

$$L\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\}, L\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\}, L\left\{\frac{dY}{dt}\right\}$$

en función de $y(s)$, $Y(0)$, $Y'(0)$, $Y''(0)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^3Y}{dt^3}\right\} &= s^3y(s) - s^2Y(0) - sY'(0) - Y''(0) \\ L\left\{\frac{d^2Y}{dt^2}\right\} &= s^2y(s) - sY(0) - Y'(0) \\ L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} &= sy(s) - Y(0) \end{aligned}$$

Aplicando las condiciones iniciales se reducen a

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{d^3 Y}{dt^3} \right\} &= s^3 y(s) - 3, \\ L \left\{ \frac{d^2 Y}{dt^2} \right\} &= s^2 y(s), \\ L \left\{ \frac{dY}{dt} \right\} &= sy(s), \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{d^3 Y}{dt^3} \right\} + 4L \left\{ \frac{d^2 Y}{dt^2} \right\} + 5L \left\{ \frac{dY}{dt} \right\} + 2L\{Y(t)\} &= s^3 y(s) - 3 + 4s^2 y(s) + 5sy(s) + 2y(s) \\ &= [s^3 + 4s^2 + 5s + 2] y(s) - 3 \end{aligned}$$

donde utilizando la tabla de transformadas, se tiene

$$10L\{\cos(t)\} = \frac{10s}{s^2 + 1}.$$

Por tanto, la ecuación se reduce a

$$(s^3 + 4s^2 + 5s + 2) y(s) - 3 = \frac{10s}{s^2 + 1}$$

con la incógnita $y(s)$.

Paso 2. Resolviendo ahora la ecuación para $y(s)$, se tiene

$$(s^3 + 4s^2 + 5s + 2) y(s) - 3 = \frac{3s^2 + 10s + 3}{s^2 + 1}$$

$$y(s) - 3 = \frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)}.$$

Paso 3. Determinar

$$L^{-1} \left\{ \frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} \right\}.$$

Empleando el método de descomposición en fracciones simples y así encontrar

una forma de la expresión para $y(s)$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} &= \frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s + 1)^2(s + 2)} \\ &= \frac{A}{s + 2} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{(s + 1)^2} + \frac{Ds + E}{s^2 + 1}.\end{aligned}$$

A partir de aquí, se deduce

$$\begin{aligned}3s^2 + 10s + 3 &= A(s + 1)^2(s^2 + 1) + B(s + 2)(s + 1)(s^2 + 1) \\ &\quad + C(s + 2)(s^2 + 1) + (Ds + E)(s + 2)(s + 1)^2\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}3s^2 + 10s + 3 &= (A + B + D)s^4 + (2A + 3B + C + 4D + E)s^3 \\ &\quad + (2A + 3B + 2C + 5D + 4E)s^2 \\ &\quad + (2A + 3B + C + 2D + 5E)s \\ &\quad + (A + 2B + 2C + 2E)\end{aligned}$$

Se obtiene así el sistema de ecuaciones

$$A + B + D = 0$$

$$2A + 3B + C + 4D + E = 0$$

$$2A + 3B + 2C + 5D + 4E = 3$$

$$2A + 3B + C + 2D + 5E = 10$$

$$A + 2B + C + 2E = 3.$$

Haciendo $s = -1$, se encuentra que $C = -2$ y haciendo $s = -2$ en esta misma ecuación se tiene $A = -1$. Utilizando estos valores de A y C el sistema da

$$B = 2, D = -1, \quad y \quad E = 2$$

Sustituyendo estos valores de A, B, C, D y E se obtiene

$$\begin{aligned}
L^{-1} \left\{ \frac{3s^2 + 10s + 3}{(s^2 + 1)(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} \right\} &= -L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + 2L^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} \\
&\quad - 2L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} - L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s^2 + 1)} \right\} \\
&\quad + 2L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \right\}.
\end{aligned}$$

Utilizando la tabla de transformadas, se obtiene

$$Y(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} - \cos(t) + 2\sin(t)$$

2.2.3.2. Solución de sistemas lineales usando la transformación de Laplace

Edwards y Penney (2009), sostienen que la aplicación del método de la transformación de Laplace para hallar la solución de un sistema de primer orden

$$\begin{aligned}
a_1 \frac{dX}{dt} + a_2 \frac{dY}{dt} + a_3x + a_4Y &= B_1(t) \\
b_1 \frac{dX}{dt} + b_2 \frac{dY}{dt} - b_3x + b_4Y &= B_2(t)
\end{aligned}$$

donde $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3$ y b_4 son constantes y B_1 y B_2 son funciones conocidas que satisfacen las condiciones iniciales

$$X(0) = c_1 \quad \text{e} \quad Y(0) = c_2$$

donde c y c_2 son constantes. Suponga que $x(s)$ denota la transformada $L\{X(t)\}$ e $y(s)$ denota la transformada $L\{Y(t)\}$. Se procede entonces como sigue:

1. Se toma la transformada de Laplace en ambos miembros de cada una de las dos ecuaciones del sistema, se aplica el teorema y las condiciones iniciales; igualando los resultados se obtiene una ecuación algebraica lineal en las dos incógnitas $x(s)$ e $y(s)$.
2. Para determinar explícitamente $y(s)$ y $x(s)$ se resuelve el sistema lineal de dos ecuaciones algebraicas, obtenido en la etapa precedente.

3. Una vez halladas $y(s)$ y $x(s)$, se emplea la tabla de transformadas para determinar la solución $X(t) = L^{-1}\{x(s)\}$ e $Y(t) = L^{-1}\{y(s)\}$ del problema de valores iniciales dado.

Ejemplo 2.4 Usar la transformación de Laplace para hallar la solución del sistema.

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} - 6X + 3Y &= 8e^t \\ \frac{dY}{dt} - 2X - Y &= 4e^t\end{aligned}$$

que satisface las condiciones iniciales $X(0) = -1, Y(0) = 0$.

Paso 1. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema, se tiene

$$\begin{aligned}L\left\{\frac{dX}{dt}\right\} - 6L\{X(t)\} + 3L\{Y(t)\} &= L\{8e^t\} \\ L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} - 2L\{X(t)\} - L\{Y(t)\} &= L\{4e^t\}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Designando $L\{X(t)\}$ por $x(s)$ y $L\{Y(t)\}$ por $y(s)$. Aplicando entonces el teorema y las condiciones iniciales, se tiene

$$\begin{aligned}L\left\{\frac{dX}{dt}\right\} &= sx(s) - X(0) = sx(s) + 1 \\ L\left\{\frac{dY}{dt}\right\} &= sy(s) - Y(0) = sy(s)\end{aligned}$$

Usando la tabla de transformadas

$$L\{8e^t\} = \frac{8}{s-1} \text{ y } L\{4e^t\} = \frac{4}{s-1}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}sx(s) + 1 - 6x(s) + 3y(s) &= \frac{8}{s-1} \\ sy(s) - 2x(s) - y(s) &= \frac{4}{s-1}\end{aligned}$$

que al simplificarse quedan en la forma

$$\begin{aligned}
(s-6)x(s) + 3y(s) &= \frac{8}{s-1} - 1 \\
-2x(s) + (s-1)y(s) &= \frac{4}{s-1} \\
(s-6)x(s) + 3y(s) &= \frac{-s+9}{s-1} \\
-2x(s) + (s-1)y(s) &= \frac{4}{s-1}
\end{aligned}$$

Paso 2. Resolviendo el sistema lineal algebraico cuyas incógnitas son $y(s)$ y $x(s)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
(s-1)(s-6)x(s) + 3(s-1)y(s) &= -s+9 \\
-6x(s) + 3(s-1)y(s) &= \frac{12}{s-1}
\end{aligned}$$

Restando queda

$$(s^2 - 7s + 12)x(s) = -s + 9 - \frac{12}{s-1},$$

de donde

$$x(s) = \frac{-s^2 + 10s - 21}{(s-1)(s-3)(s-4)} = \frac{-s+7}{(s-1)(s-4)}$$

De igual modo, se tiene

$$y(s) = \frac{2s-6}{(s-1)(s-3)(s-4)} = \frac{2}{(s-1)(s-4)}$$

Paso 3. Determinar ahora

$$X(t) = L^{-1}\{x(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{-s+7}{(s-1)(s-4)}\right\}$$

e

$$Y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s-4)}\right\}$$

se determina primero $X(s)$. Usando fracciones simples se escribe

$$\frac{-s+7}{(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4}$$

y se encuentra

$$A = -2 \quad y \quad B = 1,$$

entonces

$$X(t) = -2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}$$

y usando la tabla de transformadas, se obtiene

$$X(t) = -2e^t + e^{4t}$$

De igual forma se deduce $Y(s)$. Se obtiene así

$$Y(t) = -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}$$

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo, se especifican los componentes metodológicos que guiaron el proceso de elaboración de esta investigación. Aquí se presenta el diseño, método, tipo, enfoque y procedimientos realizados para la culminación de este proyecto.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño de la investigación

La metodología de esta investigación se rige por un diseño no experimental, tal como lo describen Hernández-Sampieri et al. (2018), puesto que no se llevó a cabo una manipulación intencional de las variables. En cuanto al tiempo de estudio, se adoptó un enfoque transversal, que Hernández y sus coautores definen como una estrategia en la que los datos se recopilan en un único punto temporal.

3.2.2. Método de investigación

Este estudio estuvo basado en el uso del método analítico-deductivo con fines de analizar la transformada de Laplace en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes no constantes. Flores (2013) señala que el método analítico es una estrategia de investigación que busca desglosar un fenómeno en sus componentes esenciales para entender su naturaleza, causas y efectos. Paralelamente, se aplicó el razonamiento deductivo, lo que permitió derivar conclusiones a partir de los hallazgos obtenidos y de esta manera, confirmar los objetivos que se establecen para este estudio.

3.2.3. Tipo de investigación

Tal como se plantea en Martínez (2018), esta investigación se fundamentó en una metodología descriptiva, debido a que se establecieron caracterizaciones y/o condiciones para la obtención de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

sin coeficientes constantes.

3.2.4. Enfoque de la investigación

Este estudio contempló un enfoque cualitativo debido a la naturaleza intrínsecamente compleja de la transformada de Laplace y los sistemas de ecuaciones diferenciales (Creswell y Poth, 2018).

3.3. Procedimientos.

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso a realizar en este trabajo de investigación:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, sobre los aspectos básicos y fundamentaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y la transformada de Laplace.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la pertinencia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología, en coordinación con el asesor.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó nuevamente tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada con el borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.
8. Luego de esto, se integrará al trabajo las observaciones realizadas por los jurados para su posterior entrega definitiva a la Universidad.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presenta inicialmente una caracterización de las EDO sin coeficientes constantes, tanto a través de teoremas y ejemplos, para luego establecer las condiciones para resolver los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias, tanto cuando los coeficientes son polinómicas de grado menor o igual que 2, como cuando estos están dados en terminos de funciones exponenciales.

4.2. Caracterización de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes.

En esta sección, se emplea la transformada de Laplace como método para derivar soluciones explícitas a un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden cuyos coeficientes varían con la variable independiente:

$$p_2(t)y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t),$$

mediante la aplicación de la transformada de Laplace. Aquí, $p_0(t)$, $p_1(t)$ y $p_2(t)$ son funciones dependientes de t . Se definen condiciones específicas sobre p_0 , p_1 y p_2 para obtener soluciones explícitas a estas ecuaciones diferenciales de segundo orden, las cuales se plantean en términos de funciones básicas o elementales.

Proposición 4.2.1 Considérese $p(t) \cdot y(t)$ perteneciente a $C^2(a, b)$. Entonces, se establece que

$$\mathcal{L}\{p(t)y'\} = -\mathcal{L}\{p'(t)y\} + s\mathcal{L}\{p(t)y\} - p(0)y(0) \quad (4.1)$$

y además,

$$\mathcal{L}\{p(t)y''\} = \mathcal{L}\{p''(t)y\} - 2s\mathcal{L}\{p'(t)y\} + s^2\mathcal{L}\{p(t)y\} - p(0)y'(0) + p'(0)y(0) - sp(0)y(0) \quad (4.2)$$

Demostración. Se considera la transformada de Laplace del producto de $p(t)$ y la

derivada de $y(t)$, expresada como:

$$\mathcal{L}\{p(t)y'\} = \int_0^\infty p(t)y'e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b p(t)y'e^{-st} dt.$$

La integración por partes, junto con la propiedad de que y tiene un crecimiento de orden exponencial, conduce a:

$$\mathcal{L}\{p(t)y'\} = -\mathcal{L}\{p'(t)y\} + s\mathcal{L}\{p(t)y\} - p(0)y(0).$$

Para deducir la transformada de Laplace de la segunda derivada temporal de $y(t)$ multiplicada por $p(t)$, se observa que:

$$\mathcal{L}\{p(t)y''\} = -\mathcal{L}\{p'(t)y'\} + s\mathcal{L}\{p(t)y'\} - p(0)y'(0).$$

La aplicación repetida de la propiedad de derivación en la transformada de Laplace, junto con la aplicación de las condiciones iniciales conocidas de $y(t)$ y sus derivadas, lleva a la siguiente relación:

$$\mathcal{L}\{p(t)y''\} = \mathcal{L}\{p''(t)y\} - 2s\mathcal{L}\{p'(t)y\} + s^2\mathcal{L}\{p(t)y\} - p(0)y'(0) + p'(0)y(0) - sp(0)y(0).$$

Teorema 4.1 Considérese la ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes variables, M : $p_2(t)y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t)$, donde $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$ y $g(t)$ son funciones continuamente diferenciables en el intervalo (a, b) . Se establecen las siguientes condiciones:

$$p_0(t) = (c_1t + c_2)p_2(t) + (c_3t + c_4)p_1(t) + \frac{dp_2}{dt}(t) + c_5, \quad (4.3)$$

$$p_1(t) = (c_3t + c_4)p_2(t) + c_6\frac{dp_2}{dt}(t) + c_7, \quad (4.4)$$

con $c_5 = 0$, $c_7 = 0$, $c_6 = 2$, y $c_1 \neq 0$ o $c_3 \neq 0$. Además, $p_2(t)$ no es constante ni lineal, donde c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_6 , y c_7 son constantes reales. Bajo estas circunstancias, la

transformada de Laplace de $p_2(t)y$ está dada por:

$$\mathcal{L}\{p_2(t)y\} = e^{h(s)} \left[\int e^{-h(s)} \frac{f(s)}{c_3s + c_1} ds + ce^{h(s)} \right], \quad (4.5)$$

donde

$$f(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} + p_2(0)y'(0) - p_1(0)y(0) + sp_2(0)y(0) + g_1(0)y(0), \quad (4.6)$$

$$h(s) = \int \frac{s^2 + c_4s + c_2 - c_3}{c_3s + c_1} ds, \quad (4.7)$$

y c es una constante.

Por lo tanto, la solución explícita de M se expresa como:

$$y(t) = \frac{1}{p_2(t)} \mathcal{L}^{-1} \left[e^{h(s)} \left(\int e^{-h(s)} \frac{f(s)}{c_3s + c_1} ds + ce^{h(s)} \right) \right]. \quad (4.8)$$

Demostración. El análisis comienza aplicando la Transformada de Laplace a cada término de la ecuación diferencial dada por E . Se utiliza la propiedad de linealidad de la Transformada de Laplace, lo que permite expresar la transformada de la suma como la suma de las transformadas:

$$\mathcal{L}\{p_2(t)y''\} + \mathcal{L}\{p_1(t)y'\} + \mathcal{L}\{p_0(t)y\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Posteriormente, se incorpora la propiedad de las transformadas de Laplace de productos de funciones y sus derivadas. Esto se traduce en una combinación lineal de términos que involucran y , y' , y y'' , cada uno multiplicado por una función de t :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{p_2(t)y''\} - 2s\mathcal{L}\{p_2(t)y'\} + s^2\mathcal{L}\{p_2(t)y\} - \\ \mathcal{L}\{p_1(t)y'\} + s\mathcal{L}\{p_1(t)y\} + \mathcal{L}\{p_0(t)y\} = \mathcal{L}\{g(t)\} + \text{condiciones iniciales} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sustituyendo los coeficientes $p_0(t)$, $p_1(t)$, y $p_2(t)$ por sus expresiones dadas en las condiciones del teorema, se llega a una ecuación más sencilla. Luego, aplicando la regla de Leibniz para la transformada de productos y considerando las condiciones

iniciales para y y y' , se observa que la transformada de Laplace de $p_2(t)y$ puede ser representada en términos de su derivada con respecto a s . Esto proporciona una nueva ecuación diferencial de primer orden en términos de s :

$$-(c_3s + c_1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{p_2(t)y\} + (s^2 + c_4s + c_2 - c_3)\mathcal{L}\{p_2(t)y\} = f(s)$$

donde $f(s)$ es una función que contempla no solo la transformada de Laplace de la función forzante $g(t)$, sino también las condiciones iniciales del problema. Finalmente, una vez que se ha obtenido $\mathcal{L}\{p_2(t)y\}$, se puede aplicar la transformada inversa de Laplace para encontrar $y(t)$, que es la solución de la ecuación diferencial inicial.

Ejemplo 4.1 Se consideran las condiciones iniciales $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, con $y(0) = 0$, la derivada $y'(0) = 0$ y la función $g(t) = 1 + 2t$. Y

$$p_0(t) = -2p_2(t)y'' + (t - 2)p_2'(t)y' + p_2''(t).$$

$$p_1(t) = (t - 2)p_2(t) + 2p_2'(t).$$

Centrando la atención en la familia de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables dada por:

$$p_2(t)y'' + ((t - 2)p_2(t) + 2p_2'(t))y' + (-2p_2(t) + (t - 2)p_2'(t) + p_2''(t))y = -1 + 2t$$

La forma explícita de la solución de esta ecuación se puede observar como:

$$y(t) = \frac{t^2}{2p_2(t)}$$

A través del uso de la ecuación (4.8), se llega a:

$$\mathcal{L}\{p_2(t)y''\} = \frac{1}{s^3}e^{\frac{t^2}{2}} - \frac{(s + 2)e^{\frac{t^2}{2}}}{2} \frac{ds}{s^2} + \frac{c}{s^3}e^{\frac{t^2}{2}}$$

donde el término c es determinado por las condiciones iniciales. Por consiguiente:

$$\mathcal{L}\{p_2(t)y''\} = 1 + \frac{t^2}{s^3} + \frac{ce^{\frac{t^2}{2}}}{s^3}$$

La linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$ permite expresar y de la forma:

$$y = \frac{1}{p_2(t)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + \frac{c}{p_2(t)}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{s^3}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2}$$

Aunque la anti-transformada de $\frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{s^3}$ no es trivial, se puede argumentar que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s^3} = 0$$

,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{s^3} = \infty$$

Utilizando la ecuación (4.2), se concluye que:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{p_2(t)y''\} = 0$$

Por lo tanto, se establece que $c = 0$ y, en consecuencia, la solución es:

$$y(t) = \frac{t^2}{2p_2(t)}$$

Teorema 4.2 En el contexto de las condiciones (4.3) y (4.4), donde $c_5 = 0$, $c_7 = 0$, $c_6 = 2$, $c_1 = 0$, y $c_3 = 0$, y considerando que $p_2(t)$ no corresponde a una función lineal, se establece que la Transformada de Laplace de $p_2(t)y$ es:

$$\mathcal{L}\{p_2(t)y\} = \frac{f(s)}{s^2 + c_4s + c_2}, \quad (4.10)$$

donde $f(s)$ es proporcionada por la relación (4.6). En consecuencia, se deduce que:

$$y(t) = \frac{1}{p_2(t)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s^2 + c_4 s + c_2} \right\}. \quad (4.11)$$

Bajo las condiciones adicionales (4.3) y (4.4), con $c_1 = 0$, $c_3 = 0$, y donde $p_2(t) = c_9 t + c_{10}$, la expresión de la transformada de Laplace de y es:

$$\mathcal{L}(y) = e^{v(s)} \left(\int e^{-v(s)} \frac{f(s)}{c_9 s^2 + c_4 c_9 s + c_2 c_9} ds + k e^{v(s)} \right), \quad (4.12)$$

en la cual:

$$v(s) = \int \left(c_{10} s^2 + (-2c_9 + c_4 c_{10} + c_6 c_9 + c_7) s + c_{10} + c_5 \right) ds. \quad (4.13)$$

Por ende, la función $f(s)$ es determinada por la relación (4.6). Por lo tanto, la solución al problema E se presenta de la siguiente manera:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{v(s)} \left(\int e^{-v(s)} \frac{f(s)}{c_9 s^2 + c_4 c_9 s + c_2 c_9} ds + k e^{v(s)} \right) \right\}. \quad (4.14)$$

Demostración. En el contexto de las condiciones (4.3) y (4.4), donde $c_5 = 0$, $c_7 = 0$, $c_6 = 2$, $c_1 = 0$, y $c_3 = 0$, y considerando que $p_2(t)$ no corresponde a una función lineal, se establece que la transformada de Laplace de $p_2(t)y$ es:

$$\mathcal{L}\{p_2(t)y\} = \frac{f(s)}{s^2 + c_4 s + c_2}, \quad (4.15)$$

donde $f(s)$ es proporcionada por la relación (4.6). En consecuencia, se deduce que:

$$y(t) = \frac{1}{p_2(t)} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f(s)}{s^2 + c_4 s + c_2} \right\}. \quad (4.16)$$

Bajo las condiciones adicionales (4.3) y (4.4), con $c_1 = 0$, $c_3 = 0$, y donde $p_2(t) = c_9 t + c_{10}$, la expresión de la transformada de Laplace de y es:

$$\mathcal{L}(y) = e^{v(s)} \left(\int e^{-v(s)} \frac{f(s)}{c_9 s^2 + c_4 c_9 s + c_2 c_9} ds + k e^{v(s)} \right), \quad (4.17)$$

en la cual:

$$v(s) = \int \left(c_{10}s^2 + (-2c_9 + c_4c_{10} + c_6c_9 + c_7)s + c_{10} + c_5 \right) ds. \quad (4.18)$$

Por ende, la función $f(s)$ es determinada por la relación (4.6). Por lo tanto, la solución al problema E se presenta de la siguiente manera:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ e^{v(s)} \left(\int e^{-v(s)} \frac{f(s)}{c_9s^2 + c_4c_9s + c_2c_9} ds + ke^{v(s)} \right) \right\}. \quad (4.19)$$

Así se concluye la demostración del teorema. También se puede notar que, mientras las condiciones (4.3) y (4.4), $c_1 = 0$, $c_3 = 0$, $p_2(t) = c_5t + c_10$ conducen a una ecuación diferencial de primer orden. Las condiciones (4.3) y (4.4), $c_5 = 0$, $c_7 = 0$, $c_6 = 2$, $c_1 = 0$, y $p_2(t)$ no es una función lineal simple que lleva a una ecuación algebraica.

4.3. Análisis de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes, mediante la transformada de Laplace

Cuando los coeficientes en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales no son constantes, sino que varían con la variable independiente (usualmente el tiempo), la forma general de tal sistema para n funciones desconocidas es la siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \quad (4.20)$$

En este sistema:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las funciones desconocidas de la variable independiente t .
- $\frac{dx_n}{dt}$ es la derivada de x_n con respecto a t .
- Los coeficientes $a_{ij}(t)$ (donde $i, j = 1, 2, \dots, n$) son funciones de t que determinan cómo cada función x_j influye en la tasa de cambio de x_n .

Aplicando la transformada de Laplace a cada término de cada ecuación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\frac{dx_1}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{a_{11}(t)x_1(t)\} + \mathcal{L}\{a_{12}(t)x_2(t)\} + \dots + \mathcal{L}\{a_{1n}(t)x_n(t)\} + \mathcal{L}\{f_1(t)\}, \\
\mathcal{L}\left\{\frac{dx_2}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{a_{21}(t)x_1(t)\} + \mathcal{L}\{a_{22}(t)x_2(t)\} + \dots + \mathcal{L}\{a_{2n}(t)x_n(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}, \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\left\{\frac{dx_n}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{a_{n1}(t)x_1(t)\} + \mathcal{L}\{a_{n2}(t)x_2(t)\} + \dots + \mathcal{L}\{a_{nn}(t)x_n(t)\} + \mathcal{L}\{f_n(t)\}.
\end{aligned}$$

Usando la propiedad de linealidad de la Transformada de Laplace y la regla para la derivada, así como la propiedad de convolución para los productos de funciones $a_{ij}(t)$ y $x_j(t)$, se puede escribir el sistema en el dominio de Laplace:

$$\begin{aligned}
sX_1(s) - x_1(0) &= (A_{11} * X_1)(s) + (A_{12} * X_2)(s) + \dots + (A_{1n} * X_n)(s) + F_1(s), \\
sX_2(s) - x_2(0) &= (A_{21} * X_1)(s) + (A_{22} * X_2)(s) + \dots + (A_{2n} * X_n)(s) + F_2(s), \\
&\vdots \\
sX_n(s) - x_n(0) &= (A_{n1} * X_1)(s) + (A_{n2} * X_2)(s) + \dots + (A_{nn} * X_n)(s) + F_n(s),
\end{aligned}$$

donde $X_i(s)$ es la transformada de Laplace de $x_i(t)$, $A_{ij}(s)$ es la transformada de $a_{ij}(t)$, $(A_{ij} * X_j)(s)$ representa la transformada de la convolución de $a_{ij}(t)$ y $x_j(t)$, es decir, $A_{ij}(s) \cdot X_j(s)$, $F_i(s)$ es la transformada de la función de forzamiento $f_i(t)$ y $x_i(0)$ son las condiciones iniciales de $x_i(t)$.

Ahora bien, la complejidad de resolver este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales es bastante alta, ya que no se precisa en general de que tipo son las mismas, además de las siguientes razones:

1. Los coeficientes no son constantes: Si las funciones $A_{ij}(s)$ no son constantes, es decir, si involucran productos, potencias u otras operaciones no lineales de las variables $X_i(s)$, el sistema se convierte en un sistema de ecuaciones diferenciales

no lineales. La no linealidad tiende a complicar significativamente la resolución, ya que muchas técnicas simplificadoras que funcionan para sistemas lineales ya no son aplicables.

2. Dependencia de $A_{ij}(s)$ entre sí: En algunos casos, las funciones $A_{ij}(s)$ pueden depender unas de otras, lo que crea una estructura de ecuaciones acopladas y más complicadas de resolver.
3. Comportamiento asintótico: Si las funciones $A_{ij}(s)$ tienen comportamientos asintóticos complejos o singularidades en el dominio de Laplace, la determinación de soluciones analíticas puede ser aún más difícil. Las singularidades pueden dar lugar a soluciones transitorias complicadas y efectos de estado estacionario no triviales.
4. Condición de estabilidad. La estabilidad de este tipo de sistema puede ser difícil de determinar si las funciones $A_{ij}(s)$ son complicadas o no se conocen en detalle.

En definitiva, la complejidad de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con funciones $A_{ij}(s)$ radica en una combinación de factores que incluyen la no linealidad, la dependencia mutua, el comportamiento asintótico y el número de incógnitas. Dependiendo de la naturaleza específica del sistema y las funciones $A_{ij}(s)$, la resolución puede requerir técnicas avanzadas y, en algunos casos, puede no ser posible encontrar soluciones analíticas exactas.

Es por esto, que en esta tesis se plantea la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias según algunos parámetros específicos y de acuerdo al número de ecuaciones y variables.

4.3.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes de funciones algebraicas

Para este apartado, se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (a_2t^2 + a_1t + a_0)x + (b_2t^2 + b_1t + b_0)y + f(t), \\ \frac{dy}{dt} &= (c_2t^2 + c_1t + c_0)x + (d_2t^2 + d_1t + d_0)y + g(t),\end{aligned}\tag{4.21}$$

donde a_i, b_i, c_i, d_i son constantes reales y $f(t)$ y $g(t)$ son funciones definidas en t . El sistema de ecuaciones diferenciales con los términos transformados de Laplace se vería así:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{a_2t^2x\} + \mathcal{L}\{a_1tx\} + \mathcal{L}\{a_0x\} + \mathcal{L}\{b_2t^2y\} + \mathcal{L}\{b_1ty\} + \mathcal{L}\{b_0y\} + \mathcal{L}\{f(t)\},$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{c_2t^2x\} + \mathcal{L}\{c_1tx\} + \mathcal{L}\{c_0x\} + \mathcal{L}\{d_2t^2y\} + \mathcal{L}\{d_1ty\} + \mathcal{L}\{d_0y\} + \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

La transformada de Laplace para cada término del sistema de ecuaciones diferenciales, utilizando la propiedad de la derivada, es la siguiente:

$$sX(s) - x(0) = -a_2\frac{d^2X(s)}{ds^2} + a_1\frac{dX(s)}{ds} + a_0X(s) - b_2\frac{d^2Y(s)}{ds^2} + b_1\frac{dY(s)}{ds} + b_0Y(s) + F(s),$$

$$sY(s) - y(0) = -c_2\frac{d^2X(s)}{ds^2} + c_1\frac{dX(s)}{ds} + c_0X(s) - d_2\frac{d^2Y(s)}{ds^2} + d_1\frac{dY(s)}{ds} + d_0Y(s) + G(s),$$

Donde $X(s)$ y $Y(s)$ son las transformadas de Laplace de $x(t)$ y $y(t)$, respectivamente, y $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$. Las derivadas de $X(s)$ y $Y(s)$ con respecto a s representan las transformadas de los productos de t^n y las funciones originales $x(t)$ y $y(t)$.

La ecuación transformada de Laplace, después de aplicar la transformada de Laplace a la ecuación diferencial de segundo orden y asumiendo que la primera derivada de $x(0)$ es cero y que $y(0)$ y su primera derivada también son cero, es la siguiente:

$$\begin{aligned}-F(s) - a_0X(s) - a_1(sX(s) - x(0)) + a_2(s^2X(s) - sx(0)) \\ - b_0Y(s) - b_1sY(s) + b_2s^2Y(s) + sX(s) - x(0) = 0\end{aligned}\tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& -G(s) - c_0X(s) - c_1(sX(s) - x(0)) + c_2(s^2X(s) - sy(0)) \\
& - d_0Y(s) - d_1sY(s) + d_2s^2Y(s) + sX(s) - y(0) = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Primero, se despeja $X(s)$ en la ecuación (4.22)

$$X(s) = \frac{-F(s) - a_1x(0) + a_2sx(0) - b_0Y(s) - b_1sY(s) + b_2s^2Y(s) + x(0)}{-a_0 - a_1s + a_2s^2 + s} \tag{4.24}$$

Ahora, substituyendo esto en la ecuación (4.23)

$$\begin{aligned}
-G(s) &= \frac{c_0(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) + b_0Y(s) + b_1sY(s) - b_2s^2Y(s) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} \\
& - c_1 \left(\frac{s(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) + b_0Y(s) + b_1sY(s) - b_2s^2Y(s) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} - x(0) \right) \\
& + c_2 \left(\frac{s^2(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) + b_0Y(s) + b_1sY(s) - b_2s^2Y(s) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} - sy(0) \right) \\
& - d_0Y(s) - d_1sY(s) + d_2s^2Y(s) \\
& + s \left(\frac{-F(s) - a_1x(0) + a_2sx(0) - b_0Y(s) - b_1sY(s) + b_2s^2Y(s) + x(0)}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} \right) - y(0)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Agrupando términos que contienen $Y(s)$ en un lado y términos que no lo contienen en el otro lado de la ecuación:

$$\begin{aligned}
& -G(s) + d_0Y(s) + d_1sY(s) - d_2s^2Y(s) \\
& = \frac{c_0(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} - c_1 \left(\frac{s(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} - x(0) \right) \\
& + c_2 \left(\frac{s^2(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} - sy(0) \right) \\
& + s \left(\frac{-F(s) - a_1x(0) + a_2sx(0) + x(0)}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} \right) - y(0)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Finalmente, se despeja $Y(s)$ dividiendo ambos lados por $-G(s) + d_0 + d_1s - d_2s^2$:

$$\begin{aligned}
Y(s) = & \frac{1}{-G(s) + d_0 + d_1s - d_2s^2} \times \left[\frac{c_0(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} \right. \\
& - c_1 \left(\frac{s(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} - x(0) \right) \\
& + c_2 \left(\frac{s^2(F(s) + a_1x(0) - a_2sx(0) - x(0))}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} - sy(0) \right) \\
& \left. + s \left(\frac{-F(s) - a_1x(0) + a_2sx(0) + x(0)}{a_0 + a_1s - a_2s^2 - s} \right) - y(0) \right]
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Estas son las expresiones para $X(s)$ e $Y(s)$ en términos de las transformadas de Laplace de las funciones $x(t)$ e $y(t)$, así como de las funciones $F(s)$ y $G(s)$, y los coeficientes $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2, d_0, d_1, d_2$, y las condiciones iniciales $x(0)$ e $y(0)$. La solución final depende de las funciones $F(s)$ y $G(s)$, así como de los valores específicos de los coeficientes y las condiciones iniciales.

4.3.2. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes de funciones exponenciales

Teorema 4.3 Dado el sistema lineal de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= (e^{at} + c_1)x + (e^{bt} + c_2)y + f(t) \\
\frac{dy}{dt} &= (e^{dt} + c_3)x + (e^{ht} + c_4)y + g(t)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

donde $a, b, d, h, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$, y $(a - c_1)(h - c_4) \neq (s - d + c_3)(s - b + c_2)$ y $a \neq c_1$, entonces las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned}
y &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s - d + c_3)F + G}{(a - c_1)(h - c_4) - (s - d + c_3)(s - b + c_2)} \right\} \\
x &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s - b + c_2) \left[\frac{(s - d + c_3)F + G}{(a - c_1)(h - c_4) - (s - d + c_3)(s - b + c_2)} \right] + F}{a - c_1} \right\}
\end{aligned}$$

donde F, G son las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente.

Demostración. Aplicando transformada de Laplace a cada término de la ecuación

(4.28), se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{e^{at}x\} + c_1\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{e^{bt}y\} + c_2\mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{f(t)\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{e^{dt}x\} + c_3\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{e^{ht}y\} + c_4\mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

de aquí que

$$sX = X(s - a) + c_1X + Y(s - b) + c_2Y + F(s) \quad (4.29)$$

$$sY = X(s - d) + c_3X + Y(s - h) + c_4Y + G(s) \quad (4.30)$$

donde: $X(s)$ y $Y(s)$ son las transformadas de Laplace de las funciones $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente. $a, b, c_1, c_2, d, c_3, h$, y c_4 son constantes reales, $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de Laplace de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente.

Despejando a X en la ecuación (4.29), se tiene

$$(s - s + a - c_1)X = (s - b + c_2)Y + F(s)$$

$$(a - c_1)X = (s - b + c_2)Y + F(s)$$

$$X = \frac{(s - b + c_2)Y + F(s)}{a - c_1} \quad (4.31)$$

sustituyendo esto en la ecuación (4.30), se sigue que

$$(s - s + h - c_4)Y = (s - d + c_3)X + G(s)$$

$$(h - c_4)Y = (s - d + c_3) \left[\frac{(s - b + c_2)Y + F(s)}{a - c_1} \right] + G(s)$$

$$(a - c_1)(h - c_4)Y = (s - d + c_3) \left[\frac{(s - b + c_2)Y + F(s)}{a - c_1} \right] + G(s)$$

despejando a Y , se obtiene

$$[(a - c_1)(h - c_4) - (s - d + c_3)(s - b + c_2)]Y = (s - d + c_3)F + G \quad (4.32)$$

$$Y = \frac{(s - d + c_3)F + G}{(a - c_1)(h - c_4) - (s - d + c_3)(s - b + c_2)} \quad (4.33)$$

de aquí que

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s - d + c_3)F + G}{(a - c_1)(h - c_4) - (s - d + c_3)(s - b + c_2)} \right\} \quad (4.34)$$

donde $\mathcal{L}^{-1}$ denota la transformada inversa de Laplace. Esta expresión proporciona la solución particular para y en función del tiempo, dadas las funciones $f(t)$ y $g(t)$, y los parámetros del sistema.

Ahora, se sustituye la ecuación (4.33) en (4.31), se cumple que

$$x = \frac{(s - b + c_2) \left[\frac{(s - d + c_3)F + G}{(a - c_1)(h - c_4) - (s - d + c_3)(s - b + c_2)} \right] + F}{a - c_1} \quad (4.35)$$

dado que $X(s)$ es la transformada de $x(t)$, se tiene que

$$x = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s - b + c_2) \left[\frac{(s - d + c_3)F + G}{(a - c_1)(h - c_4) - (s - d + c_3)(s - b + c_2)} \right] + F}{a - c_1} \right\} \quad (4.36)$$

lo cual completa la prueba.

4.4. Estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes mediante la Transformada de Laplace

La estabilidad de un sistema depende de cómo estos coeficientes varían con el tiempo y afectan la posición de los polos del sistema. En este caso, la presencia de términos cuadráticos en el tiempo dentro de las ecuaciones diferenciales introduce un elemento que puede hacer que el sistema sea inherentemente inestable. En este caso, se analiza la estabilidad del sistema dado en (4.21) cuyos coeficientes están dados por funciones polinómicas de segundo grado.

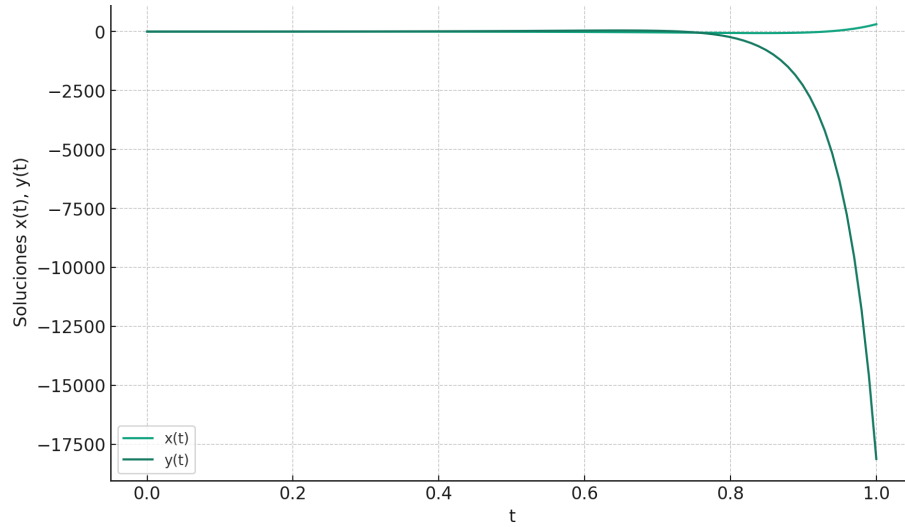


Figura 4.1: Gráfica del sistema de ecuaciones con coeficientes polinómicos de grado 2

La figura 4.1 muestra la respuesta del sistema con el tiempo para las variables $x(t)$ y $y(t)$. Se observa un crecimiento exponencial en una de las respuestas, lo que sugiere que el sistema no es estable. Esta respuesta es típica de un sistema con al menos un polo con parte real positiva, indicando que hay un crecimiento sin límites en la salida del sistema en respuesta a condiciones iniciales no nulas.

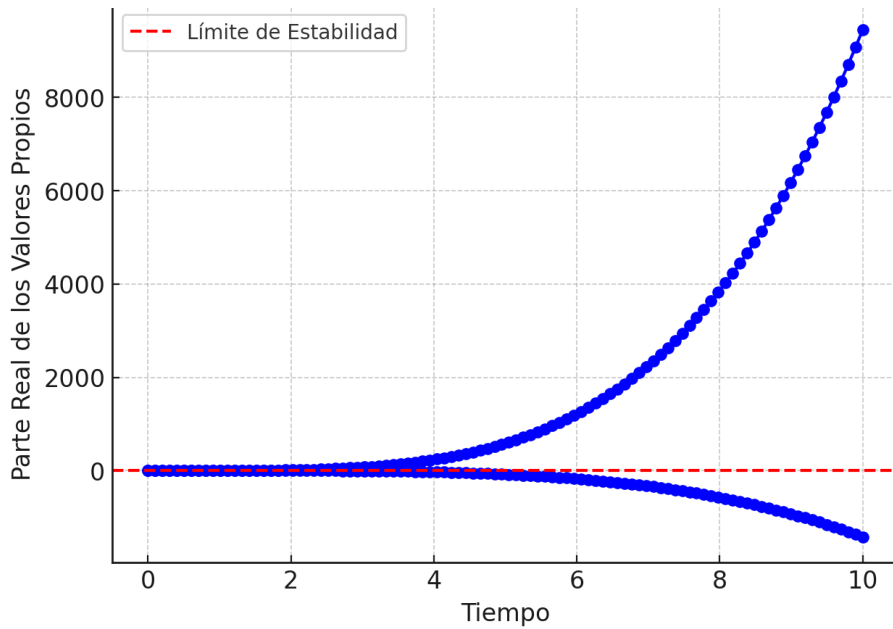


Figura 4.2: Partes reales de los valores propios en el tiempo

La figura 4.2 muestra las partes reales de los valores propios en el tiempo. Los puntos azules indican la parte real de los valores propios a través del tiempo, y la línea roja punteada marca el límite de estabilidad. Una parte real positiva indica inestabilidad, y como se observa, hay valores propios con partes reales positivas a lo largo de todo el intervalo de tiempo, lo que sugiere que el sistema es inestable.

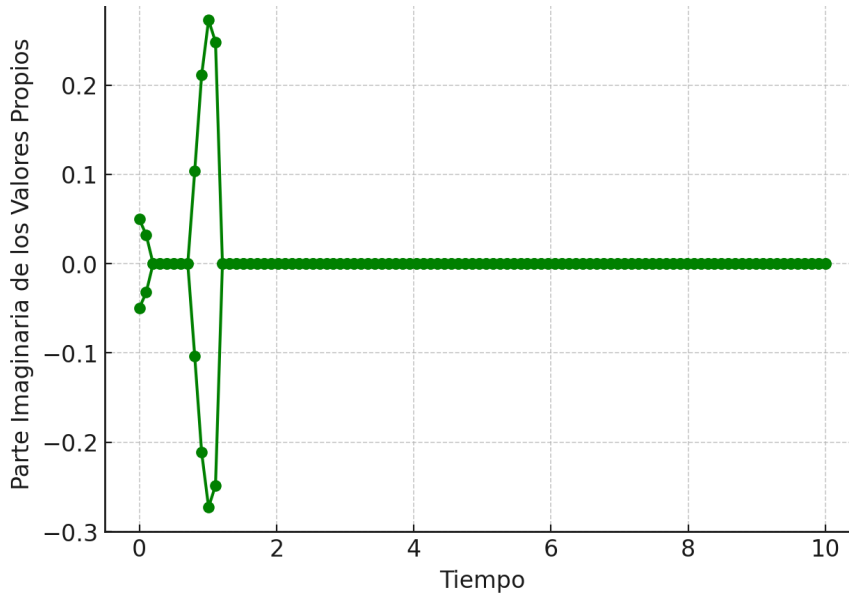


Figura 4.3: Partes imaginarias de los valores propios en el tiempo

En la figura 4.3, se muestran las partes imaginarias de los valores propios en el tiempo. Los puntos verdes representan la parte imaginaria de los valores propios. Estos valores no determinan la estabilidad por sí mismos, pero sí indican la presencia de comportamientos oscilatorios en el sistema.

En contextos reales, este tipo de comportamiento requiere la implementación de controles o modificaciones en el diseño del sistema para asegurar la estabilidad y evitar el crecimiento exponencial no acotado.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de los resultados presentados sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias y sistema lineal sin coeficientes constantes, en correspondencia con los objetivos planteados. En tal sentido, también se presentan las conclusiones y posibles líneas futuras para el seguimiento y profundización de esta temática.

5.2. Análisis de los resultados

Con respecto al objetivo 1, de caracterizar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes, se presentó estas EDO con coeficientes no constantes, empleando la transformada de Laplace. La ecuación general abordada es $p_2(t)y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t)$, donde $p_0(t)$, $p_1(t)$, y $p_2(t)$ son funciones dependientes del tiempo t . El método destaca por transformar las EDO en ecuaciones algebraicas más sencillas en el dominio de Laplace. Se detallan propiedades específicas para la transformada de Laplace de las derivadas de funciones, y se establecen condiciones particulares sobre los coeficientes p_0 , p_1 , y p_2 para obtener soluciones explícitas en términos de funciones básicas o elementales.

En correspondencia con el objetivo 2, se abordó la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) no homogéneo utilizando la transformada de Laplace. El sistema consta de dos ecuaciones, cada una con términos exponenciales y funciones no homogéneas, lo que lo hace más complejo de resolver de manera convencional. El enfoque utilizado se basa en aplicar la transformada de Laplace a ambas ecuaciones para llevarlas al dominio de Laplace, lo que resulta en dos ecuaciones algebraicas en términos de las transformadas de las funciones desconocidas. Luego, se resolvieron estas ecuaciones algebraicas en el dominio de Laplace para obtener las transformadas de las soluciones $X(s)$ e $Y(s)$, y finalmente, se aplicó la transformada inversa para obtener las soluciones en el dominio del tiempo. El resultado se expresó

en términos de fracciones parciales y funciones conocidas, lo que permitió obtener las soluciones analíticas de las EDO, lo que puede ser útil para comprender el comportamiento de las variables en función del tiempo en este sistema específico.

Este enfoque demuestra la potencia de la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables y términos no homogéneos. Al llevar el problema al dominio de Laplace, se simplifica la resolución al convertir las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. Sin embargo, este método puede ser complicado y requiere el uso de las propiedades de la transformada de Laplace y la descomposición en fracciones parciales. Además, la elección de las condiciones iniciales es crucial para obtener una solución completa y precisa en el dominio del tiempo.

Con respecto al objetivo 3, el análisis de la estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes no constantes se centró en cómo los coeficientes variables en el tiempo influyen en la posición de los polos del sistema y, por tanto, en su estabilidad. Se utilizaron coeficientes en términos de funciones cuadráticas, encontrando que estos términos en el tiempo pueden conducir a una inestabilidad inherente debido a la forma en que afectan la dinámica del sistema.

Tal comportamiento sugiere la presencia de al menos un polo con parte real positiva en el sistema, lo cual es indicativo de inestabilidad, dado que implica una respuesta del sistema que crece sin límites en presencia de condiciones iniciales distintas de cero. Además, el análisis de las partes reales de los valores propios a lo largo del tiempo muestra que hay valores propios con partes reales positivas durante todo el intervalo considerado, reforzando la conclusión de que el sistema es inestable, a parte de la presencia de dinámicas oscilatorias en el sistema, que aunque estas no determinan directamente la estabilidad, complementan el panorama de la respuesta del sistema al mostrar la posibilidad de comportamientos oscilatorios.

5.3. Conclusiones

En correspondencia con los objetivos planteados en esta investigación, a continuación se plantean las conclusiones más relevantes según los resultados presentados:

1. En el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con coeficientes no constantes, se caracterizó la forma y las condiciones que han de cumplir las soluciones, las cuales muestran una mayor complejidad en comparación con los sistemas de coeficientes constantes. Las soluciones variaban dinámicamente con el tiempo, reflejando la influencia directa de los coeficientes variables en el comportamiento del sistema.
2. Las soluciones de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con coeficientes variables tienen más complejidad, ya que los sistemas examinados ilustraron cómo los coeficientes polinómicos y exponenciales afectan la naturaleza de las soluciones a lo largo del tiempo, generando respuestas que varían desde comportamientos estables hasta dinámicas oscilatorias complejas.
3. El análisis de estabilidad de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con coeficientes no constantes indicó tendencias hacia la inestabilidad en ciertas parámetros. La variación de los coeficientes en el tiempo lleva a cambios significativos en la estabilidad del sistema, a menudo resultando en una estabilidad marginal o directamente en inestabilidad.

Conforme al objetivo general planteado, esta investigación concluye que es posible aplicar la transformada de Laplace en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes, pero que estas soluciones son altamente dinámicas a lo largo del tiempo, influenciadas directamente por los coeficientes variables, lo que genera respuestas que varían desde comportamientos estables hasta dinámicas oscilatorias complejas. Además, el análisis de la estabilidad señala la sensibilidad de estos sistemas a las variaciones en sus parámetros, lo que indica que la forma de las soluciones está restringida a la naturaleza de las funciones dadas en dichos coeficientes no constantes.

5.4. Líneas futuras de investigación

Tomando como base los hallazgos de este trabajo en el uso de la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias sin coeficientes constantes, se proponen las siguientes líneas de investigación:

1. Desarrollo de métodos numéricos para la transformada de Laplace en sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables.
2. Análisis comparativo de la transformada de Laplace y otros métodos para resolver ecuaciones diferenciales no lineales.
3. Uso de la transformada de Laplace en la predicción y análisis de sistemas económicos no lineales.
4. Análisis de la generalización de la Transformada de Laplace para sistemas multidimensionales.

Referencias

- Alfonso, J., y Rodriguez, C. (2019). La transformada de Laplace en la solución de ecuaciones diferenciales con algoritmo de cálculo en mathcad. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 6(12), 25-35.
- Bravo Yuste, S. (2006). *Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros*. Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones. Colección manuales uex.
- Campuzano, A. V. (2016). *Cálculo Numérico. Teoría, problemas y algunos programas con Máxima*. Universidad Politécnica de Cartagena.
- Candela, D. (2015). *Estabilidad de ecuaciones diferenciales*. Editorial Matemática Avanzada.
- Cengel, Y. A., Palm, W. J., y Ortega, S. M. S. (2014). *Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias*. McGraw-Hill.
- Córdoba, E. (2015). *Transformada de Laplace aplicada en filtros analógicos*. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina.
- Creswell, J., y Poth, C. (2018). *Diseño de investigación cualitativa y metodología de estudio de casos*. Editorial Ediciones UC.
- Edwards, C. H., y Penney, D. E. (2009). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de la frontera*. Pearson Educación.
- Espinoza, E. (2020). La investigación formativa. Una reflexión teórica. *Conrado*, 16(74), 45-53.
- Flores, M., Franco, M., Ricalde, D., Garduño, A., & Apáez, M. (2013). *Metodología de la investigación*. Editorial Trillas, SA de CV.
- Garmendia, L., Menarquez, T., Molero, M., y Salvador, A. (2007). Ecuaciones diferenciales ordinarias. *Análisis matemático para ingeniería*, 365-406.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2018). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill Interamericana.

- Jorge, S. G. (2011). Transformada de Laplace: Aplicación a vibraciones mecánicas. Universidad Nacional del Sur.
- Lacasa, L. (2011). Transformadas de Laplace en resolución de circuitos RLC. Universidad Nacional del Sur.
- Lozano, R. (2021). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Editorial Academica Espan.
- Márquez, J., Ríos, A., Caldera, M., y Granadino, J. (2022). Desarrollo De Una Aplicación Para Su Uso En La Enseñanza De La Transformada De Laplace. Investigación e Innovación en Matemática Educativa.
- Martínez, P. (2018). Metodología de la investigación: Guía para una comprensión holística de la ciencia. Editorial Académica Española.
- Motero, V. M. (2018). Estudio de la Transformada de Laplace. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.
- Proy, C. (2021). Inversión de la transformada de Laplace mediante integración numérica. Universidad de Oviedo.
- Ross, S. L. (2021). Ecuaciones diferenciales. Segunda edición. Editorial Reverté, Barcelona.
- Tonidandel, D. y Araújo, A. (2012). Transformada de Laplace: uma obra de engenharia. Revista Brasileira de Ensino de Física, 34, 2601.
- Tiberi, M. G. (2013). Aplicación de la Transformada de Laplace en el análisis de circuitos eléctricos. Universidad Nacional del Sur.
- Valdés, J. E. N., y Segura, C. N. (2002). La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por sus libros de texto. Xixím: Revista electrónica de didáctica de las matemáticas, 2(1).
- Vergel, M., Rincón, O., y Ibarguen, E. (2022). Ecuaciones diferenciales y aplicaciones. Primera edición. San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño.
- Zill, D. (2009). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Novena edición. Cengage Learning Editores: México.
- Zill, D. G. (2012). Matemáticas avanzadas para ingeniería. Cuarta edición. McGraw Hill México.

ANEXOS.

Anexo I. Ejemplo resuelto de EDOs y sistema lineal de EDOs sin coeficientes constantes.

Ejemplo 5.1 Resolver el sistema lineal EDO utilizando la transformada de Laplace

$$\frac{dx}{dt} = (e^{2t} + 2)x + (e^t - 3)y + t^2 \quad (5.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = (e^{5t} - 1)x + (e^{3t} + 4)y + \cos(t).$$

Se inicia indicando la transformada de Laplace a cada término,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{dx}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}x\} + 2\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{e^ty\} - 3\mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{t^2\} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} &= \mathcal{L}\{e^{5t}x\} - \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{e^{3t}y\} + 4\mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{\cos(t)\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

calculando la transformada de cada término, se obtiene

$$sX(s) = X(s-2) + 2X + Y(s-1) - 3Y + \frac{2}{s^3} \quad (5.3)$$

$$sY(s) = X(s-5) - X + Y(s-3) + 4Y + \frac{s}{s^2+1} \quad (5.4)$$

tomando la (5.3),

$$sX = X(s-2+2) + Y(s-1) - 3Y + \frac{2}{s^3}$$

$$sX = Xs + Y(s-1) - 3Y + \frac{2}{s^3}$$

$$sX - Xs = Y(s-1) - 3Y + \frac{2}{s^3}$$

$$0 = Y(s-1) - 3Y + \frac{2}{s^3}$$

$$0 = Y(s-1-3) + \frac{2}{s^3}$$

de aquí que

$$Y = \frac{-2}{s^3(s-4)} \quad (5.5)$$

Sustituyendo la expresión (5.5) en (5.4), se sigue que

$$sY = X(s - 5 - 1) + Y(s - 3) + 4Y + \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$sY - Y(s - 3) - 4Y - \frac{s}{s^2 + 1} = X(s - 6)$$

$$X = \frac{-Y - \frac{s}{s^2 + 1}}{s - 6} = \frac{Y + \frac{s}{s^2 + 1}}{6 - s} \quad (5.6)$$

$$X = \frac{\frac{-2}{s^3(s - 4)} + \frac{s}{s^2 + 1}}{6 - s} \quad (5.7)$$

entonces

$$x = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{-2}{s^3(s - 4)} + \frac{s}{s^2 + 1}}{6 - s} \right\} \quad (5.8)$$

descomponiendo la expresión en fracciones parciales, se tiene que

$$x = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s - 1}{37(s^2 + 1)} + \frac{1}{32(s - 4)} + \frac{6}{37(s - 6)} + \frac{1}{32s} + \frac{1}{8s^2} + \frac{1}{2s^3} \right\} \quad (5.9)$$

por tanto,

$$x(t) = \frac{6}{37} \cos(t) - \frac{1}{37} \sin(t) - \frac{1}{32} e^{4t} - \frac{6}{37} e^{6t} + \frac{1}{32} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}t^2$$

realizando el mismo proceso para (5.5)

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{s^3(s - 4)} \right\} \quad (5.10)$$

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{32s} + \frac{1}{8s^2} + \frac{1}{2s^3} - \frac{1}{32(s - 4)} \right\} \quad (5.11)$$

$$y(t) = \frac{1}{32} + \frac{t}{8} + \frac{t^2}{4} - \frac{e^{4t}}{32} \quad (5.12)$$

Anexo II. Presupuesto.

Este apartado contempla un resumen de los recursos económicos invertidos en el proceso de realización de esta tesis.

Descripción	Monto
Transporte y viáticos	4,000.00
Impresión	8,500.00
Encuadernado y empastado	2,500.00
Fotocopias	3,000.00
Materiales e insumos	5,500.00
Imprevistos	7,000.00
Total	30,500.00

Cuadro 5.1: Detalle de gastos

Anexo III. Cronograma de trabajo de la investigación.

En este apartado se describen las diferentes etapas del proceso de elaboración de esta investigación y sus respectivas fechas de ejecución.

Descripción	Periodos de ejecución
Solicitud de título	Abril, 2023
Aprobación del título	Mayo, 2023
Elaboración y entrega del anteproyecto.	Noviembre, 2023
Evaluación del Anteproyecto	Noviembre-diciembre, 2023
Elaboración de capítulo IV y V	Diciembre, 2023
Entrega de proyecto completo a la Facultad	Enero, 2024
Graduación	Febrero, 2024

Cuadro 5.2: Cronograma