

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemáticas

Título

Aplicación del análisis complejo en la mecánica de fluidos.

Sustentante

Marileida Bautista Díaz

Asesor

MA. Leomar Antonio Reyes Abreu

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024

TÍTULO

APLICACIÓN DEL ANÁLISIS COMPLEJO EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Aplicación del análisis complejo en la mecánica de fluidos.

Proyecto de Postgrado presentado por **Marileida Bautista Díaz** para optar por el título de Maestría en Matemáticas

Composición del tribunal

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Jurado de metodología

MA. Jesús Manuel Vloria

Jurado de Redacción

MA. Danny Daniel Manzueta Pérez

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Agradecimientos.....	VI
Dedicatorias.....	VII
Resumen.....	IX
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	1
1.2.2 Antecedentes académicos	6
1.3 Planteamiento del problema	8
1.4 Justificación	10
1.5 Objetivos	10
1.5.1 General	10
1.5.2 Específicos	10
1.6 Alcances y límites	11
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.	12
2.1 Introducción.	12
2.2 Marco teórico.	12
2.2.1 Preliminares de la mecánica de fluidos	12
2.2.2 Fundamentos del análisis complejo	20
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA	27
3.1 Introducción	27
3.2 Marco metodológico	27
3.2.1 Diseño de la investigación	27
3.2.2 Método de investigación	27
3.2.3 Tipo de investigación	27
3.2.4 Enfoque de la investigación	28
3.2.5 Procedimientos.	28

CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	29
4.1 Introducción	29
4.2 Caracterización de la velocidad de un fluido en términos de las funciones analíticas complejas	29
4.3 Aplicación de las funciones analíticas, mapeos conformes y teorema de mapeo de Riemann en la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos	31
4.3.1 Funciones analíticas y teorema de mapeo de Riemann	32
4.3.2 Mapeos conformes	34
4.4 Análisis de las propiedades del flujo de fluidos ideales expresado mediante un potencial complejo	38
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	42
5.1 Introducción	42
5.2 Análisis	42
5.3 Conclusiones	43
5.4 Líneas de investigación	44
Referencias	45
Anexos	48

Agradecimientos

A Dios. Gracias Señor por la vida que nos has dado y ser quien todo lo permite. Por llenar de bendiciones cada actividad que aportó al desarrollo de este hermoso proyecto. Toda la gloria y honor fue posible porque tú has sido el guía. Gracias nuestro Señor.

A La Universidad Tecnológica Del Cibao Oriental (UTECO). A nuestra alta y majestuosa casa de estudios, gracias por acogerme y abrir las puertas para permitir insertarnos al desarrollo profesional y para poder recibir el pan de la enseñanza con más alto nivel. Esta se convirtió en mi segundo hogar y son muchas las experiencias maravillosas vividas en la misma.

A los docentes. Agradezco infinitamente y con especial aprecio a cada uno de los docentes, que se esforzaron para impartir experiencias y maravillosas enseñanzas a través de las asignaturas, cursos, seminarios, asesorías y consultas, en la promoción del programa.

Al asesor. Por aceptar trabajar junto en este trabajo de investigación y por su apoyo incondicional, sugerencias, aportaciones, tiempo, esfuerzo y dedicación para mejorar el presente proyecto; además, por su gran sencillez y humildad, características que le hacen una excelente persona.

Dedicatorias

A Dios. En primer lugar, quiero dedicar esta tesis a nuestro padre celestial, Dios por ser el que todo lo puede, Jesús dice en sus palabras el que confía en mí no quedará defraudada, sin el nada es posible y nos da todo a cambio de nada.

A mis padres: Santiago Bautista y Gertrudis Díaz. Por darme la vida, ellos me han enseñado que con dedicación y esfuerzo podemos lograr nuestro propósito, son padres ejemplares y un modelo a seguir, gracias por apoyarme en cada momento de mi carrera.

A mis hijos: Michael De La Cruz, Marlín De La Cruz Y Marileisi De La Cruz. Porque son ellos mi mentor de este dolor de cabeza, han sido ustedes la razón por la cual he estudiado y darme motivación días tras días a seguir sin desmayar, por y para ustedes seguiré hacia adelante.

Mi esposo: José Luis De La Cruz. Por darme el apoyo en toda la trayectoria de mi carrera académica y la oportunidad de dar un paso más, gracias por brindarme confianza, eres una gran persona.

A mis hermanos: Altagracia, Félix, Francisco, Francis, Aida Issa, Marleny, Cristian y Sandy. Que con su apoyo estaban ahí motivándome y acompañándome en cada paso.

A Marciana Sánchez. Por estar siempre disponible en cada momento que la necesité, no tengo palabra para agradecerle el gran apoyo que brindaron mil gracias.

A mí. Por no haber abandonado esta maestría.

A mi equipo de trabajo: (las emprendedoras), Sorivel Veras, Rosa María Adames, Julissa Diaz, Lucia Bautista, Candy María y Anyelina Suarez, por estar siempre

disponible en cada momento que las necesitaba, fueron las mejores amigas en todo el trayecto de la carrera, fueron muchas las pruebas, pero con sus ayudas fueron superadas, gracias por apoyarme en cada momento y no dejarme sola.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante
Marileida Bautista Díaz

Asesor
MA. Leomar Antonio Reyes Abreu

RESUMEN

Esta tesis presenta una aplicación de los fundamentos del análisis complejo en la mecánica de fluidos, cuyos objetivos específicos se centran en caracterizar la velocidad de un fluido en términos de las funciones analíticas complejas, aplicar las funciones analíticas, mapeos conformes y teorema de mapeo de Riemann en la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos y analizar las propiedades del flujo de fluidos ideales expresado mediante un potencial complejo.

La investigación se enmarca en un diseño no experimental transversal, enfocándose en el análisis descriptivo de la aplicación de funciones analíticas en la mecánica de fluidos. La metodología adopta un enfoque cualitativo, orientado a comprender los aspectos teóricos y abstractos del análisis complejo sin la manipulación de variables.

Las conclusiones más relevantes fueron la utilización de funciones analíticas de variable compleja para describir la velocidad de fluidos, especialmente en flujos irrotacionales, utilizando el potencial de flujo. Además, se aplicaron funciones analíticas y mapeos conformes en la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos, simplificando la resolución de problemas. Se introdujo el potencial complejo G y se utilizaron las ecuaciones de Cauchy-Riemann para relacionar las líneas de nivel constante de ϕ y ψ .

Palabras claves: Funciones analíticas. Dinámica de fluidos. Ecuaciones Cauchy-Riemann. Potencial complejo.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción.

En este apartado se sientan las bases introductorias esenciales del estudio. Se inicia con una revisión de los antecedentes, el planteamiento de la problemática objeto de investigación, se plantean los objetivos propuestos, la justificación de las razones que fundamentan el estudio y la delimitación que demarcan los alcances y límites de lal mismo.

1.2. Antecedentes

En esta sección de antecedentes, se establece el contexto histórico y académico que ha guiado la fusión del análisis complejo con la mecánica de fluidos, haciendo notar los avances pero también algunos puntos por explorar en la referida temática.

1.2.1. Antecedentes históricos

1.2.1.1. Antecedentes históricos del análisis complejo.

Los orígenes del análisis complejo pueden remontarse a los trabajos de matemáticos como Gerolamo Cardano, quien en el siglo XVI introdujo la idea de números imaginarios mientras intentaba resolver ecuaciones cúbicas. Aunque inicialmente los números imaginarios eran vistos con escepticismo, su utilidad y necesidad se hicieron evidentes con el paso del tiempo (González-Velasco, 2011).

John Wallis (1616-1703) mostró cómo representar raíces geométricamente complejas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales (Kline, 1972). Luego de esto, Caspar Wessel (1745-1818) y Jean-Robert Argan (1768-1822) proporcionaron representaciones geométricas de números complejos como vectores (González-Velasco, 2011).

Posteriormente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) introdujo el término “número complejo” a números de la forma $a+bi$ donde i es la unidad imaginaria. La primera definición rigurosa de números complejos fue dada por William Rowan Hamilton (1805-1865). En 1833 propuso a la Academia Irlandesa que un número complejo $a+ib$ (donde a, b son reales) podría representarse mediante el par ordenado (a, b) , y definió las operaciones de suma y multiplicación de la siguiente manera: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$ (Stein y Shakarchi, 2010).

El siguiente gran avance en el análisis complejo provino del alumno de Gauss, Bernhard Riemann. Riemann nació en 1826 en el Reino de Hannover y estudió en Gottingen, donde presentó su disertación en 1851. La disertación de Riemann, Fundamentos para una teoría general de funciones de una variable compleja, adopta un enfoque geométrico completamente nuevo para el análisis complejo e introduce lo que se llaman superficies de Riemann (Stein y Shakarchi, 2010).

Riemann introduce además la definición de funciones holomorfas como funciones complejas de un solo valor en superficies de Riemann que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, lo que da paso a los dominios de representación a través de mapeos conformes (Laugwitz, 1999).

En el siglo XVIII, Leonhard Euler hizo importantes contribuciones al formalizar la notación de i para la unidad imaginaria y al establecer la fórmula de Euler, que conecta las funciones exponenciales y trigonométricas de una manera que solo puede explicarse plenamente en el contexto de los números complejos (Merzbach y Boyer, 2011).

Augustin-Louis Cauchy, en el siglo XIX, fue uno de los primeros en dar una definición rigurosa de las integrales de línea en el plano complejo y en desarrollar la teoría de residuos, una herramienta poderosa para calcular integrales. El primer trabajo de Cauchy sobre integración compleja apareció en un artículo de 1814 sobre

integrales definidas (integrales reales impropias). En este artículo, Cauchy describe el método para pasar del ámbito real al imaginario, donde luego se puede calcular una integral impropia con facilidad. Este es el primer indicio de la famosa fórmula integral de Cauchy y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. En 1823, Cauchy publicó una continuación, abordando la integración compleja e introduciendo su fórmula de integración (Bottazzini, 1986).

El enfoque de Cauchy y el trabajo relacionado sobre análisis complejo, aunque riguroso y exhaustivo, se centró muy poco en el tema de la geometría compleja. A principios del siglo XIX se realizaron algunos trabajos sobre la representación geométrica de números complejos en el plano, en particular un artículo de 1806 del matemático suizo Jean Robert Argand (Kreyszig, 2011). No fue hasta 1831, cuando Gauss finalmente publicó su trabajo de casi 30 años antes, que la teoría geométrica de los números complejos ganó aceptabilidad general (Bottazzini, 1986). Cauchy finalmente redefinió gran parte de sus obras anteriores en la segunda mitad de la década de 1840 para incorporar las nuevas representaciones geométricas de los números complejos.

Karl Weierstrass estableció la teoría de funciones de variable compleja en términos aún más rigurosos y Bernhard Riemann introdujo la idea de superficies de Riemann, que ampliaron el concepto de superficies complejas y proporcionaron una nueva forma de visualizar y entender las funciones de variable compleja (Carrucio, 2009).

Los avances realizados en el análisis complejo pronto llegaron al mundo de la física. A mediados del siglo XIX, la teoría del potencial estaba bien establecida en las áreas de la gravitación y la electrostática, regida por la ecuación de Laplace cuyas soluciones son funciones armónicas. Ahlfors resume la relación entre la teoría del potencial y el análisis complejo cuando dijo que Riemann “prácticamente pone signos de igualdad entre la teoría del potencial bidimensional y la teoría de funciones complejas”. Las aplicaciones posteriores en física incluyen soluciones a la ecuación de

Schrödinger, el flujo de fluidos, la teoría de cuerdas y la Teoría General de la Relatividad de Einstein (Carrucio, 2009).

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX, matemáticos como Henri Poincaré y Felix Klein profundizaron en la conexión entre la topología y el análisis complejo, lo que llevó a importantes avances en la comprensión de la estructura geométrica del plano complejo y sus funciones. En el siglo XX, el análisis complejo se expandió aún más con las contribuciones de matemáticos como G.H. Hardy y John E. Littlewood, que aplicaron el análisis complejo a problemas de teoría de números, y Lars Ahlfors y Oscar Teichmüller, que hicieron avances significativos en la teoría de las funciones cuasiconformes y las superficies de Riemann (Merzbach y Boyer, 2011).

1.2.1.2. Antecedentes históricos de la mecánica de fluidos.

Los fluidos, definidos por su habilidad para adaptar su forma a la de los contenedores que los albergan sin cambiar su volumen, han sido objeto de estudio desde tiempos ancestrales. La mecánica de fluidos, que explora cómo se mueven los fluidos y cómo interactúan con los sólidos, tiene antecedentes que se remontan a siglos atrás, en la época de grandes descubrimientos, específicamente en los siglos XVIII y XIX (Arregui, 2017).

La historia de la mecánica de fluidos inicia con la hidráulica antigua. Alrededor del año 400 a.C., civilizaciones como Mesopotamia y Egipto mejoraron sus técnicas de irrigación, un paso crucial para el desarrollo de la humanidad. Estas prácticas se extendieron y refinaron con el tiempo, alcanzando complejidades notables en los imperios griego, chino y romano (Arregui, 2017).

Las civilizaciones precolombinas también hicieron contribuciones significativas a la hidráulica. Los Incas, por ejemplo, desarrollaron sistemas avanzados de canales de riego, hechos de piedra, que destacaban por su ingeniería precisa. Estas primeras sociedades tenían conocimientos prácticos para la construcción de estas estructuras,

pero aún no contaban con la capacidad para teorizar y cuantificar completamente sus diseños (Pasinato y Confluencia, 2008).

Los griegos comenzaron a agregar conocimiento cuantitativo a la hidráulica. Arquímedes formuló las leyes de flotabilidad, proponiendo que un cuerpo sumergido en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desplazado, una premisa que posteriormente fundamentaría el uso del cálculo diferencial para entender los cuerpos sumergidos (Pasinato y Confluencia, 2008).

El legado de los romanos, conocidos por sus extensos acueductos, marcó un hito en la ingeniería hidráulica. Aunque no dejaron registros detallados de los principios cuantitativos usados en su diseño, su obra sigue siendo una fuente de admiración y estudio por su envergadura y durabilidad. Leonardo Da Vinci, en el Renacimiento, proporcionó una comprensión más profunda de la mecánica de fluidos al describir el comportamiento de los flujos unidimensionales y fenómenos como resaltos hidráulicos y formación de torbellinos. Además, Edme Mariotte contribuyó al desarrollo del primer túnel aerodinámico, ampliando el campo de la experimentación en mecánica de fluidos (Cotos, 2019).

Evangelista Torricelli y Blaise Pascal, en el siglo XVII, aportaron fundamentos teóricos esenciales. Torricelli estudió el flujo a través de orificios y estableció la relación entre la presión atmosférica y la altura de una columna de mercurio, mientras que Pascal enunció su principio sobre la transmisión de la presión en fluidos (Cotos, 2019).

El verdadero impulso en la mecánica de fluidos se atribuye a Isaac Newton y su formulación de las leyes del movimiento. Su concepto de resistencia viscosa lineal para los fluidos abrió la puerta para que otros matemáticos, como Daniel Bernoulli y Leonhard Euler, desarrollaran principios fundamentales y ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos (Pasinato y Confluencia, 2008).

A finales del siglo XIX, la distinción entre hidráulica e hidrodinámica comenzó a desvanecerse gracias a figuras como William Froude, Lord Rayleigh y Osborne Reynolds, quienes establecieron principios fundamentales que permitieron el estudio de modelos a escala y el análisis dimensional, así como la importancia de los efectos viscosos en los flujos (Arregui, 2017).

En el siglo XX, la mecánica de fluidos se enriqueció con las contribuciones de Ludwig Prandtl y sus contemporáneos. Prandtl introdujo el concepto de la capa límite, revolucionando el análisis de flujos cerca de superficies sólidas. Junto con Theodore von Kármán y Geoffrey Taylor, ampliaron la comprensión de fenómenos como la formación de vórtices y la teoría de la turbulencia (Arregui, 2017).

1.2.2. Antecedentes académicos

Rezk (2010) en su publicación “CFD como herramienta para el análisis de geometrías complejas”, diseña programas basados en computadora para resolver y analizar problemas industriales. Uno de estos programas desarrollados es la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD). Su propósito fue implementar el análisis CFD para resolver el comportamiento de flujos de análisis complejos que no son posibles de abordar con cálculos ordinarios.

En el artículo publicado por Mezić (2013), titulado “Análisis de flujos de fluidos mediante propiedades espectrales del operador Koopman” se revisa la teoría y las aplicaciones de los modos Koopman en mecánica de fluidos. La descomposición del modo Koopman se basa en el hecho sorprendente, descubierto en Mezić (2005), de que los modos normales de oscilaciones lineales tienen sus análogos naturales (los modos Koopman) en el contexto de la dinámica no lineal. Para seguir esta analogía, se debe cambiar la representación del sistema de la representación del espacio de estados a la dinámica gobernada por el operador lineal de Koopman en un espacio de observables de dimensión infinita. Mientras que Koopman en su artículo original se ocupó únicamente de las transformaciones que preservan la medida, la discusión aquí

se centra predominantemente en los sistemas disipativos que surgen de la evolución de Navier-Stokes.

En el artículo publicado por Brunton et al. (2020) sobre “Aprendizaje automático para mecánica de fluidos”, se indica que el campo de la mecánica de fluidos está avanzando rápidamente, impulsado por volúmenes sin precedentes de datos provenientes de experimentos, mediciones de campo y simulaciones a gran escala en múltiples escalas espaciotemporales. El aprendizaje automático (ML) ofrece una gran cantidad de técnicas para extraer información de datos que pueden traducirse en conocimientos sobre la mecánica de fluidos subyacente. Además, los algoritmos de aprendizaje automático pueden aumentar el conocimiento del dominio y automatizar tareas relacionadas con el control y la optimización del flujo. Este artículo presenta una descripción general de la historia pasada, los desarrollos actuales y las oportunidades emergentes del aprendizaje automático para la mecánica de fluidos.

Sierra et al. (2020), en su investigación titulada “Análisis eficiente de la estabilidad de flujos de fluidos utilizando técnicas de mapeo complejas”, destacó que el análisis de estabilidad lineal global de flujos abiertos genera dificultades asociadas a las condiciones de contorno, lo que lleva a reflexiones de ondas espurias (en casos compresibles) o a retroalimentación no local debido a la naturaleza elíptica de la ecuación de presión (en casos incompresibles). Se introduce un enfoque novedoso para abordar ambos problemas. El enfoque consiste en resolver el problema utilizando un mapeo complejo de las coordenadas espaciales, de una manera que pueda ser directamente aplicable en un código existente sin ninguna variable auxiliar adicional. La eficiencia del método se demuestra primero para una ecuación 1D simple que modela Navier-Stokes incompresible y para un problema de acústica lineal. Luego se analiza la aplicación a la ecuación linealizada completa de Navier-Stokes. Un criterio sobre cómo seleccionar los parámetros de la función de mapeo se obtiene analizando el efecto del mapeo en soluciones de ondas planas. Finalmente, el método se demuestra para tres casos de aplicación, incluido un chorro incompresible, una configuración de

tono de orificio comprimible y el flujo que pasa por un perfil aerodinámico.

Por otro lado, la investigación realizada por Zafarullah et al. (2023), sobre “Flujos en espiral de fluidos de tipo de velocidad fraccionada ABC en una región cilíndrica” explora el fluido Oldroyd-B fraccionado con la influencia del efecto MHD, encerrado por dos cilindros circulares uniaxiales sin fin, utilizando la transformada de Laplace con el operador fraccional de Antangano Baleanu y la transformada finita de Hankel. Indican que el movimiento se produce a partir del reposo de los cilindros interior y exterior, debido a las velocidades de rotación y de traslación que dependen del tiempo. Los resultados analíticos del caudal y correspondientes a la tensión tangencial se introducen mediante un patrón integral y en serie en forma de la función generalizada M. Las soluciones que han satisfecho todas imponen condiciones de cuenta. Se pueden lograr fácilmente soluciones comparables para fluidos Oldroyd-B, Maxwell, de segundo grado y newtonianos ordinarios, como casos exclusivos de resultados generalizados. Al final, se muestra la ilustración gráfica para predecir el impacto del tiempo de relajación y el material fraccionario de orden no entero en el flujo de fluido, así como la comparación entre las ecuaciones.

1.3. Planteamiento del problema

La mecánica de fluidos es una rama fundamental de la física y la ingeniería que se centra en el estudio del comportamiento de los fluidos, como líquidos y gases, en movimiento. La complejidad inherente a la dinámica de fluidos, especialmente cuando se consideran flujos alrededor de estructuras sólidas o en geometrías complejas, presenta un conjunto único de desafíos que han limitado la capacidad para predecir y optimizar el comportamiento de manera precisa y eficiente. Además que tradicionalmente, la resolución de problemas en esta disciplina ha requerido el uso de ecuaciones diferenciales y métodos numéricos complejos, que a menudo resultan ser intensivos en términos computacionales y no siempre proporcionan una comprensión de los fenómenos subyacentes.

Por su parte, el análisis complejo es una disciplina que centra su atención en el estudio de funciones complejas de una variable compleja. Cuando estos fundamentos son aplicados para representar y analizar la velocidad de un fluido, abre la posibilidad de aplicar teoremas y técnicas del análisis complejo, tales como el teorema de Cauchy y la fórmula integral de Cauchy, que pueden simplificar la solución de ecuaciones diferenciales parciales asociadas a los flujos de fluidos, abriendo nuevas perspectivas en la mecánica del movimiento de estos. En virtud de lo anterior, la descripción y análisis de los campos de velocidad en la mecánica de fluidos sigue presentando grandes desafíos, particularmente en la representación y comprensión de los flujos alrededor de objetos sólidos. A pesar de los avances en métodos numéricos y computacionales, la caracterización analítica de la velocidad de un fluido sigue siendo esencial para una comprensión teórica profunda y para el desarrollo de soluciones innovadoras en ingeniería.

El reto radica en cómo las propiedades y técnicas del análisis complejo pueden ser aplicadas de manera efectiva a problemas de mecánica de fluidos concretos, especialmente en situaciones de flujo alrededor de objetos sólidos de formas complejas y en condiciones de contorno no triviales. La capacidad de transformar estos problemas complejos en otros equivalentes más manejables mediante el uso de mapeos conformes y el teorema de mapeo de Riemann podría revolucionar la forma en que se modelan y resuelven los problemas de flujo de fluidos. En correspondencia con esto, esta propuesta investigativa pretende dar respuesta a ¿Cómo se pueden aplicar los fundamentos del análisis complejo en la mecánica de fluidos?, lo que implica a su vez, responder las siguientes preguntas específicas:

1. ¿Cómo se puede caracterizar la velocidad de un fluido en términos de funciones analíticas complejas?
2. ¿De qué manera pueden aplicarse las funciones analíticas, mapeos conformes y el teorema de mapeo de Riemann en el estudio de la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos?

3. ¿Cuáles son las propiedades del flujo de fluidos ideales expresado mediante un potencial complejo en el contexto de la mecánica de fluidos?

1.4. Justificación

Los ingenieros a menudo enfrentan desafíos al diseñar sistemas que interactúan con fluidos, particularmente en torno a geometrías complejas. Una justificación fundamental de esta tesis es que, al aplicar el análisis complejo, los ingenieros podrían tener una mejor comprensión de la mecánica de fluidos, tanto a nivel práctico como desde los fundamentos teóricos. Esto es debido a que la capacidad de modelar y predecir con precisión el comportamiento de los fluidos puede llevar a mejoras en eficiencia y rendimiento, y por supuesto, implicar el desarrollo de avances tecnológicos significativos.

La descripción convencional de la velocidad de un fluido, especialmente en flujos complejos alrededor de objetos sólidos, a menudo requiere aproximaciones y simplificaciones que pueden comprometer la precisión. Utilizando el análisis complejo, se puede lograr una representación más precisa de la velocidad de un fluido. Esto justifica la investigación, ya que una caracterización mejorada tiene implicaciones directas en el diseño y análisis de sistemas fluidodinámicos, mejorando la exactitud y la eficiencia en campos como la aerodinámica y la hidrodinámica.

1.5. Objetivos

1.5.1. General

Aplicar fundamentos del análisis complejo en la mecánica de fluidos.

1.5.2. Específicos

1. Caracterizar la velocidad de un fluido en términos de las funciones analíticas complejas.
2. Aplicar las funciones analíticas, mapeos conformes y teorema de mapeo de Riemann en la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos.
3. Analizar las propiedades del flujo de fluidos ideales expresado mediante un

potencial complejo.

1.6. Alcances y límites

El desarrollo de esta investigación se centró en el contexto de las matemáticas puras, relacionando fundamentos del análisis complejo y la mecánica de fluidos.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.

2.1. Introducción.

En este capítulo se plantean los sustentos conceptuales que fundamentan las bases teóricas del análisis complejo y la mecánica de fluidos.

2.2. Marco teórico.

2.2.1. Preliminares de la mecánica de fluidos

Definición 2.1 Los fluidos son aquellas sustancia que, debido a su poca cohesión intermolecular, carece de forma propia adopta la forma del recipiente que lo contiene (Chow, 1994).

Definición 2.2 La Mecánica de los Fluidos es la rama de la Física que estudia los gases y los líquidos como si estos representasen una distribución continua de la materia (López, 2019).

De acuerdo con Domingo (2011), la característica fundamental de los fluidos es la denominada fluidez. Un fluido cambia de forma de manera continua cuando está sometido a un esfuerzo cortante por muy pequeño que éste sea, es decir, un fluido no es capaz de soportar un esfuerzo cortante sin moverse durante ningún intervalo de tiempo.

Definición 2.3 Según Landau et al. (2021), los fluidos se clasifican en líquidos y gases.

1. Los líquidos a una presión y temperatura determinadas ocupan un volumen determinado. Introducido el líquido en un recipiente adopta la forma del mismo, pero llenando solo el volumen que le corresponde. Si sobre el líquido reina una presión uniforme, por ejemplo, la atmosférica, el líquido adopta, una superficie libre plana, como la superficie de un lago o la de un cubo de agua.

2. Los gases a una presión y temperatura determinada tienen también un volumen determinado, pero puestos en libertad se expansionan hasta ocupar el volumen completa del recipiente que lo contiene, y no presentan superficie libre.

2.2.1.1. Propiedades de los fluidos

Definición 2.4 Domingo (2011) establece que la densidad ρ se define como la masa por unidad de volumen. La unidad de densidad en el sistema internacional es el $[kg/m^3]$. En el caso general de un fluido inhomogéneo, la densidad ρ varía de un punto a otro. Por tanto, se define densidad en un punto como la masa por unidad de volumen en un elemento infinitesimal de volumen en torno a ese punto:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) = \frac{dm}{dV} \quad (2.1)$$

Por el contrario, para un fluido homogéneo, la densidad no varía de un punto a otro y puede definirse simplemente mediante

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.2)$$

Definición 2.5 El peso específico γ se define como el peso por unidad de volumen. La unidad de peso específico en el sistema internacional es el $[N/m^3]$. Para un fluido genérico posiblemente inhomogéneo el peso específico se define como

$$\gamma = \gamma(x, y, z, t) = g \frac{dm}{dV} = g\rho \quad (2.3)$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Para el caso particular de un fluido homogéneo el peso específico queda como $\gamma = mg/V = \rho g$. Nótese que $\gamma = \rho g$ en todos los casos (Domingo, 2011).

Definición 2.6 Se denomina volumen específico v al volumen ocupado por la unidad de masa. En el caso general de un fluido inhomogéneo se define como

$$v = v(x, y, z, t) = \frac{dV}{dm} = \frac{1}{\rho} \quad (2.4)$$

mientras que para un fluido homogéneo éste se define como $v = V/m = 1/\rho$. En todos los casos, $v = 1/\rho$. La unidad de volumen específico en el sistema internacional es el $[m^3/kg]$ (Domingo, 2011).

Definición 2.7 La presión en un punto se define como el valor absoluto de la fuerza por unidad de superficie a través de una pequeña superficie que pasa por ese punto y su unidad en el sistema internacional es el Pascal ($1Pa = 1N/m^2$). Mientras que en el caso de los sólidos en reposo, las fuerzas que actúan a través de una superficie pueden tener cualquier dirección, en el caso de los fluidos en reposo estas fuerzas deben ser siempre perpendiculares a la superficie, ya que si hubiera una componente tangencial, el fluido fluiría. En el caso de un fluido en movimiento, si éste es no viscoso tampoco aparecen componentes tangenciales de la fuerza, pero si se trata de un fluido viscoso sí que aparecen fuerzas tangenciales de rozamiento (López, 2019).

De este modo, un fluido en reposo que se encuentra a una presión p ejerce una fuerza $-pdS$ sobre cualquier superficie plana arbitraria en contacto con el fluido en el punto, definida por un vector unitario dS perpendicular a la superficie. En general, la presión en un fluido depende del punto, $p = p(x, y, z)$. Así, para un fluido en reposo la presión se define como la fuerza normal por unidad de superficie.

Definición 2.8 La compresibilidad se caracteriza por el coeficiente de compresibilidad κ , definido como

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} \quad (2.5)$$

que representa la disminución relativa del volumen por unidad de aumento de presión. Su unidad es la inversa de presión, en el sistema SI $[m^2/N = Pa^{-1}]$. Su inversa,

$$K = \frac{1}{\kappa} \quad (2.6)$$

es el módulo de compresibilidad $[N/m^2 = Pa]$. Tanto κ como K dependen de la forma en que se realiza el proceso (Grañó, 2012).

Definición 2.9 La dilatación térmica se caracteriza por el coeficiente de dilatación térmica de volumen, que representa el aumento relativo del volumen producido por un aumento de la temperatura, y está definida como

$$\alpha_V = \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} \quad (2.7)$$

donde V es el volumen inicial del líquido. Su unidad es la inversa de grado $[K^{-1}]$ o $[^{\circ}C^{-1}]$ y también depende de la forma en que realiza el proceso (Grañó, 2012).

Definición 2.10 Al moverse una capa de líquido con respecto a otras, entre ellas surgen fuerzas de rozamiento, por lo que las capas que se mueven con mayor velocidad arrastrarán consigo las capas contiguas. La propiedad de los líquidos de oponer resistencia a las fuerzas tangenciales, que tratan de desplazar unas partículas con respecto a otras se llama viscosidad, o sea, es la propiedad del líquido a oponerse a las fuerzas que provocan el movimiento relativo de sus partículas o al desplazamiento o resbalamiento de sus capas (Terán et al., 2018).

2.2.1.2. Dinámica de fluidos

La dinámica de fluidos estudia los fluidos en movimiento y es una de las ramas más complejas de la mecánica. Aunque cada gota de fluido cumple con las leyes del movimiento de Newton las ecuaciones que describen el movimiento del fluido pueden ser extremadamente complejas (De las Heras, 2012).

Definición 2.11 Un fluido ideal se define como un fluido que es incompresible y no tiene resistencia interna al flujo, es decir, tiene una viscosidad cero. Además, las partículas de fluido ideales no experimentan rotación alrededor de su centro de masa, lo que se describe como irrotacional. Por lo tanto, los fluidos ideales no se ven afectados por los efectos de la viscosidad, la turbulencia o cualquier otro factor externo y son deformables ante esfuerzos, no importa cuán pequeños sean (De las Heras, 2012).

La hipótesis de incompresibilidad es una suposición razonable para líquidos pero no para los gases. Un gas puede tratarse como incompresible si su movimiento es tal

que las diferencias de presión que aparecen no son demasiado grandes. El rozamiento interno en un fluido da lugar a esfuerzos cortantes cuando dos capas adyacentes se mueven la una sobre la otra o cuando el fluido se mueve por tubos o se encuentra a un obstáculo. En algunos casos estos esfuerzos son despreciables si se comparan con fuerzas gravitatorias o con la originadas por diferencias de presión (Grañó, 2012).

La trayectoria descrita por un elemento de fluido en movimiento se llama línea de flujo. La velocidad del elemento varía en magnitud y dirección a lo largo de su línea de flujo. Si cada elemento que pasa por un punto dado sigue la misma línea de flujo que los elementos precedentes se dice que el flujo es estable o estacionario. Un flujo puede empezar no estacionario y hacerse estacionario con el tiempo. En un flujo estacionario la velocidad en cada punto del espacio permanece constante en el tiempo aunque la velocidad de la partícula puede cambiar al moverse de un punto a otro (Grañó, 2012).

Definición 2.12 La línea de corriente es una curva, cuya tangente en un punto cualquiera tiene la dirección de la velocidad del fluido en ese punto. En el régimen estacionario las líneas de corriente coinciden con las líneas de flujo. Si se dibujan todas las líneas de corriente que pasan por el contorno de un elemento del fluido de área, estas líneas rodean un tubo denominado tubo de flujo o tubo de corriente. En virtud de la definición de línea de corriente el fluido no puede atravesar las paredes de un tubo de flujo y en régimen estacionario no puede haber mezcla de fluidos de dos tubos diferentes (De las Heras, 2012).

Definición 2.13 Se llama flujo laminar al tipo de movimiento de un fluido cuando éste es perfectamente ordenado, estratificado, suave, de manera que el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse. Las capas adyacentes del fluido se deslizan suavemente entre sí. El mecanismo de transporte es exclusivamente molecular. Se dice que este flujo es aerodinámico (De las Heras, 2012).

Definición 2.14 Se llama flujo turbulento cuando se hace más irregular, caótico e impredecible, las partículas se mueven desordenadamente y las trayectorias de las

partículas se encuentran formando pequeños remolinos aperiódicos. Aparece a velocidades altas o cuando aparecen obstáculos abruptos en el movimiento del fluido (De las Heras, 2012).

Definición 2.15 Flujo y Caudal. Conforme lo establece Martínez y Estornell (2014), si la velocidad a la que viaja el elemento de fluido es $\vec{v}$ en un tiempo dt , el volumen de fluido que atraviesa una superficie elemental dS es $dV = v dt dS \cos(\theta)$ y la masa contenida en volumen es

$$dm = \rho dV = \rho v dt dS \cos(\theta) = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

1. Se define el flujo másico elemental a través de $d\vec{S}$ como

$$d\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

2. El flujo másico total o simplemente flujo será

$$\dot{m} = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

3. El flujo volumétrico o simplemente caudal se define como

$$\Psi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

de donde se tiene $\dot{m} = \rho \Psi$. Notar que $\dot{m}$ tiene unidades de kg/s o gr/s y que Ψ tiene unidades de m³/s. Si la superficie es cerrada $\Rightarrow$

$$\dot{m} = \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

4. También la masa de fluido que hay en un instante t en el interior de la superficie S cerrada es

$$m_{\text{interior}} = \int_V \rho dV$$

de donde su variación con el tiempo es

$$\frac{dm_{\text{interior}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Definición 2.16 La ecuación de continuidad plantea que

$$\Phi = -\frac{dm_{\text{interior}}}{dt}$$

es decir

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (2.8)$$

que es la forma integral de la ecuación de continuidad (Martínez y Estornell, 2014).

Definición 2.17 Martínez y Estornell (2014) señalan que la divergencia de un vector $\vec{v}$ está dada por

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Teorema 2.1 Martínez y Estornell (2014) indica que el teorema de la divergencia de Gauss establece que

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

que aplicándolo a (2.8) da

$$\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \rho \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV$$

o lo que es lo mismo

$$\int \left(\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

Como esto se ha de cumplir para cualquier volumen arbitrario necesariamente el integrando tiene que ser cero

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

que es la forma diferencial de la ecuación de continuidad. El primer término representa la masa que sale por unidad de tiempo y volumen elemental a través de la superficie de un volumen elemental que contiene a un cierto punto del espacio. El segundo término representa la variación de masa por unidad de tiempo y volumen en dicho volumen elemental.

Definición 2.18 Hernández et al. (2023) indica que algunos de los principios fundamentales de la dinámica de fluidos son los siguientes:

1. Principio de Bernoulli. Este principio establece que en un flujo estacionario, la suma de la presión, la energía cinética por unidad de volumen y la energía potencial gravitatoria por unidad de volumen es constante a lo largo de una línea de corriente. Es decir:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{constante}$$

donde P es la presión del fluido, ρ es la densidad, v es la velocidad del fluido, g es la aceleración debido a la gravedad, y h es la altura sobre una referencia.

2. Ecuación de Continuidad. En el caso de un fluido incompresible, la ecuación de continuidad se basa en la conservación de la masa y establece que el producto de la velocidad del flujo y la sección transversal del conducto es constante a lo largo del flujo. Matemáticamente se expresa como:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

donde A es el área de la sección transversal y v es la velocidad del fluido en esa sección.

3. Teorema de Torricelli. Es una aplicación del principio de Bernoulli y establece que la velocidad de salida v de un fluido a través de un orificio pequeño en la base de un tanque se puede calcular con la fórmula:

$$v = \sqrt{2gh}$$

donde h es la altura del fluido sobre el orificio.

4. Ley de Stokes. Describe la fuerza de fricción experimentada por esferas moviéndose a través de un fluido viscoso en un régimen de flujo laminar a velocidades bajas. La fuerza de Stokes es proporcional a la velocidad del objeto y al coeficiente de viscosidad pero es una simplificación que se aplica bajo ciertas condiciones que pueden no ser aplicables a todos los fluidos ideales.

$$F = 6\pi\mu rv$$

donde μ es la viscosidad del fluido y r es el radio de la esfera.

5. Ecuaciones de Euler para fluidos no viscosos. Estas ecuaciones describen el flujo de un fluido ideal no viscoso y son la base para la mayoría de los modelos de fluidos ideales. Las ecuaciones de Euler son:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g}$$

donde $\vec{v}$ es el campo de velocidad, P es la presión, ρ es la densidad, y $\vec{g}$ es la aceleración debida a la gravedad.

2.2.2. Fundamentos del análisis complejo

Definición 2.19 En Milnor (2011) se plantea que la derivada de una función de valor complejo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \quad (2.9)$$

donde $\Delta z = z - w$, con $w \in \Omega$.

La división de números complejos z_1/z_2 da como resultado un número complejo con un argumento de diferencia con el módulo del cociente de sus módulos:

$|z_1|/|z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)}$. En este sentido, la expresión límite (2.9) puede ser interpretada como la tasa instantánea de cambio de un vector complejo con respecto a una dirección particular en $\mathbb{C}$ (es decir: rotación y escalado en $\mathbb{C}$).

Definición 2.20 De acuerdo con Gunning y Rossi (2022), la función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable (holomórfica) cuando el límite (2.9) existe.

Ahora, por supuesto, la existencia del límite (2.9) depende de cómo se aproxime al punto z en $\mathbb{C}$. Al igual que en el caso de funciones de valor real, hay múltiples maneras en que el límite puede aproximarse a un punto dado. El caso de valor real es muy simple, aproximándose solo desde dos posibles lados, mientras que en $\mathbb{C}$ uno puede aproximarse desde incontablemente muchas direcciones. Intuitivamente, cuando (2.9) asume el mismo valor para todas las direcciones, existe y f es diferenciable.

Teorema 2.2 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann). Lang (2013) sostiene que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $f = u + iv$ donde u y v son la parte real y la parte imaginaria de f , respectivamente. Entonces f es diferenciable si y solo si u y v son continuamente diferenciables y satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10)$$

Demostración. Tome $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ y el límite (2.9). Suponiendo ahora que este límite existe (es decir: que f es diferenciable). Tome el caso cuando $\Delta y = 0$, que es cuando el punto z_0 es aproximado con la parte imaginaria constante (ver acercándose a z_0 desde la derecha en la Figura 2.4) y obtener

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(z_0 + \Delta x, y_0) + iv(z_0 + \Delta x, y_0) - u(z_0, y_0) - iv(z_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(z_0 + \Delta x, y_0) - u(z_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(z_0 + \Delta x, y_0) - v(z_0, y_0)}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

Así para cualquier $z \in \Omega$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.11)$$

Y tomando $\Delta x = 0$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(z_0, y_0 + \Delta y) + iv(z_0, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0) - iv(z_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= -i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(z_0, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0)}{\Delta y} + i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(z_0, y_0 + \Delta y) - v(z_0, y_0)}{\Delta y} \right] \end{aligned}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.12)$$

Combinando (2.11) y (2.12) y comparando las partes reales e imaginarias se obtiene (2.10).

Para demostrar lo contrario, se asume que Δz es suficientemente pequeño, tal que el disco $D(z_0, |\Delta z|)$ está en Ω . Entonces se pueden escribir las diferencias

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(z_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0) + i[v(z_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(z_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y} \quad (2.13)$$

Se toma la diferencia de u y se escribe

$$u(z_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0) = [u(z_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0 + \Delta y)] + [u(z_0, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0)] \quad (2.14)$$

Dado que se asume que las primeras derivadas parciales de u y v existen y son continuas en Ω , por el teorema del valor medio existe ξ en $[z_0, z_0 + \Delta z]$ tal que

$$u(z_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x(\xi^*, y_0 + \Delta y) \quad (2.15)$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi^*, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0, y_0) + \epsilon_1 \quad (2.16)$$

y $\epsilon_1 : D((z_0, y_0), |\Delta z|) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $\epsilon_1 \rightarrow 0$ a medida que $\xi^* \rightarrow x_0$ y $\Delta y \rightarrow 0$. Se escribe

$$u(z_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(\xi^*, y_0)\Delta x + \epsilon_1\Delta x \quad (2.17)$$

y de manera similar

$$u(z_0, y_0 + \Delta y) - u(z_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(\xi^*, y_0)\Delta y + \epsilon_2\Delta y \quad (2.18)$$

Y usando formas similares a (2.16) en términos de (2.13), se obtiene

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon_1 + i\epsilon_2 \quad (2.19)$$

Ahora, utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las derivadas

$$\Delta z = \Delta x(1 + i\epsilon_3) + i\Delta y(1 + i\epsilon_4) \quad (2.20)$$

donde $\epsilon_3, \epsilon_4 \rightarrow 0$ a medida que $\Delta z \rightarrow 0$. Ahora ya que

$$\left| \frac{\lambda}{\Delta z + i|\Delta y|} \right| \leq \frac{|\Delta x|}{|\Delta x + i|\Delta y||} + \frac{|\Delta y|}{|\Delta x + i|\Delta y||} \quad (2.21)$$

y los términos del lado derecho de (2.21) tienden a cero a medida que $\Delta z \rightarrow 0$, el término $\lambda/(\Delta x + i|\Delta y|)$ también se acerca a cero. Así, el límite de (2.13) existe si u y v son continuamente diferenciables y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Definición 2.21 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se llama analítica en $z_0 \in \Omega$ cuando tiene una expansión en serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (2.22)$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$. Un dominio $D \subseteq \Omega$ se llama el dominio de convergencia si la serie

de potencias (2.22) converge para todo $z \in D$

Teorema 2.3 Toda función analítica es diferenciable (Stein y Shakarchi, 2010).

Demostración. Tomando $a_0 = f(z_0)$ y la analiticidad de f :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a_1 + (z - z_0) \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-2} \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = a_1 \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0 \quad (2.24)$$

Definición 2.22 Milnor (2011) plantea que un punto singular z_0 de la función compleja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se llama polo de orden $n \in \mathbb{N}$ si existe una función $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ y

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^n} \quad (2.25)$$

Definición 2.23 Según lo planteado por Milnor (2011), una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se llama armónica en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si $u \in C^2(\Omega)$ (es decir, es dos veces continuamente diferenciable) y satisface la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.26)$$

Teorema 2.4 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, entonces $u = \Re(f)$ y $v = \Im(f)$ son funciones armónicas en Ω (Lang, 2013).

Demostración. La analiticidad de f garantiza la existencia de derivadas continuas de todos los órdenes, por lo tanto, solo es necesario demostrar que u y v satisfacen la ecuación de Laplace (2.26). Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann (2.10) en u se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\end{aligned}$$

Y lo mismo vale para v .

Teorema 2.5 Si u y v son funciones armónicas conjugadas y tienen gradientes no nulos, entonces sus líneas de contorno son mutuamente ortogonales (Lang, 2013).

Demostración. Sea $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ y $\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)$. Entonces

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Y dado que los gradientes son ortogonales a las tangentes de las líneas de contorno, las líneas de contorno son mutuamente ortogonales.

Teorema 2.6 Sea u y v funciones armónicas de valor real con gradientes no nulos en Ω . Si las líneas de contorno de u y v son mutuamente ortogonales, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que cv es armónica conjugada a u , es decir, $u + icv$ es analítica en el dominio complejo Ω .

Definición 2.24 Stein y Shakarchi (2010) indican que la función analítica $F = \phi + i\psi$ se dice que es un potencial complejo de E ya que

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

el campo eléctrico complejo $f = E_x - iE_y$ es entonces la derivada negativa del potencial complejo: $f = -F'$.

Definición 2.25 Stein y Shakarchi (2010) señalan que dado $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ dos caminos diferenciables continuamente en la región Ω que se intersectan en algún punto $z = \gamma_0(t) = \gamma_1(s)$, donde $t, s \in [0, 1]$. Una aplicación $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se llama conforme si preserva el ángulo entre γ_0 y γ_1 en z , es decir:

$$\operatorname{Arg}((f \circ \gamma_0)'(t)) - \operatorname{Arg}((f \circ \gamma_1)'(s)) = \operatorname{Arg}(\gamma_0'(t)) - \operatorname{Arg}(\gamma_1'(s)).$$

Definición 2.26 Iwaniec y Kowalski (2021) plantean que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable-R en $z_0 \in \Omega$ si existen $A, B \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(z) = f(z_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) + r(z),$$

donde $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ y el resto r satisface $r(z) = O(|z - z_0|)$, es decir, que $\frac{r(z)}{|z - z_0|} \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Teorema 2.7 Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación *diferenciable-R* en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Entonces f es conforme en $z \in \Omega$ si y solo si es holomorfa en z y $f'(z) \neq 0$. f es conforme en todo el dominio Ω si y solo si es analítica y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ (Gunning y Rossi, 2022).

Teorema 2.8 (Teorema del mapeo de Riemann). Según Gunning y Rossi (2022), cualquier subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ simplemente conexo (propio) es conformemente equivalente al disco unidad $\mathbb{D}$. Es decir: existe un único mapa analítico conforme $g : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que

$$g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) > 0 \tag{4.5}$$

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se delinearán los fundamentos metodológicos que guiaron el desarrollo de esta investigación. Se detalla el diseño investigativo, el método, el tipo y enfoque de estudio, así como los procedimientos requeridos para el desarrollo de esta propuesta investigativa.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño de la investigación

El diseño de la presente investigación se ajusta a un modelo no experimental, tal y como lo caracterizan Hernández-Sampieri et al. (2018), debido a que no se manipularon las variables de forma deliberada. En lo que concierne al lapso de tiempo, se optó por un diseño transversal que implica la recogida de información en un único momento determinado.

3.2.2. Método de investigación

El método de esta investigación fue analítico ya que su fundamento estuvo basado en aplicar el análisis complejo a la mecánica de fluidos. Según Flores et al. (2013), el método analítico permite descomponer un fenómeno en sus elementos fundamentales para comprender mejor sus principios subyacentes, causas y consecuencias.

3.2.3. Tipo de investigación

Tal como se plantea en Mesías (2010), esta investigación se fundamentó en una metodología descriptiva, debido a que se pretende caracterizar y aplicar las funciones analíticas de variable compleja en la dinámica de fluidos.

3.2.4. Enfoque de la investigación

Este estudio contempló la utilización de un enfoque cualitativo debido que los fundamentos de análisis complejo que se pretenden ser aplicados a la mecánica de fluidos, no fueron basados en descripciones numéricas, sino más bien, en aspectos abstractos (García, 2016).

3.2.5. Procedimientos.

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso realizado en este trabajo de investigación:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, sobre los aspectos básicos y fundamentaciones de análisis complejo y la mecánica de fluidos.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la pertinencia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología, en coordinación con el asesor.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregaron nuevamente tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada con el borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.
8. Luego de esto, se integrarán al trabajo las observaciones realizadas por los jurados para su posterior entrega definitiva a la Universidad.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se muestran los resultados de la correspondencia del análisis complejo a la velocidad de un fluido, aplicando las funciones analíticas, mapeos conformes y teorema de mapeo de Riemann en la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos y las propiedades del flujo de fluidos ideales.

4.2. Caracterización de la velocidad de un fluido en términos de las funciones analíticas complejas

Para representar la velocidad de un fluido utilizando funciones analíticas de variable compleja, se puede emplear la teoría del flujo potencial. En la mecánica de fluidos, la teoría del flujo potencial se ocupa de los flujos en los cuales el campo de velocidades es irrotacional. En estos casos, la velocidad del fluido puede ser descrita por una función de potencial de flujo, que es una función de variable compleja.

La representación de la velocidad en términos de funciones de variable compleja se basa en la idea de que la función compleja representa tanto el potencial de velocidad (ϕ) como la función de corriente (ψ) a través de su parte real e imaginaria, respectivamente. Para un flujo bidimensional, si $w(z)$ es una función de variable compleja donde $z = x + iy$, entonces:

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Donde ϕ es el potencial de velocidad, ψ es la función de corriente y x e y son las coordenadas espaciales. Las componentes de la velocidad del fluido, u (velocidad en la dirección x) y v (velocidad en la dirección y), se pueden obtener a partir de las derivadas parciales del potencial de velocidad:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

O también, utilizando la función de corriente:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Las funciones de flujo potencial que son analíticas en una región dada generan flujos irrotacionales en esa región. Para un flujo uniforme en la dirección x , la función de flujo potencial puede ser planteada como:

$$w(z) = Uz$$

donde U es la velocidad constante del flujo. En este caso, la velocidad del fluido es uniforme en todas partes y está dada por U en la dirección x y 0 en la dirección y .

Teorema 4.1 Si $\vec{F} = (u, v)$ es un campo vectorial que representa un flujo irrotacional e incompresible en una región simplemente conectada, entonces existe una función analítica Φ que es una función potencial compleja para $\vec{F}$.

Demostración. Dado un campo vectorial $F = (u, v)$, que es irrotacional e incompresible, esto implica que:

$$\nabla \times F = 0 \quad (\text{irrotacionalidad}),$$

$$\nabla \cdot F = 0 \quad (\text{incompresibilidad}).$$

La irrotacionalidad de F permite afirmar la existencia de una función potencial de velocidad ϕ tal que:

$$F = \nabla \phi.$$

Por otro lado, la incompresibilidad de F sugiere la existencia de una función de

corriente ψ , que satisface:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Las funciones ϕ y ψ deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Definiendo la función de potencial complejo $\Phi(z)$ donde $z = x + iy$:

$$\Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y).$$

La diferenciabilidad de Φ y las condiciones de Cauchy-Riemann garantizan que Φ es analítica. Además, las propiedades armónicas de ϕ y ψ implican que Φ es integrable en la región. Por tanto, Φ es un potencial complejo para F .

4.3. Aplicación de las funciones analíticas, mapeos conformes y teorema de mapeo de Riemann en la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos

Antes de estar dicha aplicación a la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos, se presentan algunos resultados que permiten una coherente relación entre ambos aspectos.

Teorema 4.2 Considérese una función f , que es analítica dentro de un disco definido como $\mathbb{D}(z_0)$. Bajo estas condiciones, se establece que la serie de Taylor correspondiente a f presentará convergencia en la totalidad de dicho disco.

Demostración. Se define R como el radio del disco $\mathbb{D}(z_0)$. Se selecciona un número r tal que $0 < r < R$. Se considera la trayectoria $\gamma : I \rightarrow \mathbb{D}(z_0)$ definida por $\gamma_r(t) = z_0 + re^{it}$, la cual permanece dentro del disco $\mathbb{D}$.

En el trazo de γ_r , la función f se mantiene acotada. Existe un máximo, denotado por M , tal que $|f|$ no supera M en ningún punto del trazo de γ_r . Se analizan los coeficientes de Taylor de la función f , etiquetados como a_k para cada término de la serie de Taylor. Se observa que para cada k entero positivo, $|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$.

Esta desigualdad se mantiene verdadera para todos los valores de k , lo que indica que la serie de Taylor de f converge para cada punto z dentro del disco que cumple $|z - z_0| < r$. Dado que r es arbitrario dentro de $0 < r < R$, se puede acercarse tanto como se desee a R . Por lo tanto, la convergencia de la serie de Taylor no se limita a un subconjunto del disco, sino que se extiende a todo el disco $\mathbb{D}(z_0)$. En consecuencia, se concluye que la serie de Taylor de f converge en todo el disco $\mathbb{D}(z_0)$. $\square$

Las implicaciones del Teorema del mapeo de Riemann dado en 2.8, establecido en Gunning y Rossi (2022), son significativas. Cualquier dominio que no abarque todo el plano complejo puede ser mapeado conforme a un disco unitario. Además, la mayoría de los problemas de valor en la frontera en dominios de discos han sido resueltos. Por lo tanto, es razonable plantear un método para resolver problemas en subconjuntos simplemente conexos y propios de $\mathbb{C}$ mediante la identificación de su mapeo conforme único hacia el disco unitario $\mathbb{D}$. Una vez realizado esto, se puede utilizar la solución existente para las condiciones de frontera transformadas y luego revertir el resultado al dominio original a través del mapeo inverso g^{-1} .

4.3.1. Funciones analíticas y teorema de mapeo de Riemann

Se estudia el flujo alrededor de un cilindro infinitamente largo en un contexto tridimensional, donde el flujo se caracteriza por ser isotrópico en relación con la tercera dimensión. Esta isotropía permite reformular el problema como uno bidimensional, es decir, un problema en el plano complejo centrado en un disco en el origen.

El análisis se centra en la velocidad compleja $f = v_x - iv_y$, la cual se ajusta a ciertas condiciones de frontera específicas. Estas condiciones son:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_\infty, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{cuando} \quad |z| \rightarrow \infty$$

Aquí, v_∞ representa la velocidad de flujo (asintótica) en ausencia de obstáculos. En el límite del disco, se presupone una condición de flujo nulo, lo que implica que la frontera del disco coincide con una línea de corriente, representada por:

$$\psi = \text{constante para } |z| = a$$

Con a siendo el radio del disco. Dado que la función de corriente ψ es armónica, se cumple que $\Delta\psi = 0$. Esta característica armónica de ψ lleva a una formulación del problema bajo condiciones de frontera especificadas anteriormente. Las condiciones en este caso son:

$$\Delta\phi = 0, \quad v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = v_\infty, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{para} \quad |z| \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

Para todo $z \in \partial\mathbb{D}_a$, donde n es la normal exterior al límite del disco $\partial\mathbb{D}_a$. Se observa que ψ y ϕ son funciones armónicas conjugadas y, por ende, ambas constituyen soluciones al problema del potencial complejo $F = \phi + \psi i$. Este problema se reduce a encontrar la primitiva de la expansión de la velocidad compleja:

$$f(z) = \frac{dF}{dz} = C_0 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \frac{C_3}{z^3} + \dots$$

La cual, a su vez, lleva a:

$$F(z) = C_0 z + C_1 \log(z) - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{2z^2} - \dots$$

Ahora, se determinan las constantes complejas $C_k = A_k + iB_k$ a partir de las condiciones de frontera:

$$\frac{dF}{dz} = v_\infty \quad \text{para} \quad |z| \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad \psi = \text{constante para } |z| = a$$

Lo que inmediatamente otorga $C_0 = v_\infty$. Para la condición de frontera restante, se escribe el potencial complejo $F = \phi + i\psi$ en forma polar:

$$F(re^{i\theta}) = v_\infty re^{i\theta} + (A_1 + iB_1) \log(re^{i\theta}) - \frac{A_2 + iB_2}{r} e^{-i\theta} - \frac{A_3 + iB_3}{2r^2} e^{-2i\theta} - \dots$$

Y al separar la parte imaginaria para la función de corriente, se obtiene:

$$\psi(r, \theta) = v_\infty r \sin \theta + B_1 \log r + A_1 \theta + \frac{A_2}{r} \sin \theta - \frac{B_2}{r} \cos \theta + \frac{A_3}{2r^2} \sin 2\theta - \frac{B_3}{2r^2} \cos 2\theta + \dots$$

Sustituyendo $r = a$ en la ecuación anterior, se determina que $A_1 = B_2 = A_3 = B_3 = \dots = 0$ y que $v_\infty a + A_2/a = 0$, ya que ψ debe ser constante e independiente de θ en el círculo. De esta manera, se obtiene $A_2 = -v_\infty a^2$, y se hallan todas las constantes excepto B_1 :

$$F(z) = v_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + iB_1 \log(z)$$

Al omitir el término $iB_1 \log(z)$ y fijar $a = 1$, se obtiene el potencial complejo del flujo ideal alrededor del disco unitario.

4.3.2. Mapeos conformes

Los mapeos conformes son especialmente útiles para el análisis de flujos de fluidos ideales planos. Se toma $\Gamma(\omega) = \phi(\omega, \eta) + i\psi(\omega, \eta)$ como una función analítica que representa el potencial complejo para un flujo estacionario en un dominio plano $\omega \in D$. Al componer el potencial complejo $\Gamma(\omega)$ con un mapeo conforme biunívoco $\omega = g(z)$, se obtiene un potencial complejo transformado $X(z) = \Gamma(g(z)) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$ en el dominio correspondiente $\Omega = g^{-1}(D)$. Así, se pueden emplear mapeos conformes para generar flujos de fluidos en dominios complejos a partir de flujos conocidos en dominios más sencillos. Además, considerando que las velocidades complejas son las derivadas de sus potenciales correspondientes, localmente definidos, es decir

$f(z) = \frac{d\omega}{dz}$, la regla de la cadena sugiere que están relacionados mediante la fórmula

$$f(z) = \Gamma'(g(z)) \frac{dg}{dz}$$

bajo el mapeo conforme $\omega = g(z)$.

Ejemplo 4.1 El mapeo conforme

$$\varpi = (iz)^{2/3}$$

convierte la región

$$\Omega = \left\{ -\frac{1}{2}\pi < \arg z < \pi \right\} = \mathbb{C} \setminus \{x < 0, y < 0\}$$

que se encuentra fuera del cuadrante inferior izquierdo, al semiplano superior

$$D = \{\operatorname{Im} > 0\}$$

.

Tal como se menciona, el potencial complejo

$$\Pi(\varpi) = \varpi$$

equivale al flujo horizontal uniforme en D con velocidad de fluido

$$\mathbf{v} = (1, 0)$$

Combinando este mapeo conforme se obtiene el potencial complejo transformado

$$X(z) = \Pi \circ g(z) = (iz)^{2/3}$$

sobre Ω , con el correspondiente campo de velocidad compleja

$$f(z) = X'(z) = \frac{2}{3}iz^{-1/3}$$

adecuado para el flujo de fluido ideal en torno a una esquina externa. Esta condición difiere notablemente del flujo generado por el potencial

$$\chi(z) = \frac{1}{2}z^2$$

con una velocidad compleja

$$f(z) = z$$

anteriormente discutido. Ambos constituyen flujos de fluido matemáticamente válidos, no obstante, varían considerablemente en su estructura geométrica debido a sus singulares comportamientos asintóticos a distancias extensas. El primero parece ser la representación más plausible de movimiento fluido desde una perspectiva física, destacando las sutiles peculiaridades observadas en las líneas de corriente próximas a la esquina, que son particularmente llamativas.

Se analiza el movimiento de un fluido alrededor de una estructura sólida, bajo las suposiciones estándar de incompresibilidad y flujo laminar no turbulento, que son generalmente aceptadas para flujos ordenados en tres dimensiones. Se considera que el objeto tiene una forma uniforme a lo largo de la dirección axial, permitiendo así concentrar el estudio en un flujo bidimensional alrededor de una región cerrada y limitada $D \subset \mathbb{R}^2$, que representa la sección transversal de un objeto cilíndrico.

En el dominio complementario $\Omega = \mathbb{C} \setminus D$, ocupado por el fluido, el potencial de flujo $\phi(x, y)$ debe satisfacer la ecuación armónica de Laplace $\Delta\phi = 0$ en la región externa al objeto. Para la estructura sólida en cuestión, se deben aplicar condiciones de contorno homogéneas en la frontera $\partial\Omega = \partial D$, expresadas por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0,$$

indicando la inexistencia de intercambio de fluido hacia dentro del objeto. Debido a que un mapeo conforme conserva los ángulos, también mantiene automáticamente la dirección normal en la frontera, por lo que se preservan las condiciones de Neumann.

Dado que el flujo se desarrolla en un dominio ilimitado, es crucial especificar el movimiento del fluido a grandes distancias. Se asume que el objeto se encuentra en un flujo horizontal constante, similar a un túnel de viento. A una distancia considerable del objeto, el campo de velocidad del fluido $\mathbf{v} = (1, 0)^T$ se selecciona de tal manera que la velocidad del fluido se mueve de izquierda a derecha con una velocidad asintótica estandarizada a 1. Por lo tanto, el potencial de flujo debe cumplir con la aproximación

$$\phi(x, y) \approx x, \quad \text{lo que implica que } \nabla \phi \approx (1, 0) \quad \text{cuando } x^2 + y^2 \gg 0.$$

Desde una perspectiva física alternativa, se puede considerar que se está en un objeto en movimiento horizontal hacia la izquierda a velocidad unitaria a través de un fluido inicialmente en reposo.

Ejemplo 4.2 Placa con Inclinación. Ahora se analiza el caso de una placa que se encuentra inclinada dentro de un flujo de fluido que se mueve horizontalmente de forma uniforme. La sección que se examina es el segmento de línea

$$z(t) = te^{-i\phi}, \quad \text{con } -1 \leq t \leq 1,$$

el cual se obtiene mediante la rotación del segmento horizontal $[-1, 1]$ por un ángulo $-\phi$.

Se busca establecer un flujo fluido alrededor de un segmento inclinado que exhiba un comportamiento asintóticamente horizontal a distancias considerables. Como se

observó en situaciones previas, la corriente de aire procede de izquierda a derecha, lo que lleva a referirse al ángulo α como el ángulo de ataque del elemento respecto al flujo.

Es importante notar que aunque la rotación de un objeto en un flujo de fluido puede no ser perceptible a simple vista, girar un disco con simetría circular no modifica el flujo que lo rodea. De esta manera, la rotación dada por $u = e^{i\alpha}z$ alrededor del ángulo α convierte el potencial del disco en un potencial complejo

$$\Upsilon(u) = \Omega(e^{-i\alpha}u) = \frac{1}{2} \left(e^{-i\alpha}u + \frac{e^{i\alpha}}{u} \right).$$

Bajo esta transformación, las líneas de corriente del flujo resultante ya no se alinean de manera asintótica y horizontal, sino que se inclinan formando un ángulo α . Si se aplica el mapeo de Joukowski previamente mencionado (con u sustituyendo a z) al flujo que ha sido rotado, el círculo es nuevamente aplastado hacia el segmento lineal horizontal. Sin embargo, las líneas de corriente mantienen un ángulo α en distancias extensas. Si a continuación se rota el flujo obtenido en un ángulo $-\alpha$, se logrará orientar el segmento al ángulo deseado y reajustar las líneas de corriente para que recuperen una orientación horizontal asintótica. Integrando estos conceptos, se infiere que el potencial complejo definitivo se expresa como

$$\Omega(z) = e^{i\alpha} \left(z \cos \alpha - i \sin \alpha \sqrt{z^2 - e^{-2i\alpha}} \right).$$

4.4. Análisis de las propiedades del flujo de fluidos ideales expresado mediante un potencial complejo

En este apartado, se considera un flujo de fluido que es incompresible y no tiene vorticidad, representado por las funciones de velocidad $u(x, y)$ y $v(x, y)$. Se define una función analítica g

$$g = u + iv, \tag{4.1}$$

donde u y v son las componentes de la velocidad en el dominio del flujo. En un área de flujo que es conexa y uniforme, se puede identificar una función antiderivada analítica G , tal que

$$G = \phi - i\psi \quad (4.2)$$

y cumple que

$$G' = g. \quad (4.3)$$

Esta función G es referida como el potencial complejo. De acuerdo con las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se establece que ϕ sirve como un potencial de velocidad de manera que

$$\nabla\phi = (u, v). \quad (4.4)$$

Con G siendo analítica, se encuentra que las líneas de nivel constante de ϕ son ortogonales a las líneas de nivel constante de ψ . Dado que ϕ es un potencial de flujo, se deduce que las líneas de nivel constante de ϕ son perpendiculares a la dirección del flujo dada por (u, v) . Así, las líneas de nivel constante de ψ resultan ser paralelas a la dirección del flujo (u, v) , y de esta forma, se comportan como integradoras del campo vectorial de la velocidad (u, v) . Dichas líneas se denominan trayectorias de partículas y también se conocen como líneas de corriente.

Ejemplo 4.3 El flujo más simple tiene $F(z) = \text{constante}$ y velocidad cero.

Ejemplo 4.4 El siguiente flujo más simple tiene un potencial complejo $F(z) = z$. Luego, $F' = 1 + 0i$, por lo que la velocidad es $(1, 0)$. El flujo es paralelo al eje x a velocidad constante. Las líneas de corriente son conjuntos de nivel de $\text{Im } F = y$.

Ejemplo 4.5 El siguiente flujo más simple tiene un potencial complejo $F(z) = z^2$. Las líneas de corriente son conjuntos de nivel de $\text{Im } F = 2xy$. Son hipérbolas con asíntotas en los ejes x e y . El flujo es paralelo tanto al eje x como al eje y .

Teorema 4.3 Considérese $F(z) = \phi + i\psi$ como una función analítica en la región donde $y > 0$ y continuamente diferenciable sobre el conjunto $\{y > 0\}$. Además, se asume que la derivada de F , $F'(z)$, mantiene una dirección constante a lo largo del eje x para $y = 0$. Si se encuentra que F' tiene un límite superior uniforme en el conjunto $\{y > 0\}$, se deduce que F puede ser expresada como $F = az + b$, donde a es un número real y b es un número complejo.

Demostración. El eje x sirve como una trayectoria de partículas y, por extensión, como una línea de nivel para la función ψ . Se asigna c al valor de ψ en este eje. De esta manera, $F - ic$ se manifiesta como real a lo largo del eje x , lo cual la caracteriza como una función entera. Al diferenciarla, se revela que F' también es una función entera y simétrica con respecto al eje x , lo que implica su acotación en todas partes, especialmente en el semiplano superior.

El Teorema de Liouville establece que F' debe ser constante, y esa constante se denota por a . Entonces, la función $F - az$ tiene una derivada nula, lo que lleva a la forma $F = az + b$, con a y b siendo constantes. Dado que $F' = a$ es paralelo al eje x , se deduce que a debe ser un número real.

Teorema 4.4 Sea F analítica en Q y continuamente diferenciable en $\bar{Q} \setminus 0$. Suponer además que la velocidad del fluido es tangente a las curvas de frontera y está uniformemente acotada en Q . Entonces $F = \text{constante}$.

Demostración. En la curva de frontera con $y = 0$, la velocidad $\overline{F'}$ es tangente a la frontera y, por lo tanto, real. Por lo tanto, la parte imaginaria ψ es constante en esta frontera. Sea esa constante c . La función $F - ic$ tiene parte imaginaria nula en el eje real, por lo que, mediante reflexión, se extiende a una función analítica en el semiplano derecho $x \geq 0$ con velocidad acotada y flujo tangente a $x = 0$. Esto implica que $F = az + b$.

La velocidad correspondiente es, por lo tanto, un campo vectorial constante que es tangente tanto a los ejes x como a los ejes y . El vector constante debe ser nulo,

por lo que $F' = 0$.

Teorema 4.5 Considérese Ω como un conjunto abierto y acotado que se halla en el interior de una curva de Jordan diferenciable de forma continua. Se afirma entonces que aquellos flujos incompresibles y no rotacionales que son continuamente diferenciables dentro de Ω , y cuyas velocidades son tangentes a la frontera de Ω , son identificados por tener velocidades que resultan ser cero.

Demostración. Se define la función F como $F = \phi + i\psi$, donde ψ representa la función de corriente y ϕ el potencial de flujo. Se considera que la velocidad es tangencial a la frontera del dominio, lo cual sugiere que dicha frontera puede describirse o bien por una línea de corriente singular o por un conjunto de líneas de corriente que están delimitadas por puntos de estancamiento.

La función ψ mantiene una constancia a lo largo de cada línea de corriente. Esta constancia se extiende hasta la frontera del dominio debido a la propiedad de continuidad de ψ , lo que implica que ψ es constante sobre $\partial\Omega$. Dado que ψ es armónica dentro de Ω y constante en $\partial\Omega$, el principio de unicidad para el problema de Dirichlet dicta que ψ debe ser constante a través de todo el dominio Ω .

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son aplicadas en este contexto para establecer que el gradiente de ϕ , $\nabla\phi$, es nulo. Esto conduce al resultado de que ϕ también es constante en Ω . Por tanto, se concluye que tanto ϕ como ψ son constantes en el dominio Ω , lo cual demuestra que la velocidad del flujo es cero en toda la región.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se muestra el análisis correspondiente según los resultados presentados, y posteriormente se establecen las conclusiones en coherencia con los objetivos planteados, además de las futuras líneas de investigación.

5.2. Análisis

En relación al objetivo 1, de caracterizar la velocidad de un fluido utilizando funciones analíticas de variable compleja, la representación se centró en flujos irrotacionales, donde la velocidad se describe mediante un potencial de flujo que es una función de variable compleja. La función compleja usada representa tanto el potencial de velocidad (ϕ) como la función de corriente (ψ) a través de sus partes real e imaginaria. En flujos bidimensionales, esta representación facilita la obtención de las componentes de la velocidad del fluido mediante derivadas parciales. Además, se introduce un teorema que establece la existencia de una función analítica Φ , que actúa como un potencial complejo para un flujo irrotacional e incompresible, y se proporciona su correspondiente demostración, enfatizando la aplicabilidad de las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las propiedades armónicas de ϕ y ψ en el contexto del flujo de fluidos.

Con respecto al objetivo 2, de aplicar las funciones analíticas, mapeos conformes y teorema de mapeo de Riemann en la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos, se presentó un teorema que establece la convergencia de la serie de Taylor de una función analítica en un disco. Posteriormente, se introduce el Teorema del Mapeo de Riemann, que permite mapear cualquier dominio simplemente conexo hacia un disco unitario, facilitando la solución de problemas de valor en la frontera. Se abordó el flujo alrededor de un cilindro en un contexto tridimensional, reducido a un problema bidimensional en el plano complejo. Se analiza la velocidad compleja y

se establecen condiciones de frontera, conduciendo a una formulación del problema con potenciales complejos y sus respectivas expansiones. Además, se presentó cómo un mapeo conforme puede convertir una región en el semiplano superior y cómo se transforman los potenciales complejos y velocidades complejas bajo estos mapeos.

En correspondencia con el objetivo 3, se introduce una función analítica $g = u + iv$, que combina las componentes de velocidad en un flujo, y se define el potencial complejo $G = \phi - i\psi$, donde $G' = g$. Mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se establece que las líneas de nivel constante de ϕ y ψ son ortogonales entre sí, con las de ψ actuando como líneas de corriente. Se presentan ejemplos de flujos con distintos potenciales complejos, como flujos con velocidad constante y flujos generados por funciones demostrando cómo las propiedades de estos potenciales influyen en las características del flujo.

Además, se analizan teoremas que demuestran condiciones específicas bajo las cuales se pueden determinar las características de los flujos. Se demuestra que un flujo con una derivada de potencial complejo constante y acotada puede ser expresado como una función lineal de la forma $F = az + b$. Otros teoremas exploran condiciones bajo las cuales el flujo se vuelve constante, basándose en la tangencialidad de la velocidad del fluido a las curvas de frontera y su comportamiento en regiones acotadas.

5.3. Conclusiones

En virtud de los resultados de esta investigación y el análisis correspondiente, se presentan las siguientes conclusiones:

1. La caracterización de la velocidad de un fluido utilizando funciones analíticas de variable compleja se enfocó en flujos irrotacionales, empleando un potencial de flujo como función compleja para describir tanto el potencial de velocidad (ϕ) como la función de corriente (ψ).
2. Se aplicaron las funciones analíticas, mapeos conformes y el teorema de mapeo de Riemann en la dinámica de fluidos alrededor de objetos sólidos, permitiendo la transformación de dominios complejos en discos unitarios para simplificar la

solución de problemas de valor en la frontera, además de presentar cómo un mapeo conforme puede convertir una región en el semiplano superior y cómo se transforman los potenciales complejos y velocidades complejas bajo estos mapeos.

3. Se estableció el potencial complejo $G = \phi - i\psi$, a partir de la combinación de componentes de velocidad en un flujo, y se emplearon las ecuaciones de Cauchy-Riemann para determinar las relaciones entre las líneas de nivel constante de ϕ y ψ .

La aplicación del análisis complejo en la mecánica de fluidos ha permitido una descripción simplificada de flujos irrotacionales. Mediante funciones analíticas de variable compleja, se ha caracterizado el potencial de velocidad y la función de corriente en estos flujos, en tanto que utilizando mapeos conformes y el teorema de mapeo de Riemann, se han transformado dominios complejos en geometrías más manejables, facilitando la solución de problemas de valor en la frontera.

5.4. Líneas de investigación

Este estudio supone nuevos retos investigativos, es por esto que a continuación se proponen algunas propuestas de líneas futuras en el marco de esta investigación:

1. Modelado Matemático de Flujos Irrotacionales Usando Funciones Complejas.
2. Desarrollo de Algoritmos Numéricos para Simulación de Flujos con Análisis Complejo.
3. Aplicación de Análisis Complejo en la Predicción de Fenómenos Meteorológicos Extremos.
4. Uso de Transformaciones Conformes en la Optimización de Flujos Hidrodinámicos.
5. Estudio de Singularidades en Flujos de Fluidos mediante Análisis Complejo.

Referencias

- Arregui, F., Cabrera, E., Cobacho, R., Soriano, J., & Gómez, E. (2017). Apuntes de mecánica de fluidos. Colección Académica. Editorial UPV.
- Bottazzini, Umberto. (1986). El cálculo superior: una historia del análisis real y complejo desde Euler hasta Weierstrass. Nueva York: Springer-Verlag.
- Brunton, SL, Noack, BR y Koumoutsakos, P. (2020). Aprendizaje automático para mecánica de fluidos. Revisión anual de mecánica de fluidos , 52 , 477-508.
- Carrucio, E. (2009). Mathematics and Logic in History and Contemporary Thought. (I. Quigly, Trans.) USA: Aldine Transaction. (Original work published 1964).
- Chow, V. (1994). Hidráulica de canales abiertos. Santa Fe de Bogotá: McGraw W-Hill.
- Cotos, R. C. (2019). Mecánica de Fluidos. Volumen 1. Universidad Católica Los Ángeles de Chimbote.
- De las Heras, S. (2012). Mecánica de fluidos en ingeniería. Universitat Politècnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politècnica.
- Domingo, A. M. (2011). Apuntes de mecánica de fluidos. Universidad Politécnica de Madrid, 101.
- Flores, M., Franco, M., Ricalde, D., Garduño, A., & Apáez, M. (2013). Metodología de la investigación. Editorial Trillas, SA de CV.
- García, C. S. R. (2016). Investigación científica. Revista Científica Alas Peruanas, 1(2).
- González-Velasco, AE (2011). Viaje a través de las Matemáticas. Springer Ciencia + Medios comerciales.
- Grañó, J. M. B. (2012). Mecánica de fluidos. Universitat Politècnica de Catalunya. Iniciativa Digital Politècnica.
- Gunning, RC y Rossi, H. (2022). Funciones analíticas de varias variables complejas (Vol. 368). Sociedad Matemática Estadounidense.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2018). Meto-

- dología de la investigación (Vol. 4, pp. 310-386). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Hernández, J., Jiménez, E., Borja, C., & Muñoz, Y. (2023). Mecánica de fluidos. Ingenio y Conciencia Boletín Científico de la Escuela Superior Ciudad Sahagún, 10(20), 100-100.
- Iwaniec, H. y Kowalski, E. (2021). Teoría analítica de números (Vol. 53). Sociedad Americana de Matemáticas.
- Kline, M. (1972). Pensamiento matemático desde la antigüedad hasta la actualidad. Vols. 1-3. Nueva York: Oxford University Press.
- Kreyszig, E. (2011). Matemáticas de Ingeniería Avanzada. 10^a edición. Hoboken, Nueva Jersey: John Wiley Sons, Inc.
- Landau, L. D., Lifshitz, E. M., Berestetskii, V. B., & Pitaevskii, L. P. (2021). Mecánica de fluidos. Reverté.
- Lang, S. (2013). Análisis complejo (Vol. 103). Medios de ciencia y negocios de Springer.
- Laugwitz, D. (1999). Bernhard Riemann 1816-1866, Puntos de inflexión en la concepción de las matemáticas. (Abe Shenitzer, traducción). Boston, MA: Birkhauser.
- López, F. (2019). Mecánica de Fluidos. Segunda edición. Universidad de Coruña.
- Martínez, J. L. G. S., & Estornell, G. C. (2014). Fundamentos de mecánica de fluidos. Editorial Club Universitario.
- Merzbach, U. C., & Boyer, C. B. (2011). A history of mathematics (3rd ed.). John Wiley Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- Mesías, O. (2010). La investigación cualitativa. Universidad Central de Venezuela, 38.
- Mezić, I. (2005). Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. Nonlinear Dynamics, 41, 309-325.
- Mezić, I. (2013). Análisis de flujos de fluidos mediante propiedades espectrales del operador Koopman. Revisión anual de mecánica de fluidos , 45 , 357-378.
- Milnor, J. (2011). Dinámica en una variable compleja. (AM-160): (AM-160) - (Vol. 160). Prensa de la Universidad de Princeton.

- Pasinato, H. D., & Confluencia, R. A. (2008). Fundamentos de mecánica de fluidos. Resumen técnico. Editorial Universitaria de la Universidad Tecnológica Nacional.
- Rezk, K. (2010). CFD como herramienta para el análisis de geometrías complejas: Perspectivas sobre simulaciones eficientes en el tiempo de la construcción de espacios interiores. Karlstad University Studies.
- Sierra, J., Fabre, D. y Citro, V. (2020). Análisis eficiente de la estabilidad de flujos de fluidos utilizando técnicas de mapeo complejas. Comunicaciones de física informática , 251 , 107100.
- Stein, EM y Shakarchi, R. (2010). Análisis complejo (Vol. 2). Prensa de la Universidad de Princeton.
- Terán, H., Torres, G., Arteaga, O. y Sánchez, W. (2018). Mecánica de fluidos. Primera edición electrónica. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.
- Zafarullah, M., Khan, I., Aneesa y Khan, NA (2023). Flujos en espiral de fluidos de tipo de velocidad fraccionada ABC en una región cilíndrica: un estudio de oscilación de amplitud cada vez mayor a través de aplicaciones de análisis complejas. Ondas en medios aleatorios y complejos , 1-28.

ANEXOS

Anexo. Función corriente de Lagrange.

La teoría de las variables complejas encuentra una integración natural en el estudio de los fenómenos fluidos. Se define $w = \phi + i\psi$, donde ϕ representa el potencial de velocidad y ψ es la función de corriente de Lagrange. Bajo esta definición, w resulta ser analítica debido a que cumple con las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

que son precisamente las condiciones de flujo natural que se deben satisfacer. A esta función w se le denomina el potencial de velocidad complejo. También se observa que:

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y.$$

Entre los ejemplos básicos de potenciales de velocidad se incluyen el flujo uniforme $w = Uz$, donde U simboliza la velocidad de flujo, y el vórtice $w = (-i\Gamma/2\pi)\ln(z)$, donde Γ representa la velocidad de rotación en sentido antihorario. Se asigna un rol importante a las transformaciones F que son angulares-preservativas o conformes. Dado que las composiciones de funciones analíticas resultan ser analíticas, se utilizan transformaciones para mapear casos simples hacia escenarios más complejos.

En el flujo alrededor de un cilindro, se incluye la circulación y se examina el caso de un cilindro circular. Se omiten la viscosidad y otros efectos, y se presenta la siguiente expresión para el potencial de velocidad de un flujo alrededor de un cilindro circular:

$$w = \frac{a^2 U}{z} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{z}{a}\right),$$

donde a representa el diámetro del cilindro, U la velocidad de flujo y Γ un parámetro vinculado al vórtice.