

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemáticas

Título

Análisis del modelo matemático de Darcy-Weisbach en el funcionamiento de los
acueductos.

Sustentante

José Manuel Basora Mosquea

Asesor

MA. José Miguel Gómez Guzmán

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024

TÍTULO

ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO DE DARCY-WEISBACH EN EL
FUNCIONAMIENTO DE LOS ACUEDUCTOS.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Análisis del modelo matemático de Darcy-Weisbach en el funcionamiento de los acueductos.

Proyecto de Postgrado presentado por **José Manuel Basora Mosquea** para optar por el título de Maestría en Matemáticas

Composición del tribunal

MA. Danny Daniel Manzueta

Jurado de metodología

MA. Nelson Sánchez

Jurado de Redacción

MA. Leomar Reyes Abreu

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Resumen.	VIII
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos de los acueductos	1
1.2.2 Antecedentes históricos del modelo de Darcy-Weisbach	2
1.2.3 Antecedentes académicos	3
1.3 Planteamiento del problema	5
1.4 Justificación	6
1.5 Objetivos	7
1.5.1 General	7
1.5.2 Específicos	7
1.6 Alcances y límites	7
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.	8
2.1 Introducción.	8
2.2 Marco teórico.	8
2.2.1 Preliminares de los modelos matemáticos	8
2.2.2 Fundamentos básicos de mecánica de fluidos	10
2.2.3 Acueductos	11
2.2.4 Modelo de Darcy-Weisbach	12
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA	19
3.1 Introducción	19
3.2 Marco metodológico	19
3.2.1 Diseño de la investigación	19
3.2.2 Método de investigación	19
3.2.3 Tipo de investigación	19
3.2.4 Enfoque de la investigación	20
3.3 Procedimientos.	20

CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	21
4.1 Introducción	21
4.2 Influencia del caudal en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach	21
4.2.1 Relación caudal-presión	25
4.3 Longitud y diámetro de la tubería en la presión del agua de los acue- ductos según el modelo de Darcy-Weisbach	28
4.4 Impacto de la fricción en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach	32
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	34
5.1 Introducción	34
5.2 Análisis de los resultados.	34
5.3 Conclusiones	35
5.4 Líneas futuras de investigación	36
Bibliografía	38
Anexos.	41

Índice de figuras

4.1	Relación entre caudal y pérdida de presión	27
4.2	Gráfica de la función en relación al diámetro	31
4.3	Gráfica de la pérdida de presión con respecto al coeficiente de fricción	33

Índice de cuadros

5.1	Cronograma	42
5.2	Detalle de gastos	42

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante

José Manuel Basora Mosquea

Asesor

MA. José Miguel Gómez Guzmán

RESUMEN

Esta tesis presenta un análisis del modelo matemático de Darcy-Weisbach en el funcionamiento de los acueductos, que de acuerdo a los objetivos planteados, se determina la influencia que tiene el caudal en la presión del agua, así como también como afecta la longitud y el diámetro de la tubería y el coeficiente de fricción, según el modelo de Darcy-Weisbach.

La metodología de la investigación es no experimental y transversal, se empleó un método analítico-deductivo para descomponer y comprender el modelo de Darcy-Weisbach, analizando su comportamiento en sistemas de flujo de agua. El estudio es de tipo explicativo-descriptivo, con un enfoque cualitativo.

Esta investigación concluye que el caudal, el diámetro y la longitud de la tubería, junto con el coeficiente de fricción, son factores determinantes en la presión del agua. Un incremento en el caudal aumenta la velocidad del fluido y, por tanto, la pérdida de presión debido a la fricción, mientras que un mayor diámetro reduce esta pérdida, mejorando la eficiencia del flujo. Por otro lado, una longitud mayor de la tubería incrementa la pérdida de presión debido a la fricción interna.

Palabras claves: Sistema de acueductos. Ecuación Darcy-Weisbach. Caudal. Coeficiente de fricción.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción.

Este capítulo inicia con una revisión de los antecedentes históricos y académicos que fundamentan el estudio. Se detalla el planteamiento del problema, la justificación, la especificación de los objetivos y la descripción del alcance y límite de esta investigación.

1.2. Antecedentes

En esta sección de antecedentes, se estableció el contexto histórico y académico que ha guiado la fusión del análisis complejo con la mecánica de fluidos, haciendo notar los avances pero también algunos puntos por explorar en la referida temática.

1.2.1. Antecedentes históricos de los acueductos

El término acueducto deriva de su nomenclatura en el Imperio Romano, donde se conocía como *Aquaeductus* (*Aqvaedvctvs*), refiriéndose a cualquier estructura destinada al transporte de agua, ya sea mediante canales, puentes, galerías subterráneas o tuberías. Esta noción difiere de la terminología griega antigua, donde la gestión del agua se identificaba como *Hidráulica* (León, 2004).

El primer sistema de suministro público de agua, conocido como el acueducto de Jerwan, se documenta en Asiria alrededor del 691 a.C. Este fue una creación del Rey Senaquerib, diseñado para suministrar agua a la capital de su reino, Ninive. Paralelamente, en la misma época, el rey Ezequías de Juda (actual Israel) desarrolló un sistema de distribución de agua de más de 30 kilómetros para Jerusalén (León, 2004).

Durante el 312 a.C., en plena Segunda Guerra Samnita y con un incremento poblacional en Roma, los romanos enfrentaron la insuficiencia del río Tiber como única fuente de agua. Esto los llevó a construir el *Aqua Appia*, su primer gran acueducto,

para reducir la vulnerabilidad estratégica de la ciudad. Este sistema, un acueducto subterráneo de aproximadamente 16 km, fue comisionado por Apio Claudio (conocido como el Ciego) y posteriormente renombrado como Vía Apia (López, 2003).

Hacia el 145 a.C., el pretor Marcio erigió el Aqua Marcia, el primer acueducto romano de superficie, extendiéndose por 90 km. Con la evolución de estos sistemas, para el 70 a.C., Roma contaba con más de 10 acueductos y un flujo de 135,000 metros cúbicos de agua diarios. Esta complejidad llevó a la designación de un Curator Aquarum, o Superintendente de Aguas de Roma, siendo Sextos Julios Frontinus el primero en ocupar dicho cargo (León, 2004).

1.2.2. Antecedentes históricos del modelo de Darcy-Weisbach

La génesis de la ecuación Darcy-Weisbach se remonta a Henry Darcy, un destacado ingeniero francés. En 1857, Darcy publicó un documento pionero detallando sus experimentaciones sobre el movimiento del agua en tuberías. Sus hallazgos vincularon la pérdida de energía del fluido, conocida como pérdida de carga, con variables como la velocidad del fluido y el diámetro de la tubería (Marrón, 2002).

Previamente, en 1845, el ingeniero alemán Julius Weisbach había desarrollado una fórmula para estimar la pérdida energética por fricción en flujos tubulares. Aunque su ecuación guardaba similitudes con la posteriormente desarrollada por Darcy, no alcanzó un impacto inmediato comparable. La conocida ecuación de Darcy-Weisbach representa una fusión de los descubrimientos de ambos ingenieros, amalgamando el entendimiento de Darcy sobre la pérdida de carga con la formulación matemática de Weisbach (Marrón, 2002).

Posteriormente, figuras como Ludwig Prandtl, un físico alemán, enriquecieron esta ecuación con sus propias investigaciones. En 1904, Prandtl introdujo la teoría de la capa límite, crucial para comprender el comportamiento de los fluidos en proximidad a superficies sólidas, un factor esencial para el cálculo de la fricción en

tuberías. Esta teoría es un componente integral en el cálculo del factor de fricción en la ecuación Darcy-Weisbach. Asimismo, Theodore von Kármán, un ingeniero y físico húngaro-estadounidense, contribuyó significativamente con sus investigaciones en aerodinámica y mecánica de fluidos. Su trabajo en turbulencias y dinámica de fluidos fue clave para la comprensión moderna de las pérdidas de energía en tuberías, influenciando profundamente la versión contemporánea de la ecuación Darcy-Weisbach (Achour y Amara, 2020).

1.2.3. Antecedentes académicos

De acuerdo con el artículo presentado por Montoya (2012), titulado “Efecto de la presión sobre las fugas de agua en un sistema de tubería simple”, en el cual llegó a la conclusión que la atenuación de las ondas de presión podría ser una herramienta eficaz para detectar y medir la severidad de las fugas en sistemas de tuberías bajo presión. Además, el estudio sugiere que estas ondas de presión atenuadas pueden ser empleadas en el diseño de sistemas que permitan fugas controladas para mitigar las presiones excesivas. La relación entre la disminución de la onda de presión y la tasa de flujo en el sistema se ve influenciada por el tamaño específico del orificio por donde se produce la fuga.

De acuerdo con la investigación realizada por Sousa y Neto (2014), titulada “Ecuación explícita para el cálculo del factor de fricción Darcy-Weisbach en proyectos de riego presurizado”, se concluye que la mayor dificultad de cálculo para determinar la pérdida de presión con la ecuación de Darcy-Weisbach radica en medir el factor de fricción f . En proyectos de riego presurizado generalmente se utilizan ecuaciones implícitas para calcular este factor. Debido a esto, realizaron numerosos estudios con el objetivo de desarrollar ecuaciones que expliquen, sin embargo, los modelos generados se limitan a casos específicos y algunos tienen una precisión cuestionable.

Hernández (2017), en su artículo titulado “Formulación matemática del diseño de redes de abastecimiento”, destacó la importancia de la modelación matemática

en la simulación precisa de sistemas físicos, especialmente en el contexto de redes de distribución de agua. Este enfoque permite analizar diversos escenarios en la red sin la necesidad de experimentaciones físicas. La creación de un modelo matemático para estas redes implica la recopilación exhaustiva de datos sobre su estructura y operación, seguido de un procesamiento adecuado para su integración en programas de análisis especializados.

Este modelo matemático es capaz de calcular variables clave, teniendo en cuenta elementos como tuberías, bombas, válvulas, depósitos, y puntos de consumo o inyección. Aplicando el Método del Gradiente para los cálculos hidráulicos, el modelo es útil para redes ramificadas, malladas y mixtas. El estudio presentado por Hernández ilustra la variedad de factores que deben considerarse en el diseño de una red de abastecimiento y su modelación matemática.

De acuerdo con León y Santiago (2021), en su investigación titulada, Sectorización de redes de distribución de agua potable en el acueducto de CORAASAN utilizando la herramienta Epanet, concluyeron que, de 244 líneas en la red, 32 presentaban una pérdida de carga superior al 1 %, lo que representa un 13.11 % del sistema con presión reducida debido a la fricción. Además, de los 230 nodos analizados, 70 mostraron presiones fuera del rango óptimo (por encima de 40 MCA o por debajo de 10 MCA), indicando que el 30.43 % de los nodos en la parte alta de la red no cumplía con los estándares ideales en el momento del análisis.

Sosua (2012), en su artículo “Adaptaciones de modelos matemáticos para dimensionamiento hidráulico en sistemas de riego presurizado”, tuvo como objetivo desarrollar modelos matemáticos (conjunto de ecuaciones) para la elección de emisores y diseño hidráulico de riego por aspersión, en subunidades de riego de forma geométrica rectangular, triangular y trapezoidal. El modelo propuesto para la elección del emisor involucra parámetros de suelo, agua, plantas y atmósfera, jornada de trabajo y tiempo disponible para que el sistema trabaje en una selección optimizada

de emisores en función de la demanda de presión para el área instalada (aspersores) y el flujo de aproximación (goteo y microaspersores).

El modelo para diseño hidráulico de subunidades de riego rectangulares ofrece la determinación de la mejor posición para la derivación de tubería (menor presión de demanda, menor longitud de tubería y mayor aproximación de la variación máxima de presión en la subunidad), favoreciendo, en este proceso, el uso de Darcy, ecuaciones de pérdida de carga unitaria de Weisbach, Hazen-Williams y Scobey.

1.3. Planteamiento del problema

En años recientes, la escasez de agua se ha intensificado, convirtiéndose en un desafío crítico para diversas instituciones a nivel mundial. Uno de los aspectos clave de esta problemática es la distribución eficiente del agua desde los acueductos hasta los hogares. Es esencial asegurar que el agua mantenga una presión adecuada para alcanzar todas las viviendas. En este contexto, la utilización de modelos matemáticos para calcular y optimizar esta presión cobra una importancia fundamental, ya que permiten no solo garantizar un suministro efectivo, sino también prever la capacidad del sistema para abastecer a toda la comunidad, considerando los retos actuales en el manejo de recursos hídricos.

Los acueductos son infraestructuras esenciales en la administración de los recursos hídricos y son importantes en el abastecimiento de agua para usos doméstico, industrial y agrícola. El diseño y funcionamiento efectivos de estos sistemas dependen significativamente de la capacidad para calcular con precisión las pérdidas de carga en las tuberías, para lo cual el modelo matemático de Darcy-Weisbach juega un papel crucial, ya que ofrece una fórmula para calcular la pérdida de carga debido a la fricción en las tuberías, un factor determinante en el diseño y operación de acueductos.

A pesar de su amplia utilización, el modelo de Darcy-Weisbach se enfrenta a algunas situaciones que incluyen la variabilidad en las características de las tuberías, como

su diámetro y rugosidad, y la adaptación a diferentes regímenes de flujo y condiciones topográficas. Además, factores ambientales como la temperatura y la calidad del agua pueden influir en la eficacia del modelo, lo que afecta la precisión en la predicción de la pérdida de carga. Es por esto, que esta tesis se propuso responder a la pregunta de ¿Cómo analizar la efectividad del modelo matemático de Darcy-Weisbach en el funcionamiento de los acueductos?

Contestar esta interrogante, a su vez implica dar respuesta a las siguientes:

1. ¿Cómo influye el caudal en la presión del agua en los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach?
2. ¿De qué manera la longitud y el diámetro de la tubería afectan la presión del agua en los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach?
3. ¿Cuál es el impacto de la fricción en la presión del agua de los acueductos, evaluado a través del modelo de Darcy-Weisbach?

1.4. Justificación

El agua es un recurso vital, cuya distribución y gestión eficiente son cruciales para el desarrollo sostenible y el bienestar de la sociedad. Los acueductos juegan un papel fundamental en este proceso, proporcionando agua para consumo humano, actividades industriales y agrícolas. Por lo que un análisis de los modelos utilizados en su diseño y operación es esencial para garantizar la sostenibilidad y eficiencia de estos sistemas.

Además, con los cambios en la demanda de agua y los desafíos planteados por el cambio climático y el crecimiento de la población, es imperativo que los modelos hidráulicos como el de Darcy-Weisbach se adapten y evolucionen. Esta tesis analiza cómo el modelo puede ser optimizado o modificado para enfrentar estos retos contemporáneos.

Es por esto también, que este análisis no solo contribuye al campo académico de la ingeniería hidráulica, sino que también ofrece perspectivas prácticas para la implementación de mejoras en los sistemas de acueductos existentes y en el diseño de nuevos sistemas, asegurando un suministro de agua más efectivo y sostenible.

1.5. Objetivos

1.5.1. General

Analizar el modelo matemático de Darcy-Weisbach en el funcionamiento de los acueductos.

1.5.2. Específicos

1. Determinar la influencia que tiene el caudal en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach.
2. Identificar como afecta la longitud y el diámetro de la tubería en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach.
3. Evaluar el impacto de la fricción en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach.

1.6. Alcances y límites

Este estudio corresponde a las matemáticas aplicadas, específicamente se utiliza como referencia el modelo de Darcy-Weisbach y su influencia en el funcionamiento de los acueductos.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.

2.1. Introducción.

En este capítulo se establecen los fundamentos conceptuales que respaldan las bases teóricas del modelo de Darcy-Weisbach. Se realiza una exploración de los principios que rigen este modelo, así como del diseño y funcionamiento de los acueductos.

2.2. Marco teórico.

2.2.1. Preliminares de los modelos matemáticos

Definición 2.1 Un modelo se define como una representación esquemática que simula aspectos de la realidad con un nivel adecuado de fidelidad. Estos esquemas no buscan duplicar la complejidad total del entorno real, sino que buscan facilitar su descripción, análisis o comprensión, sobre todo cuando la interacción directa con la realidad es impracticable (Landeta, 2019).

Definición 2.2 Un modelo matemático consiste en una representación teórica y reducida, derivada de los elementos de la realidad que pretende estudiar o explicar. Dicha representación puede tomar la forma de representaciones gráficas, relaciones funcionales o ecuaciones que sirven para ilustrar fenómenos específicos dentro de un contexto determinado (Dirac, 2017).

2.2.1.1. Elaboración de modelos matemáticos

Conforme a Landeta (2019), la relación entre los modelos teóricos y la realidad se establece mediante dos procesos clave: la abstracción, que demanda identificar los elementos cruciales del problema, y la interpretación, que es el acto de vincular los elementos del modelo con las propiedades y comportamientos del sistema real que se desea representar.

Así, el primer paso en la creación de un modelo matemático es la fase de abstracción. Esta etapa implica formular suposiciones, definir variables y elaborar el enfoque matemático pertinente para el problema. La fase subsiguiente se enfoca en

refinar las herramientas matemáticas escogidas. Las conclusiones extraídas del modelo matemático deberían facilitar pronósticos acerca de la realidad. Posteriormente, se recopilan datos del contexto real del cual se derivó el modelo para contrastarlos con las predicciones realizadas.

1. Se debe considerar preguntas fundamentales como:

- ¿Qué datos son esenciales para el análisis?
- ¿Cuál es la nueva forma del problema a resolver?

2. Elaboración cualitativa del modelo.

- Se inicia con la versión más simplificada del modelo que refleje el sistema.
- Es imperativo verificar que los resultados proporcionados por el modelo respondan a las interrogantes iniciales.

3. Elaboración cuantitativa del modelo.

- Se deben establecer las variables y examinar sus interrelaciones.
- Determinar los parámetros del modelo y asegurar que no existan redundancias.

4. Implementación de las ecuaciones del modelo.

- Se formulan las ecuaciones, apoyándose en un esquema o tabla.

5. Examen de las ecuaciones.

- Se debe confirmar que el análisis responda a las preguntas planteadas.
- Se busca la solución general del problema.

6. Reevaluación de las hipótesis.

- Se intenta optimizar el modelo.
- Si no se resuelven las cuestiones planteadas, se regresa a los pasos anteriores para revisión.

7. Comparación de los resultados con conocimientos previos.

2.2.2. Fundamentos básicos de mecánica de fluidos

Definición 2.3 Se define la presión como la magnitud de fuerza aplicada por unidad de área sobre una sustancia o una superficie específica, según lo describen Mott y Untener (2015).

$$p = \frac{F}{A}$$

Definición 2.4 El peso específico se describe como la relación entre el peso de una sustancia y su volumen, como lo explican Mott y Untener (2015).

$$\gamma = \frac{w}{V}$$

Donde:

- γ representa el peso específico
- V es el volumen de la sustancia
- w indica el peso de la sustancia

Definición 2.5 La velocidad en un sistema de flujo depende de factores como el tipo de fluido, la longitud del sistema, el tipo de conducto, la caída de presión y los dispositivos involucrados, además de las condiciones de temperatura y presión, según Mott y Untener (2015).

$$V = \frac{Q}{A}$$

Definición 2.6 Según Mott y Untener (2015), el Caudal se refiere al volumen de fluido que pasa a través de una sección transversal específica en una unidad de tiempo.

$$Q = V \times A$$

2.2.3. Acueductos

Definición 2.7 Se describe un acueducto como una estructura creada para llevar agua desde una fuente natural, tal como un río o quebrada, hacia un destino de uso final, como puede ser una residencia (González y Pulido, 2019).

Definición 2.8 Se entiende por sistema de acueducto al conjunto de infraestructuras encargadas de transportar el agua desde el punto de captura en la fuente hasta el punto de conexión con el sistema interno de un inmueble para proporcionar servicio de agua potable (Garro, 2013).

Definición 2.9 Conforme a Garro (2013), los elementos constitutivos de un sistema de acueducto incluyen:

1. La fuente de suministro de agua.
2. La captura de agua superficial y/o subterránea.
3. La conducción.
4. El dispositivo para remover arena.
5. La estación de tratamiento de agua.
6. Los depósitos para equilibrar el sistema.
7. Las redes para distribuir el agua.
8. Componentes adicionales como estaciones de bombeo según necesidad.

Definición 2.10 Las fuentes de abastecimiento comprenden todas las aguas de origen superficial o subterráneo. En circunstancias excepcionales, se pueden considerar como fuentes las aguas de lluvia y marinas. Estas constituyen el punto inicial para el suministro en sistemas de agua potable (Romero, 2005).

Definición 2.11 La captación de aguas superficiales se refiere a las estructuras necesarias para recoger aguas de ríos, lagos, lagunas, océanos o mares (Romero, 2005).

Definición 2.12 La captación sumergida, diseñada para recoger agua desde el fondo de un río o cualquier fuente hídrica superficial, incluye principalmente tuberías y rejillas de captación (Romero, 2005).

Definición 2.13 La captación de aguas subterráneas implica el uso de estructuras y elementos para obtener aguas de acuíferos, a través de pozos profundos, excavados, manantiales o galerías de filtración, y su incorporación en el sistema de acueducto (Romero, 2005).

Definición 2.14 La aducción es la sección donde se transporta el agua sin tratar desde la captación hasta la planta de tratamiento, generalmente a través de canales abiertos, y se aconseja que sea lo más directa posible para eficiencia (López, 2003).

Definición 2.15 El desarenador actúa como la primera etapa en el proceso de tratamiento del agua, siendo una estructura hidráulica destinada a eliminar partículas de cierto tamaño que no fueron retenidas en la captación de una fuente superficial (López, 2003).

Definición 2.16 Los tanques de compensación son estructuras diseñadas para almacenar cierto volumen de agua tratada por un tiempo determinado, con el propósito de equilibrar el volumen entre consumo y suministro, asegurando la provisión a los usuarios (López, 2003).

Definición 2.17 La red de distribución comprende el conjunto de tuberías que se encargan de llevar el agua potable a las viviendas y establecimientos. Estas redes, que se extienden desde los tanques de almacenamiento, incluyen tuberías, uniones, válvulas de control, reguladores de presión, ventosas, hidrantes, conexiones domiciliarias y otros accesorios necesarios para la operación adecuada del sistema (Sánchez y Martínez, 2016).

2.2.4. Modelo de Darcy-Weisbach

En el campo de la dinámica de fluidos, se utiliza la ecuación de Darcy-Weisbach como un modelo fenomenológico para expresar la relación entre la pérdida de carga (o

disminución de presión) y la fricción en una longitud específica de tubería, vinculada con la velocidad media del fluido en movimiento (Valiantzas, 2008).

La formulación original de la ecuación fue obra de Henry Darcy, un ingeniero de origen francés, y de Julius Weisbach, un científico e ingeniero alemán. Fue Weisbach quien introdujo el coeficiente adimensional ζ en la ecuación, mientras que Darcy contribuyó con extensos experimentos en tuberías para el flujo de agua.

2.2.4.1. Desarrollo de la ecuación de Darcy-Weisbach

Conforme a lo indicado por Minhoni et al. (2020), la pérdida de carga en un fluido se determina a partir de una función que depende de la densidad, el gradiente de presiones, la rugosidad relativa, entre otros factores:

$$f\left(\frac{\Delta p}{l}, \rho, V, D, \mu, \varepsilon\right)$$

Las mencionadas variables poseen la siguiente estructura dimensional:

$$\begin{aligned} [p] &= [ML^{-3}T^0]; & [l] &= [ML^{-1}T^{-1}]; & \left[\frac{\Delta p}{l}\right] &= [M^0L^{-2}T^{-2}]; \\ [V] &= [M^0LT^{-1}]; & [D] &= [L]; & [\varepsilon] &= [M^0L^0T^0] \end{aligned}$$

Tomando el grupo (ρ, V, D) :

$$\pi_1 = \rho_1^x \cdot V_1^y \cdot D_1^z \cdot \mu$$

$$\pi_2 = \rho_2^x \cdot V_2^y \cdot D_2^z \cdot \frac{\Delta p}{l}$$

$$\pi_3 = \rho_3^x \cdot V_3^y \cdot D_3^z \cdot \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= [ML^{-3}T^0]^{x_1} [ML^{-1}T^{-1}]^{y_1} [M^0L^{-1}T^{-1}]^{z_1} \quad (x_1, y_1, z_1) = (-1, -1, -1) \Rightarrow \pi_1 = \frac{\mu}{\rho V D} \\
\pi_2 &= [ML^{-3}T^0]^{x_2} [M^0L^{-1}T^{-1}]^{y_2} [M^0L^{-2}T^{-2}]^{z_2} \Rightarrow \pi_2 = \frac{\left(\frac{\Delta p}{l}\right) \cdot D}{\rho V^2} \\
\pi_3 &= [ML^{-3}T^0]^{x_3} [M^0L^{-1}T^{-1}]^{y_3} [M^0L^0T^0]^{z_3} \Rightarrow \pi_3 = \frac{\varepsilon}{D} = \varepsilon_r \quad (\text{rugosidad relativa})
\end{aligned}$$

Donde la función ϕ es definida como:

$$\phi \left(\frac{1}{Re'}, \frac{\left(\frac{\Delta p}{l}\right) \cdot D}{\rho V^2}, \varepsilon_r \right) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta p}{l} \cdot D = \rho V^2 f \left(\frac{1}{Re'}, \varepsilon_r \right)$$

Por lo tanto, la pérdida de carga h_f es:

$$h_f = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} = \frac{l \cdot \rho \cdot V^2}{2 \cdot D \cdot g} \cdot 2f \left(\frac{1}{Re'}, \varepsilon_r \right) \Rightarrow h_f = f \frac{L \cdot V^2}{D \cdot 2g}$$

Definición 2.18 Según Saldarriaga (2007), el número de Reynolds es un indicador adimensional en la mecánica de fluidos y en el análisis de fenómenos de transporte, que se utiliza para describir el comportamiento de un fluido en movimiento. Este número representa una relación de magnitudes, característica de los números adimensionales.

Reynolds identificó que el comportamiento del flujo en una tubería está determinado por factores como la velocidad del fluido, el diámetro de la tubería y ciertas propiedades físicas del fluido. El número de Reynolds es, por tanto, una medida adimensional que vincula estas propiedades físicas del fluido, su velocidad y la geometría del conducto por donde circula, expresado por:

$$Re = \frac{D \cdot v \cdot \rho}{\mu}$$

donde:

- Re = Número de Reynolds
- D = Diámetro de la tubería

- v = Velocidad del fluido
- ρ = Densidad del fluido
- μ = Viscosidad del fluido

Definición 2.19 De acuerdo con Achour y Amara (2020), la fórmula para calcular la pérdida de carga es la siguiente:

$$h_f = f_D \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

donde

- h_f representa la pérdida de carga por fricción (en unidades SI: m);
- L es la longitud total de la tubería (m);
- D indica el diámetro hidráulico de la tubería (en una sección circular, sería el diámetro interno) (m);
- V es la velocidad media del fluido, equivalente a la tasa de flujo volumétrico dividida por el área de la sección transversal mojada (m/s);
- g es la aceleración debido a la gravedad (m/s^2);
- f_D es el coeficiente de fricción de Darcy, un valor adimensional que se puede obtener de un diagrama de Moody o resolviendo la ecuación de Colebrook modificada. Es importante no confundirlo con el factor de fricción de Fanning, f .

Definición 2.20 Achour y Amara (2020) señalan que la pérdida de carga h_f expresa la pérdida de presión Δp como la altura de una columna de fluido,

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h_f$$

donde ρ es la densidad del fluido, la ecuación de Darcy–Weisbach también se puede escribir en términos de pérdida de presión:

$$\Delta p = f_D \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho V^2}{2}$$

donde la pérdida de presión debido a la fricción Δp (Pa) es una función de:

- la relación de la longitud al diámetro de la tubería, L/D ;
- la densidad del fluido, ρ (kg/m³);
- la velocidad media del flujo, V (m/s), como se define arriba;
- Factor de Fricción de Darcy; un coeficiente (adimensional) de flujo laminar o turbulento, f_D .

Dado que la ecuación de pérdida de presión se puede derivar de la ecuación de pérdida de carga multiplicando cada lado por ρ y g .

2.2.4.2. Régimen laminar

Según Shin y Park (2017), en tuberías de sección circular uniforme con flujo newtoniano en régimen laminar, se puede calcular la pérdida de carga usando la fórmula de Poiseuille. Basándose en la ecuación de flujo y considerando que el diámetro es el doble del radio, se obtiene:

$$\Delta h_u = \frac{8\mu L Q}{\pi g \rho R^4} = \frac{8\mu L \dot{V}}{\pi g \rho R^2} = \frac{32\mu L \dot{V}}{g \pi D^2} \quad (2.1)$$

Incorporando la definición del número de Reynolds, $Re = \frac{VD}{\mu}$, esta fórmula se transforma en:

$$\Delta h_u = \frac{32\mu L \dot{V}}{g D^2} = \frac{64L \frac{V^2}{D}}{Re D 2g} = \frac{f L \frac{V^2}{D}}{2g} \quad (2.2)$$

Aquí, $f = 64/Re$ representa el coeficiente de fricción (adimensional). Este enfoque es consistente con la fórmula empírica de Darcy-Weisbach:

$$\Delta h = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (2.3)$$

En el caso particular del flujo laminar, se utiliza $f = 64/Re$, también conocido como la ecuación de Hagen-Poiseuille.

Estas ecuaciones también permiten calcular la tensión cortante en la pared de tuberías circulares en flujo laminar:

$$\tau_0 = \frac{\Delta h_u \gamma R}{2L} = \frac{\Delta h_u \gamma}{2L} \quad (2.4)$$

Al despejar Δh_u , se llega a:

$$\Delta h_u = \frac{2\tau_0 L}{\gamma R} = \frac{4\tau_0 L}{\gamma D} \quad (2.5)$$

Comparando con Darcy-Weisbach, se encuentra la tensión en las paredes de la tubería:

$$\tau_0 = \frac{\rho V^2}{8g} = \frac{\rho u^2}{8} \quad (2.6)$$

2.2.4.3. Régimen turbulento

De acuerdo con Shin y Park (2017), la ley experimental de Darcy-Weisbach se aplica a todos los tipos de flujo, usando el coeficiente de fricción apropiado. En tuberías circulares con flujo newtoniano laminar, el coeficiente de fricción es $f = \frac{64}{Re}$.

Proposición 2.2.1 En el régimen turbulento ($Re > 2300$) y para tuberías lisas, se emplean diferentes fórmulas para $f(Re)$ según el valor del número de Reynolds. Por ejemplo, para $3000 < Re < 100000$, se usa la ecuación de Blasius:

$$f = 0.3164 Re^{-0.25} \quad (2.7)$$

Y para números de Reynolds más altos, pero menores que 3×10^6 , se recurre a la ecuación de von Karman:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.869 \ln \left(\frac{Re}{\sqrt{f}} \right) - 0.8 = 2 \log \left(\frac{Re}{\sqrt{f}} \right) - 0.8 \quad (2.8)$$

Proposición 2.2.2 En condiciones de turbulencia y tuberías rugosas, se aplican

distintas relaciones $f = f(e/D, Re)$, donde e es la rugosidad y D el diámetro del conducto.

Proposición 2.2.3 Para flujo turbulento en tuberías circulares, la fórmula de Colebrook es la más utilizada:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0.869 \ln \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.523}{Re\sqrt{f}} \right) = -2 \log \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{2.523}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (2.9)$$

Esta es una ecuación implícita que se resuelve eficientemente con métodos numéricos.

Para un rango de rugosidades relativas $10^{-6} < e/D < 10^{-2}$ y números de Reynolds $5000 < Re < 10^8$, la siguiente aproximación explícita es útil:

$$f = \frac{1.325}{\left[\ln \left(\frac{e/D}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) \right]^2} \quad (2.10)$$

Esta proporciona valores cercanos a los de Colebrook en un amplio rango de interés.

En casos de alta rugosidad relativa y altos números de Reynolds, f depende principalmente de la rugosidad relativa, como se muestra en el diagrama de Moody, y puede ajustarse por:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.14 - 2 \log \left(\frac{e}{D} \right) \quad (2.11)$$

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

Este capítulo presenta los elementos metodológicos que guiaron el desarrollo de esta investigación. Se especifica el diseño, el método, el enfoque y tipo de estudio, junto con los procedimientos para la elaboración de esta investigación.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño de la investigación

Esta investigación es no experimental, de acuerdo con Álvarez (2020), este diseño es apropiado cuando el objetivo de la investigación es analizar fenómenos tal y como ocurren naturalmente, sin la intervención o manipulación de las variables por parte del investigador. Por otro lado, fue transversal ya que según Hernández-Sampieri et al. (2018), implica la recolección de datos en un instante específico.

3.2.2. Método de investigación

Este estudio se centró en la utilización del método analítico-deductivo, que siguiendo la descripción de Espinoza (2020), el método analítico implica descomponer un fenómeno complejo, como el modelo de Darcy-Weisbach, en sus componentes fundamentales para entender sus causas, naturaleza y efectos. Esta aproximación es esencial para analizar cómo este modelo matemático describe y predice el comportamiento de los fluidos en sistemas de conducción de agua.

3.2.3. Tipo de investigación

De acuerdo a las características, esta investigación es de tipo explicativa-descriptiva. Es explicativa porque requiere una comprensión detallada de sus principios matemáticos y físicos, y permite desglosar y clarificar cómo cada componente del modelo influye en el comportamiento del flujo de agua, facilitando así la interpretación de sus resultados y la predicción de su comportamiento en distintas condiciones. Además, fue de tipo analítica porque se buscó evaluar la precisión, eficacia y viabilidad del

modelo en diversas situaciones (Ramos-Galarza, 2020).

3.2.4. Enfoque de la investigación

El enfoque que se empleó en esta tesis fue el cualitativo, porque el análisis fue realizado tomando en cuenta aspectos teóricos y no mediciones numéricas experimentales (Babativa, 2017). Además, se aplicó un enfoque deductivo que permite extraer conclusiones significativas basadas en los resultados obtenidos, conforme a lo establecido por Sabino (2014).

3.3. Procedimientos.

En este apartado se detallan las etapas en el proceso de elaboración y entrega de esta tesis de postgrado.

1. Presentación y defensa preliminar del tema de investigación para obtener su aprobación.
2. Investigación bibliográfica sobre los principios, antecedentes y marco teórico relacionados con el modelo de Darcy-Weisbach y principios de la mecánica de fluidos.
3. Elaboración de los primeros tres capítulos del anteproyecto, cumpliendo con los requisitos establecidos.
4. El trabajo fue entregado al asesor para su evaluación, corrección y aprobación final.
5. Se desarrollaron los capítulos IV y V, junto con otros componentes del proyecto, de acuerdo a las normativas de la UTECO.
6. Se entregaron tres copias del proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada para su presentación o defensa.
7. Finalmente, se incorporaron las observaciones de los jurados al trabajo y se entregó la versión definitiva a la Universidad.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados conforme a los objetivos de investigación, a los fines de analizar el modelo matemático de Darcy-Weisbach en el funcionamiento de los acueductos.

4.2. Influencia del caudal en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach

En esta sección, inicialmente se presentan los fundamentos de la mecánica de fluidos que permiten caracterizar la ecuación de Darcy-Weisbach y así establecer la relación existente entre el caudal y la presión del agua de los acueductos según este modelo.

Partiendo de un conducto horizontal de diámetro fijo d y área seccional A , que permite el paso de un fluido no compresible de forma continua. Para simplificar, se toman dos secciones; $S1$ y $S2$ de la tubería separadas por una distancia L .

En la sección $S1$, la presión y la velocidad del fluido se establecen como P_1 y V_1 , respectivamente. En la sección $S2$, estos parámetros son P_2 y V_2 . La diferencia de presión entre $S1$ y $S2$ ($P_1 > P_2$) induce el desplazamiento del fluido a través del conducto.

Este movimiento está sujeto a una pérdida de carga por fricción, lo que justifica la aplicación del principio de Bernoulli, el cual plantea que una disminución en la presión o la energía potencial del fluido aumenta la velocidad del flujo del fluido, es decir, que para un fluido incompresible, la suma de su energía potencial, presión y velocidad permanece constante.

Mediante la aplicación del teorema de Bernoulli a las secciones $S1$ y $S2$, se formula

lo siguiente:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g h_2 + H_f \quad (4.1)$$

Aquí H_f simboliza la pérdida de carga por fricción. Al dividir la ecuación dada en (4.1) por ρg , se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 + H_P \quad (4.2)$$

En el caso de una tubería con orientación horizontal (lo que implica que la entrada y salida están a igual altura referencial), se cumple que:

$$h_1 = h_2$$

Dado que se considera un diámetro constante a lo largo de la tubería, se deduce que:

$$v_1 = v_2$$

Implementando estas condiciones en la ecuación (4.2), se transforma en:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_1 + H_P \quad (4.3)$$

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + H_P \quad (4.4)$$

Por consiguiente, al reorganizar la ecuación (4.4) para despejar la pérdida de carga, se obtiene:

$$H_P = \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} \quad (4.5)$$

$$H_P = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} \quad (4.6)$$

$$\rho g H_P = P_1 - P_2 \quad (4.7)$$

La resistencia al movimiento de un fluido surge del efecto combinado de la humedad y la textura superficial. Esto induce una fricción que impide el flujo del fluido,

disminuyendo su velocidad. Se define f' como la resistencia a la fricción por unidad de superficie mojada y por unidad de velocidad cuadrada.

La fuerza de fricción F se determina como: $F = f' \cdot A_{\text{mojada}} \cdot v^2$

$$F = f' \cdot 2\pi r L \cdot v^2$$

$$F = f' \cdot \pi d L \cdot v^2$$

$$F = f' \cdot x \cdot v^2 \quad (4.8)$$

donde el diámetro se denota por d tal que $d = 2r$, y el perímetro por x , donde $x = \pi d$.

Se define la fuerza neta como la sumatoria de las fuerzas ocasionadas por la presión en los puntos S_1 y S_2 , junto con la fuerza de fricción del líquido.

- En el punto S_1 , se establece la presión mediante la relación

$$P_1 = \frac{F_1}{A}$$

deduciendo que la fuerza neta se expresa por

$$F_1 = P_1 A$$

En este contexto, se asume que la dirección de la fuerza generada por la presión es positiva.

- Para el punto S_2 , la presión se determina por

$$P_2 = \frac{F_2}{A}$$

de donde se infiere que la fuerza neta resulta ser

$$F_2 = P_2 A$$

y en este caso, la dirección de la fuerza inducida por la presión se considera negativa.

- Respecto a la fuerza de fricción del fluido F , esta actúa como una resistencia, asignándosele una dirección negativa.

Al resolver el balance de fuerzas en la dirección horizontal, se formula:

$$P_1 A - P_2 A - F = 0$$

$$P_1 A - P_2 A = F$$

$$(P_1 - P_2) A = F$$

$$P_1 - P_2 = \frac{F}{A} \quad (4.9)$$

Incorporando los valores de F y $(P_1 - P_2)$ de las ecuaciones (4.7) y (4.8), se obtiene

$$\rho g H_f = \frac{f' L \rho v^2}{A}$$

La reorganización de estos términos da:

$$H_F = \frac{f'}{\rho g} \times \frac{x}{A} \times L v^2 \quad (4.10)$$

Considerando que,

$$\frac{x}{A} = \frac{\text{Perímetro}}{\text{Área}} = \frac{\pi d}{\frac{1}{4} \pi d^2} = \frac{4}{d}$$

Al sustituir estos valores se obtiene:

$$\frac{x}{A} = \frac{4}{d}$$

Integrando esta relación en la ecuación (4.10):

$$H_f = \frac{f'}{\rho g} \times \frac{4Lv^2}{d} \quad (4.11)$$

Posteriormente, se efectúa la siguiente sustitución:

$$\frac{f'}{\rho} = \frac{f}{2}$$

Donde,

f' representa la resistencia por fricción,

ρ denota la densidad del fluido,

f es el coeficiente de fricción.

Dado que el fluido es incompresible, esto implica que no se presenta cambio alguno en la densidad ante la aplicación de una fuerza externa.

$$H_f = \frac{f}{2} \times \frac{4Lu^2}{d} \quad (4.12)$$

Al reorganizar, se tiene que

$$H_F = \frac{4fLu^2}{2gd} \quad (4.13)$$

Ahora bien, el factor de fricción de Darcy es cuatro veces el factor de fricción de Fanning, f_F , es decir, $f_D = 4f_F$. Por tanto, se obtiene

$$h_f = f_D \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad (4.14)$$

4.2.1. Relación caudal-presión

El caudal en un acueducto está directamente relacionado con la velocidad del fluido, como lo indica la ecuación de continuidad, que establece que el caudal Q es igual al producto del área transversal del conducto A y la velocidad del fluido v . Ma-

temáticamente, $Q = A \cdot v$. En un acueducto de diámetro constante, cualquier cambio en el caudal implica un cambio directamente proporcional en la velocidad del fluido.

Según Darcy-Weisbach, cualquier aumento en la velocidad (y por ende en el caudal) conduce a un aumento en la pérdida de presión debido a la fricción, asumiendo que otros factores como la longitud y el diámetro del conducto permanecen constantes.

El factor de fricción f es crucial en la determinación de la pérdida de presión. Este factor depende de la rugosidad del conducto y del régimen de flujo (laminar o turbulento), determinado por el número de Reynolds. En flujos turbulentos, comunes en acueductos, el factor de fricción es más sensible a cambios en la velocidad, lo que implica una mayor sensibilidad de la pérdida de presión al caudal.

En el diseño de acueductos, las variaciones en el caudal afectarán la presión a lo largo del sistema, dado que un aumento significativo en la demanda de agua (y por tanto en el caudal) podría requerir ajustes en el sistema para mantener la presión dentro de rangos operativos seguros.

Cuando el caudal en un acueducto aumenta, la velocidad del fluido debe aumentar (asumiendo un diámetro constante del conducto). Este aumento en la velocidad lleva a un incremento en el término $\frac{\rho v^2}{2}$, lo que resulta en una mayor pérdida de presión debido a la fricción. La relación entre la velocidad y la pérdida de presión es cuadrática. La pérdida de presión es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad del fluido. Esto significa que incluso pequeños incrementos en la velocidad (y por lo tanto en el caudal, dado un diámetro de tubería constante) pueden resultar en un aumento significativo en la pérdida de presión.

Además, esta relación es crucial para el manejo operativo de un sistema de acueductos. Los cambios en la demanda de agua (y por tanto en el caudal) deben ser monitoreados y gestionados para mantener la presión dentro de los límites operati-

vos seguros y eficientes. Esto puede incluir la instalación de válvulas reguladoras de presión y sistemas de control automatizados que ajusten el caudal para optimizar la presión a lo largo del sistema.

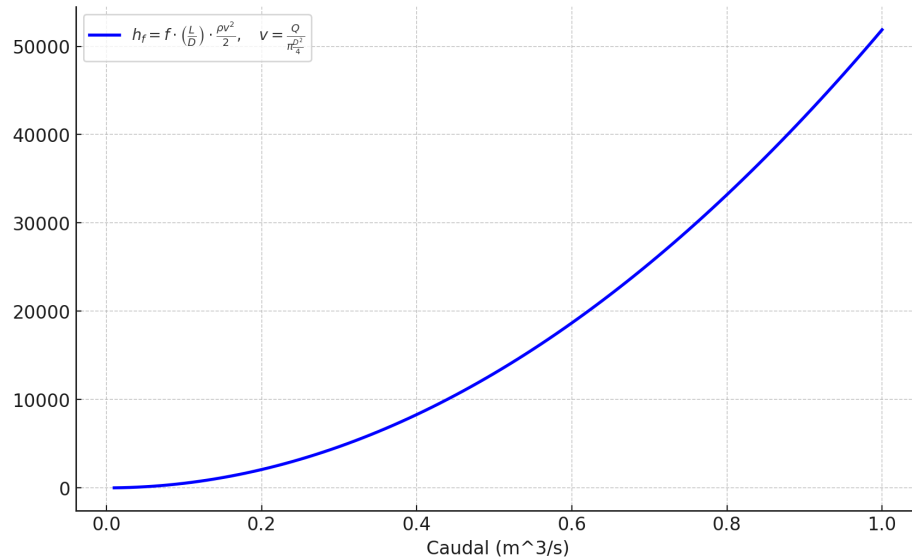


Figura 4.1: Relación entre caudal y pérdida de presión

El gráfico (4.1) representa la relación entre el caudal de agua en un acueducto y la pérdida de presión, denotada como h_f debido a la fricción en el conducto. El eje x muestra el caudal en metros cúbicos por segundo (m^3/s). Representa la cantidad de agua que fluye a través del acueducto, con un rango que varía desde $0.01 \text{ m}^3/\text{s}$ hasta $1 \text{ m}^3/\text{s}$. En tanto que el eje y indica la presión debido a la fricción, medida en Pascales (Pa). Esta pérdida es una medida de la energía que se pierde por la fricción del agua con las paredes del conducto.

La curva azul muestra que, a medida que aumenta el caudal, la presión también aumenta. Esta relación no es lineal y se vuelve más pronunciada con el incremento del caudal.

4.3. Longitud y diámetro de la tubería en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach

En el diseño de acueductos, se definen criterios iniciales específicos que deben ser satisfechos, incluyendo la selección del material de las tuberías, los puntos de inicio y destino del flujo del fluido, la variación de alturas, la naturaleza del fluido y su volumen por unidad de tiempo. Determinar el diámetro adecuado de una tubería que cumpla con estas condiciones iniciales puede ser un proceso complejo y tedioso debido a las numerosas iteraciones y la complejidad de las fórmulas involucradas. Para simplificar este proceso, se ha sintetizado un conjunto de fórmulas relacionadas en una ecuación integral. Esta ecuación única facilita la evaluación de todos los parámetros necesarios en un único proceso iterativo.

En el campo de la hidráulica, la fórmula de Colebrook-White (Azizi et al., 2019), destaca por su capacidad para predecir el comportamiento del flujo en tuberías bajo diversas condiciones. La expresión consolidada es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.71 \times D} + \frac{2.51}{Re \times \sqrt{f}} \right) \quad (4.15)$$

Aquí, ε representa la rugosidad absoluta de la tubería en metros, D el diámetro de la tubería, también en metros, Re el número de Reynolds, que es adimensional, y f el coeficiente de fricción, igualmente adimensional.

Por otro lado, el número de Reynolds, un indicador esencial en la dinámica de fluidos, se correlaciona con la velocidad y el comportamiento del flujo. Se calcula como sigue:

$$Re = \frac{4 \times Q}{\pi \times D \times \nu} \quad (4.16)$$

donde Q es el caudal en metros cúbicos por segundo, y ν es la viscosidad cinemática del fluido en metros cuadrados por segundo. Tras calcular el número de Reynolds, es fundamental clasificar el flujo del fluido. Se establece que un flujo se considera

turbulento si el número de Reynolds supera los 2000, mientras que se define como laminar si es menor que este valor.

Para calcular la pérdida por fricción utilizando un coeficiente que depende exclusivamente del material de la tubería, se utiliza la ecuación de Hazen-Williams (Mott, 2006) en la que se prescinde de la velocidad y el diámetro del conducto como variables. La ecuación se define como:

$$h = 10.674 \times \frac{Q^{1.852}}{C^{1.852} \times D^{4.871}} \times L \quad (4.17)$$

donde Q es el caudal en metros cúbicos por segundo, C el coeficiente de rugosidad sin dimensiones, D el diámetro interno de la tubería en metros, y L la longitud de la tubería también en metros.

La velocidad v del fluido en la tubería se relaciona con el caudal Q a través de la ecuación de continuidad, donde $v = \frac{Q}{A}$ y el área A es $\frac{\pi D^2}{4}$, entonces $v = \frac{4Q}{\pi D^2}$. Sustituyendo esto en la ecuación de Darcy-Weisbach dada en (4.14), se obtiene

$$f = \frac{h\pi^2 D^5 g}{LQ^2 8} \quad (4.18)$$

Integrando la variable del número de Reynolds en la ecuación (4.15), para obtener una relación que involucre el régimen de flujo:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.71D} + \frac{2.51\pi D \nu \sqrt{f}}{4Q} \right) \quad (4.19)$$

Este paso combina la resistencia debida a la fricción con las características del flujo, adaptando la ecuación a los distintos regímenes, ya sean laminar o turbulento, y tomando en cuenta las propiedades físicas de la tubería.

Se procede a reemplazar la expresión para el coeficiente de fricción (4.18) en la ecuación (4.15). Así se obtiene una relación que integra la pérdida de carga, la

rugosidad, el caudal y las dimensiones de la tubería:

$$\frac{\pi \sqrt{\frac{D^5 gh}{LQ^2}}}{2\sqrt{2}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.71D} + \frac{2.51\pi D \nu \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\frac{D^5 gh}{LQ^2}}} \right)}{4Q} \right) \quad (4.20)$$

Igualandola a cero, se obtiene

$$0 = \frac{\pi \sqrt{\frac{D^5 gh}{LQ^2}}}{2\sqrt{2}} + 2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.71D} + \frac{2.51\pi D \nu \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\frac{D^5 gh}{LQ^2}}} \right)}{4Q} \right) \quad (4.21)$$

A continuación, se asignan valores arbitrarios para analizar el comportamiento del diámetro, con los valores:

- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ (aceleración debida a la gravedad)
- $Q = 0.03 \text{ m}^3/\text{s}$ (caudal)
- $\nu = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ (viscosidad cinemática)
- $h = 0.5 \text{ m}$ (altura o alguna otra dimensión relacionada)
- $L = 100 \text{ m}$ (longitud o alguna otra dimensión relacionada)
- $\varepsilon = 1$ (puede ser una constante adimensional o tener unidades dependiendo del contexto)

entonces, se tiene

$$0 = \frac{\pi \sqrt{\frac{D^5 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m}}{100 \text{ m} \cdot (0.03 \text{ m}^3/\text{s})^2}}}{2\sqrt{2}} + 2 \log \left(\frac{1}{3.71D} + \frac{2.51\pi D \cdot 0.01 \text{ m}^2/\text{s} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi \sqrt{\frac{D^5 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 0.5 \text{ m}}{100 \text{ m} \cdot (0.03 \text{ m}^3/\text{s})^2}}} \right)}{4 \cdot 0.03 \text{ m}^3/\text{s}} \right) \quad (4.22)$$

La expresión simplificada de la ecuación (4.22) es:

$$1.8456\sqrt{2\pi}\sqrt{D^5} + 2\log\left(\frac{0.05667\sqrt{2}D}{\sqrt{D^5}} + \frac{0.2695}{D}\right) = 0 \quad (4.23)$$

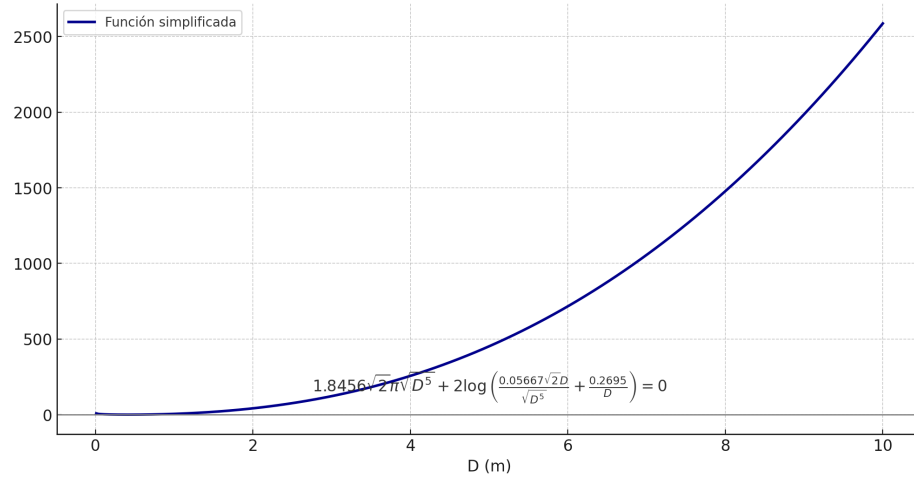


Figure 4.2: Gráfica de la función en relación al diámetro

Tal como se muestra en la gráfica (4.2), la función parece tener un comportamiento asintótico a medida que D se acerca a cero. Esto es probablemente debido al término logarítmico en la función, que tiende a ser dominante cuando D es muy pequeño. En este caso, como el logaritmo de un número que se aproxima a cero tiende a menos infinito, la función decrece significativamente cuando D se acerca a cero.

El término que involucra la raíz cuadrada, tiende a aumentar con D . Este término contribuye a que la función aumente a medida que D se hace más grande, aunque de manera no lineal debido a la raíz y a la quinta potencia de D .

A medida que D aumenta, la función parece estabilizarse. Esto indica que los efectos del término logarítmico se vuelven menos significativos en comparación con el término de la raíz cuadrada para valores mayores de D .

Lo anterior indica que un diámetro mayor generalmente conduce a una menor pérdida de carga debido a la fricción, ya que un área de sección transversal mayor reduce la velocidad del flujo para un caudal dado. Además, se infiere que la longitud

de la tubería es directamente proporcional a la pérdida de carga. Cuanto más larga sea la tubería, mayor será la fricción y, por lo tanto, mayor será la pérdida de presión.

4.4. Impacto de la fricción en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach

La pérdida de carga por fricción resulta en una disminución de la presión del agua a lo largo de la tubería. Esto significa que la presión al final de un tramo de tubería será menor que al principio, debido a la resistencia que el agua encuentra al fluir.

El valor del coeficiente de fricción, denotado por f , es influenciado por diversos factores incluyendo la configuración geométrica de la tubería, el número de Reynolds, y la rugosidad característica de la misma. En condiciones de flujo laminar, la correlación entre el factor de fricción y el número de Reynolds se establece mediante la fórmula:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (4.24)$$

donde Re , el número de Reynolds, se determina con la expresión:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} \quad (4.25)$$

En esta relación, ρ representa la densidad del fluido, v indica la velocidad promedio del fluido, D corresponde al diámetro interno de la tubería, y μ refiere a la viscosidad dinámica del fluido.

El gráfico (4.3) muestra una relación lineal entre el coeficiente de fricción y la pérdida de presión en un acueducto. A medida que el coeficiente de fricción aumenta, la pérdida de presión también aumenta proporcionalmente. Esta relación directa sugiere que para acueductos con tuberías de alta rugosidad interior, se requiere más energía para mantener un flujo de agua constante, lo que puede aumentar los costos operativos.

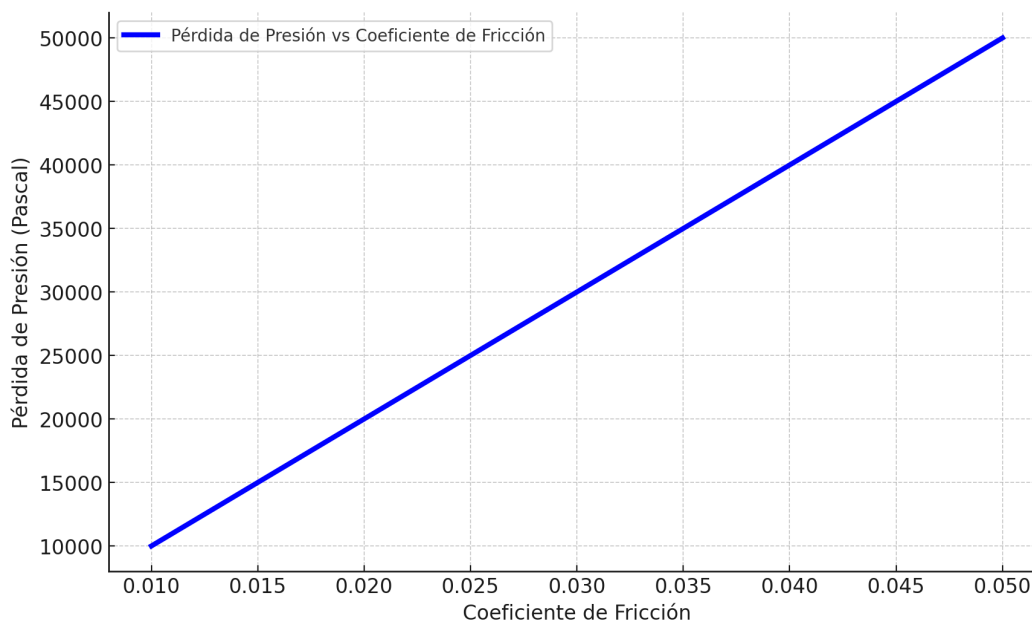


Figure 4.3: Gráfica de la pérdida de presión con respecto al coeficiente de fricción

En el diseño y la selección de materiales para los sistemas de acueductos, es importante considerar materiales con superficies más lisas para reducir la resistencia al flujo de agua. Esto puede mejorar la eficiencia del sistema y disminuir los costos.

El coeficiente de fricción en una tubería depende de su rugosidad y del régimen de flujo del agua. Una tubería más rugosa o un flujo turbulento resultará en un coeficiente de fricción más alto. Según el modelo de Darcy-Weisbach, un aumento en el coeficiente de fricción conduce a una mayor pérdida de presión en la tubería.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de los resultados presentados sobre la ecuación de Darcy-Weisbach en el funcionamiento de los acueductos en correspondencia con los objetivos planteados. En tal sentido, también se presentan las conclusiones y posibles líneas futuras sobre esta temática investigativa.

5.2. Análisis de los resultados.

En lo que corresponde al objetivo 1, de determinar la influencia que tiene el caudal en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach, se demuestra que, en un conducto de diámetro constante, cualquier incremento en el caudal lleva a un aumento proporcional en la velocidad del fluido. Según este modelo, un aumento en la velocidad del fluido implica un incremento en la pérdida de presión debido a la fricción. Específicamente, la pérdida de presión es proporcional al cuadrado de la velocidad, indicando una relación no lineal entre el caudal y la pérdida de presión. Este fenómeno es crucial en el diseño y operación de acueductos, ya que cambios significativos en el caudal pueden resultar en variaciones importantes en la presión del sistema.

Con relación al objetivo 2, de identificar como afecta la longitud y el diámetro de la tubería en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach, se estableció que el diámetro de la tubería es un factor crucial en la determinación de la presión del agua en los acueductos. Un diámetro mayor generalmente conduce a una menor pérdida de carga por fricción. Esto se debe a que un área de sección transversal más amplia permite que el agua fluya con menor velocidad, reduciendo la resistencia y, por ende, la pérdida de energía por fricción.

La longitud de la tubería también tiene un impacto directo en la presión del agua.

Según el modelo de Darcy-Weisbach, la pérdida de carga es proporcional a la longitud de la tubería. Esto significa que a mayor longitud, mayor será la fricción interna y, por lo tanto, mayor la pérdida de presión. En el diseño de sistemas de acueductos, la longitud de las tuberías debe ser considerada cuidadosamente, ya que aumentar la longitud del conducto puede ser necesario para alcanzar áreas más remotas, pero esto también implica un incremento en la pérdida de carga. Por lo tanto, es vital encontrar un balance entre la longitud necesaria y la eficiencia del sistema, considerando que una longitud excesiva podría requerir bombas adicionales o sistemas de presión para compensar la pérdida de carga.

Con respecto al objetivo 3, de evaluar el impacto de la fricción en la presión del agua de los acueductos según el modelo de Darcy-Weisbach, se establece que la pérdida de carga por fricción es un factor fundamental que afecta la presión del agua en los acueductos. La fricción dentro de la tubería causa una disminución gradual de la presión a medida que el agua avanza, lo que resulta en una presión más baja al final del tramo en comparación con el inicio. Esta pérdida de carga es influenciada directamente por el coeficiente de fricción, que a su vez depende de factores como la geometría de la tubería, la rugosidad de su superficie interna, y las características del flujo, particularmente el número de Reynolds.

5.3. Conclusiones

En correspondencia con los objetivos planteados en esta investigación, a continuación se plantean las conclusiones más relevantes según los resultados presentados:

1. En el contexto del modelo de Darcy-Weisbach, se concluye que el caudal tiene una influencia significativa en la presión del agua en los acueductos. El incremento en el caudal conduce a un aumento proporcional en la velocidad del fluido, lo que a su vez provoca un aumento en la pérdida de presión debido a la fricción.
2. El diámetro y la longitud de la tubería son factores críticos en la determinación

de la presión del agua en los acueductos, según el modelo de Darcy-Weisbach. Un mayor diámetro disminuye la pérdida de carga por fricción, facilitando un flujo más eficiente. Por otro lado, una mayor longitud incrementa la fricción interna y, por lo tanto, la pérdida de presión. Este análisis enfatiza la necesidad de un diseño cuidadoso que equilibre la longitud requerida para alcanzar áreas específicas y el diámetro adecuado para minimizar la pérdida de carga, garantizando así la eficiencia del sistema.

3. La pérdida de carga por fricción está muy relacionada con la presión del agua dentro de los acueductos. El coeficiente de fricción causa una disminución gradual de la presión a lo largo de la tubería, el cual depende de factores como la rugosidad interna y el régimen de flujo del agua.

Conforme al objetivo general planteado, de analizar el modelo de Darcy-Weisbach aplicado a los acueductos, concluye que el caudal, el diámetro y la longitud de la tubería, junto con el coeficiente de fricción, son factores determinantes en la presión del agua. Un incremento en el caudal aumenta la velocidad del fluido y, por tanto, la pérdida de presión debido a la fricción, mientras que un mayor diámetro reduce esta pérdida, mejorando la eficiencia del flujo. Por otro lado, una longitud mayor de la tubería incrementa la pérdida de presión debido a la fricción interna.

5.4. Líneas futuras de investigación

Tomando como referencia los hallazgos de este trabajo en el análisis de la ecuación de Darcy-Weisbach en el funcionamiento de los acueductos, se proponen las siguientes líneas de investigación:

1. Comparación del modelo de Darcy-Weisbach con otros modelos hidráulicos en acueductos.
2. Extensión del modelo de Darcy-Weisbach a flujos no uniformes.
3. Evaluación del impacto ambiental de acueductos diseñados según el modelo de Darcy-Weisbach.

4. Análisis del efecto de la sedimentación en el rendimiento de acueductos modelados por Darcy-Weisbach.
5. Desarrollo de técnicas de monitoreo en tiempo real para sistemas de acueductos basados en Darcy-Weisbach.

Bibliografía

- Achour, B. y Amara, L. (2020). Nueva formulación del factor de fricción de Darcy-Weisbach. *Revista LARHYSS*, P-ISSN 1112-3680/E-ISSN 2521-9782, (43), 13-22.
- Álvarez, A. (2020). Clasificación de las investigaciones. Universidad de Lima, Facultad de Ciencias Empresariales y Económicas, Carrera de Negocios Internacionales.
- Azizi, N., Homayoon, R., Hojjati, M. R. (2019). Predecir el factor de fricción de Colebrook-White en el flujo de la tubería mediante nuevas correlaciones explícitas. *Revista de Ingeniería de Fluidos*, 141(5), 051201.
- Babativa, C. A. (2017). Investigación cuantitativa. Fundación Universitaria del Área Andina: Apreandina. Bogotá, Colombia.
- Dirac, P. (2017). Modelos matemáticos. Fundación Polar.
- Espinoza, E. (2020). La investigación cualitativa, una herramienta ética en el ámbito pedagógico. *Conrado*, 16(75), 103-110.
- Garro, A. N., Rodríguez, F. A., Murillo, D. P., Segura, C. M., Ugalde, M. E. (2013). Vulnerabilidad de los sistemas de acueductos rurales: cómo identificarla. *Tecnología en marcha*, 26(3), 62-73.
- González, O. Pulido, J. S. (2019). Lineamientos socioambientales para la optimización del acueducto de las veredas. “La Reforma y Esmeralda” en el municipio de Supatá-Cundinamarca (Bachelor’s thesis, Universidad El Bosque).
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2018). Metodología de la investigación (Vol. 4, pp. 310-386). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Hernández, J. (2017). Formulación matemática del diseño de redes de abastecimiento. *Revista Científica ECOCIENCIA*, 4(3), 113-134.
- Hernández, N., Soto, F., Caballero, A. (2009). Modelos de simulación de cultivos: Características y usos. *Cultivos tropicales*, 30(1), 00-00.
- Landeta, J. M. I. (2019). Modelos matemáticos para la toma de decisiones. IMCP.

- León, I. A. B. (2004). Apartes de la Historia de los Acueductos. *Agua Latinoamericana*, 4(3), 21-22.
- López, R. A. (2003). Elementos de diseño para acueductos y alcantarillados. Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.
- Marrón, V. (2002). La historia de la ecuación de Darcy-Weisbach para la resistencia al flujo en tuberías. En *Historia ambiental y de los recursos hídricos*.
- Minhoni, R., Pereira, F., Da Silva, T., Castro, E. y Saad, J. (2020). La realización de fórmulas explícitas para determinar el factor de fricción de Darcy-Weisbach. *Ingeniería Agrícola*, 40, 258-265.
- Mott, R.L. y Untener, J.A. (2015). *Mecánica de fluidos aplicada*. Educación superior Pearson.
- Ramírez-Martínez, C. J. (2016). Alfabetización SENA guía técnica acueducto y alcantarillado. Universidad Católica de Colombia.
- Ramirez, J. (2016). Formulación matemática del diseño de redes de abastecimiento. *Revista Científica ECOCIENCIA*, 4(3), 113-134.
- Ramos-Galarza, CA (2020). Los alcances de una investigación. *CienciaAmérica*, 9(3), 1-6.
- Romero, F. (2005). *Acueductos: teoría y diseño*. Universidad de Medellín.
- Sabino, C. (2014). *El proceso de investigación*. Editorial Episteme.
- Saldarriaga, Juan. (2007). *Hidráulica de tuberías: abastecimiento de agua, redes, riego*. Alfaomega.
- Sánchez, E., Martínez, A. J. (2016). *Los acueductos en Hispania: construcción y abandono*. Fundación Juanelo Turriano.
- Shin, C. y Park, W. (2017). Ampliación de la relación Darcy-Weisbach para análisis de flujo poroso. *Transacciones de la Sociedad Coreana de Ingenieros Mecánicos B*, 41(4), 229-238.
- Sosua, J. (2012). *Adaptaciones de modelos matemáticos para dimensionamiento hidráulico en sistemas de riego presurizado*. LIMA, Vera Lúcia Antunes.
- Sousa, J. y Neto, J. (2014). Ecuación explícita para el cálculo del factor de fricción Darcy-Weisbach en proyectos de riego presurizado1. *Irriga*, 19(1), 137-148.

Valiantzas, J.D. (2008). Fórmula de potencia explícita para la ecuación de flujo en tuberías de Darcy-Weisbach: aplicación en el diseño óptimo de tuberías. Revista de ingeniería de riego y drenaje, 134(4), 454-461.

ANEXOS.

Anexo A. Cronograma seguido en esta investigación.

En este apartado se describen las diferentes etapas del proceso de elaboración de esta investigación y sus respectivas fechas de ejecución.

Descripción	Fechas de ejecución
Solicitud de título	Abril, 2023
Aprobación del título	Mayo, 2023
Elaboración y entrega del anteproyecto.	Noviembre, 2023
Elaboración de capítulo IV y V	Diciembre, 2023
Entrega de proyecto completo a la Facultad	Enero, 2024
Graduación	Febrero, 2024

Cuadro 5.1: Cronograma

Anexo B. Detalle de Gastos.

Este apartado contempla un resumen de los recursos económicos invertidos en el proceso de realización de esta tesis.

Descripción	Monto
Transporte y viáticos	2,000.00
Impresión	4,500.00
Encuadernado y empastado	1,600.00
Fotocopias	2,700.00
Materiales e insumos	5,000.00
Imprevistos	4,000.00
Total	19,800.00

Cuadro 5.2: Detalle de gastos