

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado
Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemáticas

Título

Construcción de un nuevo método iterativo mediante composición de funciones de iteración, en base a los métodos de Chebyshev y Halley, para resolver ecuaciones de orden superior.

Sustentante

José Luis Pérez Rondón

Asesor

Dr. Manuel Aurelio Diloné.

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico 2023.

TÍTULO

Construcción de un nuevo método iterativo mediante composición de funciones de iteración, en base a los métodos de Chebyshev y Halley, para resolver ecuaciones de orden superior.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Construcción de un nuevo método iterativo mediante composición de funciones de iteración, en base a los métodos de Chebyshev y Halley, para resolver ecuaciones de orden superior.

Proyecto de Postgrado presentado por **José Luis Pérez Rondón** para optar por el título de Magister en Matemáticas

Composición del tribunal

MA. Wilson Lucilo Heredia

Jurado de metodología

MA. Nelson Sánchez

Jurado de Redacción

Dr. Víctor José Galán Céspedes

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos.	VI
RESUMEN.	VII
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	1
1.2.2 Antecedentes académicos	3
1.3 Planteamiento del problema	6
1.4 Justificación	8
1.5 Objetivos	9
1.5.1 General	9
1.5.2 Específicos	9
1.6 Alcance y límites	9
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL	10
2.1 Introducción	10
2.2 Marco teórico	10
2.2.1 Ecuaciones de orden superior	10
2.2.2 Método iterativo	11
2.2.3 Método de Halley	15
2.2.4 Método de Chebyshev	19
CAPÍTULO III. DISEÑO METODOLÓGICO	27
3.1 Introducción	27
3.2 Marco metodológico	27
3.2.1 Diseño	27
3.2.2 Método.	27
3.2.3 Tipo.	27
3.2.4 Enfoque.	28

3.3	Procedimientos.	28
CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS		29
4.1	Introducción	29
4.2	Método iterativo mediante la composición del método de Chebyshev con el método de Halley	29
4.3	Método iterativo mediante la composición del método de Halley con el método de Chebyshev	30
4.4	Orden de convergencia local de los nuevos métodos iterativos	30
4.5	Prueba de los métodos iterativos mediante funciones test	34
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS		36
5.1	Introducción	36
5.2	Conclusiones	36
5.3	Líneas futuras de investigación	37
Referencias		38
ANEXOS.....		41

Agradecimientos.

Primero al Dios viviente, el verdadero Dios de Abraham, de Isaac, de Jacob, el Dios de Israel, mi Dios dador de todo. A mi madre que siempre me apoya, mis compañeros de clases, Venecia, Escarlin Bonifacio, a mis amigos del primer grupo de maestría José Miguel Gómez, Leomar Reyes y todos mis maestros, en especial a mi asesor Manuel Aurelio Diloné y a Don Efraín. El Dios viviente derrame su bendición sobre cada uno de ellos. Mil y un millón de gracias

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante

José Luis Pérez Rondón

Asesor

Dr. Manuel Aurelio Diloné

RESUMEN

Esta investigación presenta una construcción de dos métodos iterativos mediante la composición de funciones de Halley y Chebyshev, que de acuerdo a sus objetivos, se han de aplicar a la solución de ecuaciones de orden superior.

Esta tesis adoptó un diseño no experimental y transversal, basado en un método analítico-deductivo a los fines de construir y evaluar los métodos iterativos propuestos.

Conforme a los objetivos establecidos, las conclusiones y/o resultados principales de esta investigación son la construcción de dos nuevos métodos iterativos a partir de la composición de funciones de los métodos de Halley y Chebyshev, con noveno orden de convergencia, logrando aproximaciones rápidas y efectivas hacia las raíces de las funciones evaluadas, además de establecer las ecuaciones de error de dichos métodos.

Palabras claves: Convergencia, métodos iterativos, composición de funciones, ecuaciones orden superior.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

Este capítulo detalla los fundamentos esenciales e introductorios de esta investigación, abordando los antecedentes y planteamiento del problema, los objetivos propuestos, la justificación detrás del estudio y la delimitación que define sus parámetros y alcance.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes históricos

1.2.1.1. Acerca del Método de Chebyshev

Pafnuti Libovich Chebyshev (1821-1894) procedía de una familia aristocrática que se instaló en Moscú con el fin de facilitar los estudios de sus hijos. Tras graduarse en la Universidad a los 20 años, puso ya de manifiesto sus intereses dentro de las matemáticas con su tesis Exposición básica de la teoría de la probabilidad presentada en 1846. (DivulgaMat, 2017)

Un año después viaja a San Petersburgo, en cuya Universidad permanece como profesor durante más de treinta años; es elegido miembro de la Academia de Ciencias y crea y dirige un influyente colectivo de científicos que es conocido como la Escuela Matemática de San Petersburgo y que, posteriormente, se extendió también a Moscú y otras ciudades. A su vez, sus estudios son reconocidos en el extranjero y se le nombra miembro asociado del Instituto de Francia, de la Royal Society y de las Academias de Berlín y Bolonia. Lo que caracteriza la obra de Chebyshev es el rigor en la exposición y sobre todo su estrecha relación con la práctica. (DivulgaMat, 2017)

Según García y Gutiérrez (2013), el método de Chebyshev es el proceso iterativo para resolver una ecuación no lineal

$$f(x) = 0, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \tag{1.1}$$

definido de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)^2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.2)$$

Desde una perspectiva histórica, el método de Chebyshev (1.2) aparece dentro de una familia de procesos iterativos de la forma $x_{n+1} = E_m(x_n)$ donde

$$E_m(x) = x + \sum_{\nu=1}^{m-1} (-1)^\nu \frac{f(x)^\nu}{\nu!} (f^{-1})^{(\nu)}(f(x)) \quad (1.3)$$

y f^{-1} es la inversa de f .

Chebyshev escribió su método iterativo cuando era estudiante en el 1837 o 1838. Por ese trabajo, titulado Cálculo de las raíces de ecuaciones, Chebyshev fue premiado con una medalla de plata por el segundo departamento filosófico de la Universidad de Moscú, donde se encontraba estudiando.

García y Gutiérrez (2013), en su trabajo sobre la notas históricas del método de Chebyshev establece que la expresión del método de Chebyshev resulta ser un caso particular de la familia (1.3). Euler no se detuvo a entrar en detalles tan puntuales como las regiones de convergencia, el orden de convergencia, ni menciona la existencia de métodos de orden superior en la familia de métodos que describe, no obstante estos hechos sí quedan bastante claros en el trabajo de Chebyshev.

1.2.1.2. Acerca del Método iterativo de Halley

Edmond Halley, conocido por sus contribuciones significativas a la ciencia, nació el 8 de noviembre de 1656 en Haggerston, cerca de Londres, y falleció el 14 de enero de 1742 en Greenwich, Inglaterra. Halley demostró un marcado interés por la ciencia desde una edad temprana, y se distinguió durante sus estudios de Astronomía en la Universidad de Oxford, sobresaliendo por sus habilidades matemáticas y su dominio del latín y del griego (Fernandez, 2001).

Impresionado por el trabajo del matemático francés Thomas Fautet de Lagny, que en 1691 proporcionó fórmulas (tanto racionales como irracionales) para aproximar la

raíz cúbica de un número, Halley, en 1708, escribió una nota en la revista *Miscellanea de Londres* diciendo: “Habiendo comprobado la eficacia de estas fórmulas (las de Lagny), intentaré encontrar la demostración”. Consecuentemente, proporcionó la demostración para la fórmula racional para aproximar la raíz cúbica de un número natural expresado en la forma $a^3 + b$, con $a, b \in \mathbb{Z}$.

Halley parece haber intentado ampliar sus métodos para obtener aproximaciones a ecuaciones definidas por funciones trascendentes. En un trabajo suyo de 1694, aparecen implícitamente aproximaciones del tipo

$$L_f(x_n) = \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)^2} \quad (1.4)$$

Además de aproximaciones dadas por fórmulas irracionales. Sin embargo, tuvo que pasar un siglo y medio hasta que, en un trabajo de Schröder (1870), se encontró la iteración de Halley tal y como se conoce hoy en día (Scavo, 1995).

1.2.2. Antecedentes académicos

Sosaya (2015) publicó su tesis de maestría titulada “Aspectos geométricos de la irresolubilidad de una ecuación algebraica de grado cinco” en la que realizan una demostración geométrica en comparación a la de la teoría de Galois, mostrando el estudio de las deformaciones que sufren las raíces de un polinomio como consecuencia de una deformación del polinomio.

Chum(2006) obtuvo el siguiente método iterativo que es una variante del método de Newton. Este es de convergencia de tercer orden, el cual no requiere del cálculo de derivadas de segundo orden.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + h \frac{2f(x_{n+1}^*)}{f'(x_n) + f'(x_{n+1}^*)}$$

$$\text{Aquí } x_{n+1}^* = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Obteniendo el siguiente método de tercer orden:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\frac{f(x_n + f(x_n))}{f'(x_n)}}{f'(x_n)}$$

Frontini y Sormani (2003), construyeron el siguiente método iterativo tipo Newton modificado.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)})}$$

Por su parte, Dehghan y Hajarian (2010), compararon numéricamente los métodos de Newton y Chebyshev en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales y se encontró que ambos métodos son efectivos y precisos en diferentes rangos de valores. En general, el método de Chebyshev se desempeña mejor para problemas altamente no lineales o cuando se necesita una precisión muy alta, mientras que el método de Newton es más eficiente para problemas menos no lineales.

Muñoz (2011) en su publicación sobre “Abel y la imposibilidad de resolver la quintica por radicales”, ofrece en su última sección, una traducción comentada de la memoria que Niels Henrik Abel, de su imposibilidad para demostrar la no resolubilidad de la ecuación de quinto grado mediante radicales.

En la comparación realizada por Mittal y Jain (2010), se encontró que ambos métodos son efectivos y precisos para diferentes tipos de problemas. Sin embargo, el método de Chebyshev es más estable y menos propenso a la divergencia que el método de Newton.

Iqbal, Jabeen y Khalid (2014), realizaron una comparación entre los métodos de Newton y Chebyshev en la resolución de ecuaciones no lineales y se encontró que ambos métodos son efectivos y precisos para diferentes tipos de problemas. Sin embargo, el método de Chebyshev es más estable y menos propenso a la divergencia que el método de Newton.

Además, Diloné, Geronimo y Veras (2016) obtuvieron nuevos métodos iterativo mediante composición de funciones mediante los métodos de Newton y Halley para resolver ecuaciones no lineales de orden seis:

$$DSI = x_n - \frac{f(h(x_n))}{f'(h(x_n))} + \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{f(x_n)f''(x_n) - 2f'(x_n)^2} \quad (1.5)$$

$$DSII = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{2f(n(x_n))f'(n(x_n))}{f(n(x_n))f''(n(x_n)) - 2f'((n(x_n)))^2} \quad (1.6)$$

Por otro lado, Lin y Su (2018), propusieron un método basado en los polinomios de Chebyshev para la resolución de ecuaciones no lineales y se encontró que el método es efectivo y eficiente. Además, se demostró que el método de Chebyshev puede ser más efectivo que otros métodos existentes para problemas altamente no lineales o cuando se necesita una alta precisión.

En el artículo publicado por Wang, Zeng y Gao (2018), los autores propusieron una combinación de los métodos Chebyshev y Newton para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Demostraron que el método Chebyshev-Newton es más eficiente que otros métodos numéricos existentes para resolver sistemas de ecuaciones no lineales y proporcionaron ejemplos numéricos para ilustrar la eficacia del método propuesto.

Por su parte, Rodríguez y Franco (2019), en su artículo de “Paolo Ruffini y la Solubilidad de la Ecuación de Quinto Grado”, se presenta la evolución del problema de la solubilidad de la ecuación de quinto grado; haciendo notar que Paolo Ruffini fue el primer matemático en establecer que la ecuación general de quinto grado.

Gómez (2019) en su tesis titulada Construcción de un nuevo método iterativo mediante composición de funciones para resolver ecuaciones de orden superior, obtiene los siguientes métodos:

$$ALI = x - \frac{f(x_n)^2 \cdot f''(x_n)}{2f'(x_n)^3 - 2f(x_n) \cdot f'(x_n) \cdot f''(x_n)}$$

$$ALII = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(n)}{f'(n)} - \frac{f(n)^2 \cdot f''(n)}{2[f'(n)^3 - f(n) \cdot f'(n) \cdot f''(n)]}$$

1.3. Planteamiento del problema

La resolución de ecuaciones polinómicas de orden superior ha sido un problema de gran interés en la matemática desde la antigüedad. En el siglo XVI, el matemático italiano Gerolamo Cardano desarrolló una fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, luego el matemático francés François Viète descubrió una fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado y en el siglo XVIII, Carl Friedrich Gauss demostró que todas las ecuaciones de cuarto grado podían resolverse mediante radicales.

En la actualidad, se sabe que las ecuaciones polinómicas de orden superior tienen soluciones algebraicas exactas para los casos $n \leq 4$. Sin embargo, para $n > 4$ no existe una fórmula general que permita encontrar soluciones exactas. A pesar de esta limitación, las ecuaciones polinómicas de orden superior siguen siendo de gran importancia en la matemática y en otras ciencias. Por ejemplo, se utilizan en la física para describir el movimiento de cuerpos en el espacio, en la economía para modelar la oferta y la demanda, en la ingeniería para diseñar estructuras y en la informática para el análisis de algoritmos y la criptografía.

En la resolución de estas ecuaciones de orden superior, existen diversos métodos numéricos iterativos que se utilizan para encontrar soluciones aproximadas. Sin embargo, algunos de estos métodos presentan limitaciones en términos de convergencia y eficiencia, lo que puede resultar en una disminución de la precisión y aumento del tiempo computacional necesario para obtener una solución aceptable.

El método de Halley es un método numérico iterativo utilizado para la solución de ecuaciones no lineales. Este método ha sido ampliamente estudiado y aplicado en diversos campos de la ciencia y la ingeniería debido a su rapidez de convergencia y

precisión. Básicamente se fundamenta en una función iterativa que utiliza tanto la función original como sus derivadas para aproximar la solución. Por lo tanto, el método de Halley es especialmente útil para la solución de ecuaciones de orden superior, ya que es capaz de utilizar información adicional sobre la función y sus derivadas para mejorar su precisión y velocidad de convergencia.

Además, otro de estos métodos utilizados para resolver ecuaciones no lineales es el método de Chebyshev, el cual se basa en la aproximación de la solución a través de una serie de Chebyshev. Este método ha demostrado ser efectivo para resolver una amplia gama de problemas matemáticos, incluyendo la solución de ecuaciones de orden superior. Sin embargo, su aplicación directa a problemas no lineales puede presentar problemas de convergencia y eficiencia. Por lo tanto, se requiere una mejora en el método de Chebyshev para su aplicación en la solución de ecuaciones de orden superior. En este sentido, la combinación del método de Chebyshev con otros métodos numéricos iterativos, como el método de Halley, puede ser una estrategia efectiva para mejorar su eficacia y precisión. Es por ello que en esta tesis se propone la pregunta de investigación de ¿Cómo construir un nuevo método iterativo mediante la composición de funciones de iteración basado en los métodos de Chebyshev y Halley para la solución de ecuaciones de orden superior?

A partir de lo expuesto anteriormente, se plantean a su vez, las siguientes interrogantes:

1. ¿Cómo construir un método iterativo de alto orden de convergencia mediante la composición del método de Chebyshev con el de Halley?
2. ¿Cómo construir un método iterativo de alto orden de convergencia mediante la composición del método de Halley con el de Chebyshev?
3. ¿Cuál es el orden de convergencia local de los nuevos métodos iterativos propuestos?
4. ¿Cuál es el nivel de eficiencia de estos nuevos métodos iterativos?

1.4. Justificación

Las ecuaciones polinómicas de orden superior son fundamentales en matemáticas y en otras ciencias debido a su amplia aplicabilidad en la resolución de modelos matemáticos que se presentan en diferentes áreas del conocimiento. Estas ecuaciones permiten describir una gran variedad de fenómenos y situaciones en diferentes disciplinas, como la física, la economía, la ingeniería y la estadística. Además, la resolución de estas ecuaciones ha sido el motor impulsor para el desarrollo de numerosas técnicas y herramientas matemáticas que se utilizan en diferentes campos.

La solución de ecuaciones de orden superior es un problema fundamental en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería, ya que muchas leyes físicas y fenómenos naturales se pueden modelar matemáticamente mediante este tipo de ecuaciones. Sin embargo, la solución analítica de estas ecuaciones es muy difícil de obtener, por lo que se requiere de métodos numéricos para aproximar la solución.

En este contexto, la presente tesis se justifica por la necesidad de desarrollar nuevos métodos numéricos iterativos para la solución de ecuaciones de orden superior que sean eficientes, precisos y de rápida convergencia. En particular, se propone la combinación del método de Halley y el método de Chebyshev a través de la composición de funciones de iteración para el desarrollo de un nuevo método iterativo que permita aprovechar las ventajas de ambos métodos y mejorar aún más la eficiencia y precisión en la solución de ecuaciones de orden superior.

Por lo tanto, el resultado de esta investigación será de gran importancia y utilidad en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería, ya que podrá ser utilizado como herramienta para la solución de problemas prácticos y para la investigación en nuevas áreas de aplicación de las ecuaciones de orden superior.

1.5. Objetivos

1.5.1. General

Construir un nuevo método iterativo mediante composición de funciones de iteración, con los métodos de Chebyshev y Halley para la solución de ecuaciones de orden superior.

1.5.2. Específicos

1. Construir un método iterativo de alto orden de convergencia mediante la composición del método de Chebyshev con el método de Halley.
2. Construir un método iterativo de alto orden de convergencia mediante la composición del método de Halley con el método de Chebyshev.
3. Probar el orden de convergencia local de los nuevos métodos iterativos.
4. Probar mediante funciones test, la eficiencia de los nuevos métodos iterativos.

1.6. Alcance y límites

Esta investigación estará enfocada en el campo de las matemáticas aplicadas, se trata de una investigación dentro del análisis numérico, particularmente en las funciones de iteración. Para esto, se consideró la convergencia local y la prueba mediante funciones test para analizar la eficiencia de estos métodos y se empleó únicamente los métodos iterativos de Chebyshev Y Halley además de la técnica de composición de funciones.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1. Introducción

En este capítulo se plantean las fundamentaciones conceptuales de los métodos de Halley y Chebyshev, por medio de definiciones, proposiciones, teoremas y demostraciones que sirven de soporte y referente para esta investigación.

2.2. Marco teórico

2.2.1. Ecuaciones de orden superior

Definición 2.1 Una ecuación algebraica de grado n es una expresión matemática de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde x es la variable incógnita y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes reales o complejas. El grado de la ecuación es n , que es el mayor exponente de x en la ecuación.

El objetivo de la teoría de ecuaciones algebraicas de grado n es estudiar las propiedades de estas ecuaciones, incluyendo la existencia y unicidad de soluciones, y desarrollar métodos para encontrar soluciones exactas o aproximadas. Esta teoría ha sido estudiada desde hace siglos y ha sido una fuente de importantes avances en matemáticas, como la teoría de grupos y la teoría de Galois. (Cox, Little y O'Shea, 2007).

Teorema 2.1 [Teorema fundamental del álgebra]. Toda ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas, contando multiplicidades. En términos matemáticos, el teorema puede formularse de la siguiente manera:

Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ una ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos $a_0, a_1, \dots, a_n$. Entonces, existe al menos una raíz compleja

z_1 de $P(z)$, es decir, $P(z_1) = 0$. Además, si contamos las raíces con multiplicidades, $P(z)$ tiene exactamente n raíces complejas distintas. (Grinberg, 2020).

Teorema 2.2 . [Teorema de la existencia de raíces reales]. Establece que toda función polinómica con coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una raíz real. En términos matemáticos, se puede enunciar como:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado impar con coeficientes reales $a_0, a_1, \dots, a_n$. Entonces, existe al menos un número real r tal que $P(r) = 0$. (Garrido, 2009).

2.2.2. Método iterativo

Un método iterativo es una técnica utilizada en matemáticas para encontrar una solución numérica aproximada de un problema. Se parte de un valor inicial y se utiliza una fórmula o algoritmo iterativo para producir una secuencia de valores cada vez más cercanos a la solución deseada (Kincaid y Cheney, 2012).

Matemáticamente hablando, si se quiere encontrar una solución x^* de una ecuación $f(x) = 0$, se comienza con una aproximación inicial x_0 y utilizar una fórmula iterativa de la forma:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

donde $g(x)$ es una función que produce una nueva aproximación x_{n+1} a partir de la aproximación anterior x_n . Se espera que la secuencia de valores x_n converja a la solución deseada x^* cuando n se hace lo suficientemente grande.

Existen diferentes tipos de métodos iterativos, algunos de los cuales se basan en la derivación analítica de la función $f(x)$, mientras que otros son métodos numéricos que solo utilizan los valores numéricos de $f(x)$.

La elección del método iterativo a utilizar depende de la naturaleza del problema, la disponibilidad de información analítica sobre la función $f(x)$, y la eficiencia

computacional. En general, los métodos iterativos pueden ser una herramienta poderosa para resolver problemas numéricos en matemáticas, ingeniería, física, ciencias de la computación, y otras áreas afines (Burden y Faires, 2011).

Definición 2.2 Sea $f : X \rightarrow X$ una función definida en un conjunto X . Un punto $x^* \in X$ es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$. Un punto fijo es un valor en el dominio de una función en el cual la función mapea el valor en sí mismo. Es decir, un punto fijo de una función f es un valor x tal que $f(x) = x$ (Bernardino, 2019).

Definición 2.3 De acuerdo con Bernardino (2019), la iteración de punto fijo es una técnica general de gran importancia en distintos ámbitos de las matemáticas (ecuaciones diferenciales, integrales, derivadas parciales, ...), que consiste en generar aproximaciones sucesivas x_n a la raíz buscada r con la esperanza de acercarse cada vez más a ella. Matemáticamente se desea que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

lo que garantiza que fijada una tolerancia, exista un valor finito n para el que los iterantes $x_n, x_{n+1}, \dots$ disten de r menos que la tolerancia.

Cada aproximación $x_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots$ se obtiene de la aproximación precedente x_n a partir de una función F real llamada función de iteración,

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Si la función de iteración F es continua debe cumplir $F(r) = r$, es decir, la raíz r de f tiene que ser un punto fijo de F .

Definición 2.4 Vassileva (2011), plantea que dado $x^* \in \mathbb{C}$ un punto fijo de una función racional $\mathcal{G}$. Se dice que x^* es

1. Superatractor si $\mathcal{G}'(x^*) = 0$.
2. Atractor si $|\mathcal{G}'(x^*)| < 1$.
3. Indiferente si $|\mathcal{G}'(x^*)| = 1$.

4. Repulsor si $|\mathcal{G}'(x^*)| > 1$.

Al valor $\tau = \mathcal{G}'(x^*)$, se le llama multiplicador asociado al punto fijo x^* .

Definición 2.5 Un punto periódico de período n es superatractor, repulsor o indiferente, si como punto fijo de $\mathcal{G}^n(x)$ es respectivamente superatractor, repulsor o indiferente. El multiplicador asociado a un n -ciclo $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ es (Gutiérrez, 2016)

$$\tau = (\mathcal{G}^n)'(x_0) = \mathcal{G}'(x_0) \mathcal{G}'(x_1) \cdots \mathcal{G}'(x_{n-1})$$

Definición 2.6 Sea x_n una sucesión de números reales. Decimos que la sucesión converge a un número real L si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$, se tiene que $|x_n - L| < \epsilon$. Es decir, la sucesión x_n se aproxima arbitrariamente a L cuando n tiende a infinito (Gutiérrez, 2016).

Teorema 2.3 Frey (2022) plantea que dada una función de variable real F , bien definida y con derivada continua en un intervalo de la forma $(r - \varepsilon_0, r + \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, con $F(r) = r$.

Si

$$|F'(r)| < 1, \tag{2.1}$$

existe ε positivo con $\varepsilon < \varepsilon_0$, tal que $\forall x_0 \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ se puede construir la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, con elementos en $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ y convergente hacia r . Además si los errores $e_n = x_n - r$ son no nulos, entonces los cocientes $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ tienden hacia $F'(r)$ cuando n tiende a ∞ .

Demostración. Por la condición (2.1) se puede tomar un número M estrictamente menor que 1 y mayor que $|F'(r)|$. Dada la continuidad de F' , existe $\varepsilon < \varepsilon_0$ tal que, para $x \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$, $|F'(x)| \leq M$. Se toma $x_0 \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ y se supone que se han calculado ya $x_1, \dots, x_n$ y que están en $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$. Entonces se puede hallar $x_{n+1} = F(x_n)$. Además, puesto que $F(r) = r$

$$x_{n+1} - r = F(x_n) - F(r)$$

Usando el teorema de los incrementos finitos se obtiene

$$x_{n+1} - r = F'(\xi_n)(x_n - r)$$

con ξ_n un punto intermedio entre x_n y r , que por tanto está en $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$.

Tomando valores absolutos se tiene

$$|x_{n+1} - r| = |F'(\xi)| |x_n - r| \leq M |x_n - r| < |x_n - r| \leq \varepsilon,$$

de modo que también $x_{n+1} \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$. Por inducción se concluye que se puede construir a sucesión de iterantes en $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$.

Por otro lado, se acaba de ver que $|e_{n+1}| \leq M |e_n|$ para cada n , luego

$$|e_n| \leq M |e_{n-1}| \leq M^2 |e_{n-2}| \leq \dots \leq M^n |e_0|.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ como $M < 1$ se tiene que $M^n \rightarrow 0$ y, por tanto $e_n \rightarrow 0$, es decir, $x_n \rightarrow r$ (la sucesión de iterantes converge hacia la raíz r). Finalmente, si los errores e_n son no nulos,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = \frac{F(x_n) - F(r)}{x_n - r} \rightarrow F'(r)$$

por definición de derivada.

Teorema 2.4 De acuerdo con Diloné et al. (2013), el teorema de Schroder establece que dado un método iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

en el que g es continua y q veces diferenciable en un entorno de x^* , siendo este un punto fijo de g , $x^* = g(x^*)$. Entonces la sucesión x_n converge a x^* con orden de convergencia q si

$$\frac{d^j g(x^*)}{dx^j} = 0, j = 1, 2, \dots, q-1, \frac{d^q g(x^*)}{dx^q} \neq 0$$

Demostración. Desarrollando la serie de Taylor, se tiene que

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) + \dots + \frac{1}{q!} \frac{d^q g(x)}{dx^q} (x_n - x^*)^q, x \in (x_n, x^*).$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = x^* + g'(x^*)(x_n - x^*) + \dots + \frac{1}{q!} \frac{d^q g(x)}{dx^q} (x_n - x^*)^q, x \in (x_n, x^*)$$

Entonces, usando las condiciones del enunciado, se tiene

$$x_{n+1} - x^* = \frac{1}{q!} \frac{d^q g(x)}{dx^q} (x_n - x^*)^q$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^q} = \frac{1}{q!} \frac{d^q g(x)}{dx^q} \neq 0$$

Con lo que queda demostrado que el método tiene orden de convergencia q .

2.2.3. Método de Halley

El método de Halley es utilizado para aproximar las raíces de una función de una sola variable, y tiene una larga historia que se remonta a 1694. Este método, también conocido como el método de las hipérbolas tangentes, se describe de la siguiente manera: dada una función $f(x)$ y un valor inicial x_0 lo suficientemente cercano a la raíz de la función, se construye una hipérbola que es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto x_0 hasta el segundo orden. El punto de intersección de la hipérbola tangente con el eje de las abscisas se toma como la primera estimación x_1 . Luego, se repite el mismo proceso utilizando x_1 como el nuevo valor inicial, y así sucesivamente. A medida que se realizan más estimaciones, se obtiene una mayor precisión en el resultado, es decir, se reduce el error con respecto al valor real α , el cual debe encontrarse dentro de los límites establecidos por el método (Frey, 2022).

La proximidad de x_0 a la raíz de $f(x)$ depende de la naturaleza intrínseca de la función, ya que esta puede tener puntos de inflexión o pendientes muy pequeñas, lo que aumenta las posibilidades de que el algoritmo diverja.

La función de iteración utilizada en el método de Halley se define de la siguiente manera:

$$H(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (2.2)$$

2.2.3.1. Obtención del método usando desarrollos de Taylor

La forma más común de redescubrir el método de Halley es obtenerlo a partir del polinomio de Taylor. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el teorema de Taylor fue enunciado por primera vez en 1712, después del método de Halley (Frey, 2022).

Dada una aproximación inicial x_0 de la raíz buscada r , se puede utilizar el polinomio de Taylor de grado menor o igual que N para aproximar la función f en un entorno de x_0 . Al truncar la serie en $N = 1$, se obtiene el método de Newton. Si se trunca en $N = 2$, se obtiene la ecuación que debe resolverse para encontrar las raíces del polinomio interpolador de Taylor de grado 2:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

Al encontrar las raíces de este polinomio, se obtiene el conocido como método de Halley irracional o método de Euler. Sin embargo, el método de Halley tiene la característica de evitar el uso de raíces cuadradas. Para lograr esto, se utiliza la corrección del método de Newton para aproximar el polinomio de Taylor de grado dos mediante una función lineal en x , obteniendo así una nueva aproximación x_1 sin tener que calcular raíces cuadradas. Específicamente, si en

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x_1 - x_0)(x_1 - x_0)$$

se aproxima el último factor $(x_1 - x_0)$ de la siguiente manera:

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

entonces la ecuación se convierte en:

$$\begin{aligned}
0 &= f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \left(\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \right) (x_1 - x_0) \\
&= f(x_0) + \left(f'(x_0) - \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2f'(x_0)} \right) (x_1 - x_0)
\end{aligned}$$

Usando esta técnica llamada remplazamiento, se obtiene un polinomio de grado uno, cuya raíz se utilizará como la nueva aproximación:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\left(1 - \frac{f''(x_0)f(x_0)}{2f'(x_0)^2}\right) f'(x_0)}$$

Esto lleva a la fórmula del método de Halley:

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{(1 - L_f(x_0))} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

2.2.3.2. Construcción geométrica del método de Halley

Tal como lo plantea (Fernández et al., 2001), la construcción geométrica del método de Halley, también conocido como el método de las hipérbolas tangentes, consiste en utilizar una función oscultriz de la forma:

$$g(x) = \frac{x + c}{ax + b} \quad (2.3)$$

Definición 2.7 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en un entorno del punto x_n . Se dice que otra función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, también dos veces diferenciable en un entorno de x_n , es una curva oscultriz de grado dos a f en x_n si se cumple que para $k = 0, 1, 2$:

$$g^{(k)}(x_n) = f^{(k)}(x_n)$$

Por conveniencia, en lugar de usar la forma (2.3), se utiliza una forma equivalente:

$$g(x) = \frac{(x - x_n) + c}{a(x - x_n) + b} \quad (2.4)$$

$$g'(x) = \frac{b - ac}{(a(x - x_n) + b)^2} \quad (2.5)$$

$$g''(x) = \frac{2a(ac - b)}{(a(x - x_n) + b)^3} \quad (2.6)$$

Esto permite evaluar la función g y sus derivadas en x_n de manera más directa.

Para que g sea una función osculatriz de f en x_n , se deben elegir los coeficientes a , b y c de manera que se cumplan las tres condiciones establecidas en la definición (2.7):

$$g(x_n) = f(x_n), \quad g'(x_n) = f'(x_n), \quad g''(x_n) = f''(x_n)$$

Al evaluar las expresiones (2.4) - (2.6) en x_n , estas condiciones llevan al siguiente sistema de ecuaciones:

$$f(x_n) = \frac{c}{b}, \quad (2.7)$$

$$f'(x_n) = \frac{b - ac}{b^2}, \quad (2.8)$$

$$f''(x_n) = \frac{2a(ac - b)}{b^3}. \quad (2.9)$$

A partir de (2.7), se tiene que:

$$c = bf(x_n)$$

Sustituyendo el valor de c en (2.8), se obtiene:

$$f'(x_n) = \frac{b - abf(x_n)}{b^2} = \frac{1 - af(x_n)}{b}$$

De aquí se puede despejar:

$$a = \frac{1 - bf'(x_n)}{f(x_n)}$$

Sustituyendo los valores de a y c en (2.9), se obtiene:

$$f''(x_n) = \frac{2 \left(\frac{1 - bf'(x_n)}{f(x_n)} \right) \left(\frac{1 - bf'(x_n)}{f(x_n)} \right) f(x_n) - 1}{b^2} = \frac{2[1 - bf'(x_n)]^2 - 2(1 - bf'(x_n))}{b^2 f(x_n)}$$

Al desarrollar $[1 - bf'(x_n)]^2$ y simplificar, se obtiene:

$$f(x_n) f''(x_n) b = 2b (f'(x_n))^2 - 2f'(x_n)$$

Esta ecuación implica:

$$b = \frac{2f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}$$

Por lo tanto, se puede obtener fácilmente:

$$a = \frac{-f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}, \quad c = \frac{2f(x_n) f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}$$

Ahora que se ha obtenido la hipérbola osculatriz $g(x)$, se busca la raíz de esta función para obtener el siguiente iterante. En otras palabras, se busca x_{n+1} tal que:

$$g(x_{n+1}) = \frac{(x_{n+1} - x_n) + c}{a(x_{n+1} - x_n) + b} = 0$$

Esto implica que $(x_{n+1} - x_n) = -c$, es decir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n) f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n) f''(x_n)}$$

Al dividir el numerador y el denominador por $2(f'(x_n))^2$, se obtiene nuevamente la expresión del método de Halley:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{(1 - L_f(x_n))} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2.2.4. Método de Chebyshev

Definición 2.8 Según Olivo (2013), el método de Chebyshev es un método iterativo para aproximar las raíces de una ecuación $f(x)$, su expresión clásica es

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n) f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 0. \quad (2.10)$$

El método de Chebyshev, puede deducirse de diferentes maneras. Por ejemplo, puede ser obtenido por la interpolación cuadrática de la función inversa de $f(x)$

con el fin de aproximar $f^{-1}(0)$ (Amat et al., 2003). Admite también una derivación geométrica, en términos de la parábola osculadora

$$ay(x)^2 + y(x) + bx + c = 0$$

que satisface las condiciones de tangencia

$$y(x_n) = f(x_n), \quad y'(x_n) = f'(x_n) \quad y \quad y''(x_n) = f''(x_n)$$

2.2.4.1. Interpolación cuadrática inversa

Tal como lo plantea Olivo (2013), dada la función $y = f(x)$, se llamará $x = \phi(y)$ a la función inversa de f . Haciendo el desarrollo en series de Taylor, en torno a un punto, sea y_0 , entonces se tiene

$$\phi(y) \approx \phi(y_0) + \phi'(y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)(y - y_0)^2$$

Encontrar la raíz α de la ecuación $f(x) = 0$, es lo mismo que encontrar la imagen del cero por medio de la función ϕ , es decir calcular $\phi(0)$. Así, si x_0 es un valor próximo a α y $f(x_0) = y_0$, entonces,

$$\phi(0) \approx \phi(y_0) - \phi'(y_0)y_0 + \frac{1}{2}\phi''(y_0)(y_0)^2$$

De aquí, se puede deducir una nueva aproximación a α , que denotará como x_1 :

$$x_1 = x_0 - \phi'(y_0)f(x_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)f(x_0)^2 \quad (2.11)$$

Ahora se calcula $\phi'(y)$ y $\phi''(y)$ para sustituirlo en (2.11). Se sabe que $x = \phi(y)$, $y' = f'(x)$ e $y'' = f''(x)$, de modo que ahora, por el teorema de la función inversa,

$$\phi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)} \quad (2.12)$$

y

$$\phi''(y) = \frac{d\phi'(y)}{dy} = \frac{d(1/f'(x))}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{(y')^3} \quad (2.13)$$

Sustituyendo (2.12) y (2.13) en (2.11) se obtiene

$$x_1 = x_0 - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_0)\right) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Repitiendo el mismo proceso para el punto x_1 , se consigue la nueva aproximación x_2 y por recurrencia se obtiene la expresión (2.10) que representa el algoritmo iterativo del método de Chebyshev.

2.2.4.2. Método de las parábolas tangentes

Según lo establece Gutiérrez (2016), una forma sencilla de obtener el método iterativo de Chebyshev, es por medio de una derivación geométrica a partir de una parábola tangente a la gráfica de la función cuya raíz se desea aproximar. Si se considera una parábola de la forma

$$ay^2 + y + bx + c = 0 \quad (2.14)$$

la idea consiste en aproximar la función $f(x)$ eligiendo como semilla un punto x_0 suficientemente próximo a la raíz $f(x) = 0$. Si ahora se toma en cuenta que la función debe cumplir las condiciones de tangencia siguientes

$$y(x_n) = f(x_n) \quad (2.15)$$

$$y'(x_n) = f'(x_n) \quad (2.16)$$

$$y''(x_n) = f''(x_n) \quad (2.17)$$

se puede escribir la parábola (2.14) de la forma conveniente

$$a(y - f(x_n))^2 + (y - f(x_n)) + b(x - x_n) = 0 \quad (2.18)$$

de modo que si $x = x_n$, entonces $y(x_n) = f(x_n)$, este hecho cumple la condición de tangencia (2.15).

Ahora se determinan los parámetros a y b para que se cumplan las condiciones

$$y'(x_n) = f'(x_n), \quad y''(x_n) = f''(x_n)$$

Si se deriva la expresión (2.18), queda

$$2a(y(x_n) - f(x_n))y'(x_n) + y'(x_n) + b = 0 \quad (2.19)$$

luego evaluando en el punto $(x_n, f(x_n))$ queda

$$y'(x_n) + b = 0$$

es decir

$$b = -y'(x_n) = -f'(x_n).$$

Como se observa, ahora falta derivar la expresión (2.19) y despejar a , como sigue

$$2a(y'(x_n))^2 + 2a(y(x_n) - f(x_n))y''(x_n) + y''(x_n) = 0,$$

esta expresión, evaluada en el punto de intersección $(x_n, f(x_n))$ queda reducida a la expresión

$$2a(y'(x_n))^2 + y''(x_n) = 0$$

Si ahora se despeja a , se tiene que

$$a = -\frac{y''(x_n)}{2y'(x_n)^2} = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}$$

Luego sustituyendo los valores encontrados para a y b en la expresión (2.18), se obtiene

$$-\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}(y - f(x_n))^2 + y - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

La intersección de esta curva con el eje OX , es decir cuando $y = 0$, daría la siguiente iteración del método de Chebyshev

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) \\
f'(x_n)(x - x_n) &= -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} - f(x_n) \\
x - x_n &= -\frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^3} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x &= x_n - \left(1 + \frac{f(x_n) f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.
\end{aligned}$$

Como puede verse en (2.10), esta es la expresión del método de Chebyshev.

2.2.4.3. Interpolación exponencial

En el método de la interpolación exponencial, de acuerdo con Gómez (2017), se aproxima la función $f(x)$ por medio de una curva osculadora $y(x)$, de manera que cumpla con la condición

$$y^{(j)}(x_n) = f^{(j)}(x_n), \quad j = 0, 1, 2$$

En este caso, la curva de aproximación está dada por la expresión siguiente,

$$y(x) = e^{a(y(x_n))} (b(x - x_n) + c) \quad (2.20)$$

donde a, b y c son tres parámetros a determinar. Partiendo de la curva de aproximación (2.20), e imponiendo condiciones de tangencia, se deducen las siguientes expresiones para los parámetros b y c :

$$\begin{aligned}
y(x_n) &= f(x_n) \Rightarrow c = f(x_n) \\
y'(x_n) &= f'(x_n) \Rightarrow b = f'(x_n)(1 - af(x_n)).
\end{aligned}$$

Queda por determinarse el parámetro a . Las condiciones (2.2.4.3) aseguran que el método ((2.20)) tiene convergencia cuadrática, pero se debe afinar un poco, debido a que el método de Chebyshev es cúbicamente convergente.

Conocidos b y c , ahora la familia de nuevos métodos iterativos de la forma

$$x_{n+1} = x_n - c/b$$

se convierten en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{1 - af(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (2.21)$$

Para que la familia de métodos iterativos (2.20) asegure la convergencia cúbica debe cumplir, además, la condición

$$y''(x_n) = f''(x_n)$$

y esto implica que

$$a^2 f(x_n) f'(x_n)^2 - a (f(x_n) f''(x_n) + 2f'(x_n)^2) + f''(x_n) = 0. \quad (2.22)$$

Note que para valores de a muy próximos a cero y despreciando el término que contiene a^2 en (2.22), se obtiene

$$a = \frac{f''(x_n)}{f(x_n) f''(x_n) + 2f'(x_n)^2} \quad (2.23)$$

si ahora se sustituye (2.23) en (2.21), se obtiene la misma expresión conseguida en los casos presentados anteriormente y que también coincide con el método de Chebyshev.

2.2.4.4. Propiedades del método de Chebyshev

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida en la ecuación $f(x) = 0$. El método de Chebyshev es entonces

$$C_f(x) = x - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x)\right) \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.24)$$

con

$$L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \quad (2.25)$$

donde (2.25) es el grado de convexidad logarítmico de $f(x)$ (Jiménez, 1997). El grado de convexidad logarítmico es utilizado para comparar la velocidad con que las sucesiones se aproximan a la raíz x^* , donde se tiene que $f(x^*) = 0$. En concreto, se

demuestra que si $\{s_n\}$ y $\{t_n\}$ son dos sucesiones de convergencia generadas por el método de Chebyshev sobre $g(x)$ y $f(x)$ (con raíz común x^*), respectivamente, y si además $L_g(t) < L_f(t)$ para $t \in [t_0, x^*)$, entonces la sucesión $\{s_n\}$ converge a x^* más rápidamente que $\{t_n\}$. Además, se tiene que $t_n < s_n < x^*$ para $n \geq 1$.

El método de Chebyshev (2.24) genera una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, que bajo ciertas condiciones converge a la solución de la ecuación $f(x)$. El objetivo es el estudio del comportamiento de la función de iteración de Chebyshev

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = C_f(x_n) = C_f^n(x_0), \quad (2.26)$$

para distintos puntos de partida $x_0 \in \mathbb{R}$.

A continuación, se presentan algunas propiedades de la función de iteración del método de Chebyshev:

1. Las raíces x^* de $f(x) = 0$ son puntos fijos de (2.26).
2. Las raíces simples de $f(x) = 0$, son puntos fijos superatractores de (2.26). En efecto, como

$$C'_f(x) = \frac{(3 - L_{f'}(x)) L_f(x)^2}{2}$$

y además $L_f(x^*) = 0$, se tiene que $C'_f(x^*) = 0$. Notar que además $C''_f(x^*) = 0$ y, por lo tanto, es un método de orden de convergencia 3.

3. Si x^* es una raíz de $f(x) = 0$ de multiplicidad $m > 1$, entonces es un punto fijo atractor de (2.26) con multiplicador asociado

$$C'_f(x^*) = \frac{(m-1)(2m-1)}{2m^2}$$

Notar que

$$0 < \frac{(m-1)(2m-1)}{2m^2} < 1, \forall m > 1.$$

En consecuencia, el método de Chebyshev tiene convergencia lineal para raíces múltiples.

4. Además existen puntos fijos extraños (puntos fijos de (2.26), pero que no son raíces de $f(x) = 0$). En concreto, estos son la solución de la ecuación

$$L_f(x) = -2.$$

Notar que estos puntos fijos son atractores (Kneisl, 2001) si

$$\left| 6 - \frac{L_f(x)^2 L_{f'}(x)}{2} \right| < 1,$$

y superatractores si

$$L_f(x)^2 L_{f'}(x) = 12$$

5. Los puntos críticos de (2.26) son los ceros de $C'_f(x)$, es decir, las raíces de $f(x)$, las raíces de $f''(x)$, que a su vez son los puntos de inflexión de $f(x)$ y finalmente están las soluciones de $L_{f'}(x) = 3$.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Introducción

En este capítulo, se presentan los fundamentos metodológicos de este estudio, los cuales engloban el diseño adoptado, el método, el tipo de investigación, el enfoque utilizado y los procedimientos necesarios para su desarrollo.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño

La estructura metodológica de este estudio se basa en un diseño no experimental, conforme a lo sugerido por Hernández et al. (2018), en donde las variables no se modifican de manera deliberada. En términos de la duración del estudio, es transversal, ya que implicó la recolección de datos en un solo instante específico.

3.2.2. Método.

Este estudio se fundamentó en la aplicación del método analítico-deductivo, ya que se basó en la construcción de un nuevo método iterativo por composición de funciones, y como bien lo define Espinoza (2020), el método analítico es una técnica de investigación que implica descomponer un todo en sus partes constituyentes con el fin de examinar sus causas, naturaleza y efectos. Adicionalmente, se empleó un razonamiento deductivo, el cual permitió derivar conclusiones significativas a partir de los hallazgos, facilitando así la verificación de los objetivos propuestos en esta investigación (Rodríguez et al., 2017).

3.2.3. Tipo.

De acuerdo a las características, esta investigación fue de tipo explicativa-descriptiva, ya que pretendió comprender y describir en detalle el funcionamiento y el impacto potencial del nuevo método iterativo. Esto implicó examinar y recopilar datos de diferentes fuentes, analizarlos y presentarlos para comprender su estructura y aplicabilidad, además de evaluar las variables y determinar cómo interactúan entre sí (Ramos-Galarza, 2020).

3.2.4. Enfoque.

El enfoque que se empleó en esta tesis se basó en un enfoque mixto, combinando tanto elementos cualitativos como cuantitativos. Esta elección permitió abordar de manera integral el objetivo de construir un nuevo método iterativo, pues por un lado, se realizaron pruebas para analizar su convergencia y eficacia, y técnicas cualitativas para establecer las ecuaciones de error y su orden de convergencia (Ortega, 2018).

3.3. Procedimientos.

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso a realizar en este trabajo de investigación:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, acerca de las fundamentaciones, antecedentes y sustento conceptual de los métodos iterativos de Halley y Chebyshev.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos constitutivos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada del borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los dos nuevos métodos iterativos contruidos a través de las composiciones de los métodos de Halley y Chebyshev, conjunto a sus teoremas de convergencia local y prueba mediante funciones test para verificar su eficacia. A continuación se plantean las fórmulas de iteración de ambos métodos para así luego aplicar la composición de funciones.

En la ecuación (2.2) se establece que función de iteración utilizada en el método de Halley, está dada por:

$$H(x_n) = x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (4.1)$$

De igual manera, en (2.10) se estableció que la expresión que relaciona la función de iteración del método de Chebyshev es

$$C(x_n) = x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.2)$$

4.2. Método iterativo mediante la composición del método de Chebyshev con el método de Halley

Para obtener el nuevo método iterativo de Chebyshev compuesto con Halley, se procede a evaluar $C(H(x_n))$. Por tanto, reemplazando $H(x_n)$ dado en la ecuación (4.1) en la expresión (4.2), se tiene

$$C(H(x_n)) = H(x_n) - \left(1 + \frac{f(H(x_n))f''(H(x_n))}{2f'(H(x_n))^2}\right) \frac{f(H(x_n))}{f'(H(x_n))} \quad (4.3)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
 JP1 = & x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} \\
 & - \left(1 + \frac{f\left(x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right)f''\left(x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right)}{2f'\left(x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right)^2} \right) \\
 & \times \frac{f\left(x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right)}{f'\left(x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}\right)}
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dada la forma tan extensa en la que se presenta esta función iterativa del método JP 1, a continuación se presenta la versión simplicada de la misma.

$$JP1 = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} - \left(1 + \frac{f(H(x_n))f''(H(x_n))}{2f'(H(x_n))^2} \right) \frac{f(H(x_n))}{f'(H(x_n))} \quad (4.5)$$

donde $H(x)$ es la expresión dada en (4.1).

4.3. Método iterativo mediante la composición del método de Halley con el método de Chebyshev

Para componer el método de Halley con el método de Chebyshev, se realiza una composición similar a la realizada en la sección anterior. En este caso, se va a obtener $H(C(x_n))$. Por tanto, dadas las fórmulas iterativas (4.1) y (4.2), se tiene que

$$H(C(x_n)) = C(x_n) - \frac{2f(C(x_n))f'(C(x_n))}{2(f'(C(x_n)))^2 - f(C(x_n))f''(C(x_n))} \quad (4.6)$$

Al sustituir la expresión para $C(x_n)$ en (4.7), la expresión obtenida es demasiado extensa, por tanto se expresa de forma simplicada de la forma siguiente:

$$JP2 = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{2f(C(x_n))f'(C(x_n))}{2(f'(C(x_n)))^2 - f(C(x_n))f''(C(x_n))} \quad (4.7)$$

4.4. Orden de convergencia local de los nuevos métodos iterativos

En esta sección se presentan dos teoremas que demuestran el orden de convergencia de los métodos iterativos construidos en (4.5) y (4.7), respectivamente.

Teorema 4.1 Sea $x^* \in I$ una raíz simple de la función $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, lo suficientemente diferenciable en el intervalo abierto I . Si x_0 es un punto inicial lo suficientemente próximo a x^* , entonces, el orden de convergencia del método iterativo $JP1$ definido en (4.5) es de noveno orden y satisface la ecuación de error siguiente:

$$e_{n+1} = \left(A_3^4 + 2A_2^8 + 5A_3^3 A_2^2 - 9A_3^2 A_2^4 \right) e_n^9 + \mathcal{O}e_n^{10}.$$

donde

$$A_k = \frac{f^k(x^*)}{k!f'(x^*)}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Demostración. Sea x^* la raíz simple de $f(x)$, $A_k = \frac{f^k(x^*)}{k!f'(x^*)}$, $k = 2, 3, 4, \dots$ y $e_n = (x_n - x^*)$. Considerando la función de iteración definida por

$$G(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)} - \left(1 + \frac{f(H(x))f''(H(x))}{2f'(H(x))^2} \right) \frac{f(H(x))}{f'(H(x))} \quad (4.8)$$

Aplicando el procesador de cálculo simbólico Wolfram Mathematica 13.3, se demuestra que

$$G(x^*) = x^*, G^k(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

y que

$$G^{(9)}(x^*) = \frac{1120f'''(x^*)^4(f'(x^*))^8 + 11340(f'(x^*))^4(f''(x^*))^8 + 8400f'''(x^*)^3(f'(x^*))^7(f''(x^*))^2}{4(f'(x^*))^{12}} - \frac{22680f'''(x^*)^2(f'(x^*))^6(f''(x^*))^4 - 26460f'''(x^*)(f'(x^*))^5(f''(x^*))^6}{4(f'(x^*))^{12}} \quad (4.9)$$

De la expresión (4.9), se sigue que

$$G^{(9)}(x^*) = \frac{1120f'''(x^*)^4(f'(x^*))^8}{4(f'(x^*))^{12}} + \frac{11340(f'(x^*))^4(f''(x^*))^8}{4(f'(x^*))^{12}} + \frac{8400f'''(x^*)^3(f'(x^*))^7(f''(x^*))^2}{4(f'(x^*))^{12}} - \frac{22680f'''(x^*)^2(f'(x^*))^6(f''(x^*))^4}{4(f'(x^*))^{12}} - \frac{26460f'''(x^*)(f'(x^*))^5(f''(x^*))^6}{4(f'(x^*))^{12}} \quad (4.10)$$

$$G^{(9)}(x^*) = \frac{1120}{4} \left[\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^4 + \frac{11340}{4} \left[\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^8 + \frac{8400}{4} \left[\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^3 \left[\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^2 - \frac{22680}{4} \left[\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^2 \left[\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^4 - \frac{26460}{4} \left[\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} \right] \left[\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^6 \quad (4.11)$$

Expresando a $G^{(9)}(x^*)$ en terminos de A_k , se tiene que

$$G^{(9)}(x^*) = 362880A_3^4 + 725760A_2^8 + 1814400A_3^3A_2^2 - 3265920A_3^2A_2^4 - 2540160A_3A_2^6 \quad (4.12)$$

Por otro lado, aplicando a Taylor a (4.8), próximo a x^* ; se tiene que

$$G(x_n) = x_{n+1} = G(x^*) + \sum_{k=1}^8 \frac{G^{(k)}(x^*)}{k!} (x_n - x^*)^k + \frac{G^{(9)}(x^*)}{9!} (x_n - x^*)^9 + \mathcal{O}[(x_n - x^*)^{10}] \quad (4.13)$$

Tomando en cuenta que x^* es una raíz simple de $f(x)$, esto implica que $G(x^*) = 0$, luego, considerando a (4.9) y (4.13) se sigue que

$$x_{n+1} = \frac{362880A_3^4 + 725760A_2^8 + 1814400A_3^3A_2^2 - 3265920A_3^2A_2^4}{9!} \times (x_n - x^*)^9 + \mathcal{O}[(x_n - x^*)^{10}]. \quad (4.14)$$

de donde se sigue que

$$e_{n+1} = (A_3^4 + 2A_2^8 + 5A_3^3A_2^2 - 9A_3^2A_2^4) e_n^9 + \mathcal{O}e_n^{10}. \quad (4.15)$$

Teorema 4.2 Sea $x^* \in I$ una raíz simple de la función $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, lo suficientemente diferenciable en el intervalo abierto I . Si x_0 es un punto inicial lo suficientemente próximo a x^* , entonces, el orden de convergencia del método iterativo $JP2$ definido en (4.7) es de noveno orden y satisface la ecuación de error siguiente:

$$e_{n+1} = (8A_2^8 - 10A_2^6A_3 + 18A_2^4A_3^2 - 7A_2^2A_3^3 + A_3^4) e_n^9 + \mathcal{O}e_n^{10}.$$

donde

$$A_k = \frac{f^k(x^*)}{k!f'(x^*)}, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Demostración. De forma similar, sea x^* la raíz simple de $f(x)$, $A_k = \frac{f^k(x^*)}{k!f'(x^*)}$, $k = 2, 3, 4, \dots$ y $e_n = (x_n - x^*)$. Sea la función de iteración de este método definida por

$$M(x) = x - \left(1 + \frac{f(x)f''(x)}{2f'(x)^2}\right) \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{2f(C(x))f'(C(x))}{2(f'(C(x)))^2 - f(C(x))f''(C(x))} \quad (4.16)$$

Aplicando nuevamente el procesador de cálculo simbólico Wolfram Mathematica 13.3 (ver anexos), se demuestra que

$$M(x^*) = x^*, M^k(x^*) = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

y que

$$\begin{aligned} M^{(9)}(x^*) = & \frac{181440 (f'(x^*))^8 (f''(x^*))^8 - 302400 (f'(x^*))^9 (f''(x^*))^6 (f'''(x^*))}{16 (f'(x^*))^{16}} \\ & + \frac{181440 (f'(x^*))^{10} (f''(x^*))^4 (f'''(x^*))^2 - 47040 (f'(x^*))^{11} (f''(x^*))^2 (f'''(x^*))^3}{16 (f'(x^*))^{16}} \\ & + \frac{4480 (f'(x^*))^{12} (f'''(x^*))^4}{16 (f'(x^*))^{16}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

De la expresión (4.17), se obtiene que

$$\begin{aligned} M^{(9)}(x^*) = & \frac{181440 (f'(x^*))^8 (f''(x^*))^8}{16 (f'(x^*))^{16}} - \frac{302400 (f'(x^*))^9 (f''(x^*))^6 (f'''(x^*))}{16 (f'(x^*))^{16}} \\ & + \frac{181440 (f'(x^*))^{10} (f''(x^*))^4 (f'''(x^*))^2}{16 (f'(x^*))^{16}} - \frac{47040 (f'(x^*))^{11} (f''(x^*))^2 (f'''(x^*))^3}{16 (f'(x^*))^{16}} \\ & + \frac{4480 (f'(x^*))^{12} (f'''(x^*))^4}{16 (f'(x^*))^{16}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} M^{(9)}(x^*) = & \frac{181440}{16} \left[\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^8 - \frac{302400}{16} \left[\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^6 \left[\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} \right] + \frac{181440}{16} \left[\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^4 \left[\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^2 \\ & - \frac{47040}{16} \left[\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^2 \left[\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^3 + \frac{4480}{16} \left[\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} \right]^4 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Expresando a $M^{(9)}(x^*)$ en terminos de A_k , se tiene que

$$M^{(9)}(x^*) = 2903040A_2^8 - 3628800A_2^6A_3 + 6531840A_2^4A_3^2 - 2540160A_2^2A_3^3 + 362880A_3^4 \quad (4.20)$$

Por otro lado, aplicando a Taylor a (4.16), próximo a x^* ; se tiene que

$$M(x_n) = x_{n+1} = M(x^*) + \sum_{k=1}^8 \frac{M^k(x^*)}{k!} (x_n - x^*)^k + \frac{M^9(x^*)}{9!} (x_n - x^*)^9 + \mathcal{O}[(x_n - x^*)^{10}] \quad (4.21)$$

Tomando en cuenta que x^* es una raíz simple de $f(x)$, esto implica que $M(x^*) = 0$, luego, considerando a (4.17) y (4.21) se sigue que

$$x_{n+1} = \frac{2903040A_2^8 - 3628800A_2^6A_3 + 6531840A_2^4A_3^2 - 2540160A_2^2A_3^3 + 362880A_3^4}{9!} \times (x_n - x^*)^9 + \mathcal{O}[(x_n - x^*)^{10}]. \quad (4.22)$$

de donde se sigue que

$$e_{n+1} = (8A_2^8 - 10A_2^6A_3 + 18A_2^4A_3^2 - 7A_2^2A_3^3 + A_3^4) e_n^9 + \mathcal{O}e_n^{10}. \quad (4.23)$$

lo cual concluye la demostración.

4.5. Prueba de los métodos iterativos mediante funciones test

En este apartado, se toman como referencia diferentes funciones de naturalezas distintas para evaluar la eficiencia de los nuevos métodos iterativos para solucionar ecuaciones de orden superior. Para estos fines, se utilizarán las siguientes funciones para su evaluación.

1. $f_1(x) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36$
2. $f_2(x) = x^5 - 55x^4 + 1210x^3 - 12285x^2 + 60050x - 90000$
3. $f_3(x) = x^8 - 120x^7 + 5460x^6 - 137280x^5 + 2027520x^4 - 16934400x^3 + 78451200x^2 - 165888000x + 126982656$

Además de estas polinómicas, se consideran las siguientes funciones test para evaluar su efectividad en otro tipo de ecuaciones.

a) $f_4(x) = \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^2 + x - 6}$

b) $f_5(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$

c) $f_6(x) = e^x - 3x$

Inicialmente, se muestra el método JP1 establecido es (4.5), cuyos resultados de aplicación se muestran en el cuadro (4.1), donde x_0 indica el punto inicial, n el número de iteraciones requeridas y x^* la solución obtenida. Este cuadro muestra que la velocidad de convergencia del método JP1 fue bastante rápida, lo que indica que produjo resultados precisos en pocas iteraciones.

Función	x_0	n	x^*
f_1	3	2	4
f_2	7	4	2.489
f_3	17	2	19.0686
f_4	2.5	2	1
f_5	0.5	2	0
f_6	5	3	1.51213

Cuadro 4.1: Aplicación del método de JP1

Ahora, se presentan las soluciones de estas mismas funciones, pero aplicando el método JP2 establecido en (4.7), el cual dado que también tiene convergencia 9, aproxima rápidamente las raíces en pocas iteraciones.

Función	x_0	n	x^*
f_1	3	2	4
f_2	7	4	2.489
f_3	17	13	19.0686
f_4	2.5	3	1
f_5	0.5	2	0
f_6	5	3	1.51213

Cuadro 4.2: Aplicación del método de JP2

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan las conclusiones de esta investigación en correspondencia con los objetivos planteados, y así dar respuesta al objetivo general de construir un nuevo método iterativo mediante composición de funciones de iteración, con los métodos de Chebyshev y Halley para la solución de ecuaciones de orden superior.

5.2. Conclusiones

Conforme a los resultados presentados y los objetivos investigativos establecidos para esta tesis, a continuación se presentan las conclusiones obtenidas:

1. En relación al objetivo 1 de construir un método iterativo de alto orden de convergencia mediante la composición la función de iteración de Chebyshev con Halley, se creó un método llamado JP1, cuya forma simplificada es:

$$JP1 = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)} - \left(1 + \frac{f(H(x_n))f''(H(x_n))}{2f'(H(x_n))^2}\right) \frac{f(H(x_n))}{f'(H(x_n))} \quad (5.1)$$

2. En lo que respecta al objetivo 2, de construir un método mediante la composición de las funciones de iteración de Halley con Chebyshev, se estableció el método JP2 dado por:

$$JP2 = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{2f(C(x_n))f'(C(x_n))}{2(f'(C(x_n)))^2 - f(C(x_n))f''(C(x_n))} \quad (5.2)$$

3. En relación al objetivo 3, se presentaron dos teoremas que establecen el orden de convergencia local de los dos métodos iterativos construidos, que ambos casos es de noveno orden. Las ecuaciones de error establecidas para los métodos son $e_{n+1} = (A_3^4 + 2A_2^8 + 5A_3^3A_2^2 - 9A_3^2A_2^4)e_n^9 + \mathcal{O}e_n^{10}$ para el caso de JP1 y $e_{n+1} = (8A_2^8 - 10A_2^6A_3 + 18A_2^4A_3^2 - 7A_2^2A_3^3 + A_3^4)e_n^9 + \mathcal{O}e_n^{10}$ para JP2.

Estas ecuaciones revelan que el error en la aproximación de la raíz disminuirá a la novena potencia de la magnitud del error anterior.

4. Con respecto al objetivo 4, los resultados se mostró que tanto el método JP1 como el JP2 demostraron una convergencia rápida y efectiva hacia las raíces de las funciones evaluadas, ya que en la mayoría de los casos, se lograron aproximaciones altamente precisas en muy pocas iteraciones.

En respuesta al objetivo general, se construyó dos métodos iterativos de noveno orden de convergencia que mediante la composición de funciones de los métodos de Chebyshev y Halley para resolver ecuaciones de orden superior con alta eficacia y rapidez en la convergencia hacia las raíces de funciones evaluadas.

5.3. Líneas futuras de investigación

A partir de las conclusiones obtenidas, se plantean las siguientes líneas a los fines de continuar con el estudio de la composición de métodos iterativos para la resolución de ecuaciones de orden superior:

1. Aplicación del Método Iterativo Compuesto Chebyshev-Halley a Sistemas de Ecuaciones No Lineales.
2. Optimización de Parámetros en el Método Iterativo Mediante Composición de Chebyshev y Halley para Ecuaciones de Orden Superior.
3. Análisis comparativo del Método Iterativo Compuesto Chebyshev-Halley versus Otros Métodos Iterativos en Ecuaciones de Orden Superior.
4. Extensión del Método Iterativo Chebyshev-Halley a Ecuaciones Diferenciales No Lineales.

Referencias

- Amat, S., Busquier, S., & Gutiérrez, J. M. (2003). Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 157(1), 197-205.
- Bernardino del Pino, M. (2019). Teorema de puntos fijos con aplicaciones. Universidad de Sevilla. Departamento de Análisis Matemático.
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Análisis numérico. Cengage Learning Editores.
- Chum, C. (2006). A hybrid method for solving polynomial equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 193(2), 410-419.
- Cox, D. A., Little, J., & O'Shea, D. (2007). Ideals, varieties, and algorithms (3ra ed.). Springer.
- Dehghan, M., & Hajarian, M. (2010). A new iterative method based on Chebyshev polynomials for nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 215(5), 1885-1892.
- Dilone, M. A., Garcia-Olivo, M., & Gutierrez, J. M. (2013). A note on the semilocal convergence of Chebyshev's method. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 88(1), 98-105.
- Diloné, M. A., Gerónimo, E., & Veraz, E. (2016). Construcción de nuevos métodos iterativos mediante composición de las funciones de iteración de Newton y Halley. Universidad Autónoma de Santo Domingo.
- DivulgaMat. (2017). P. L. Chebyshev. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. <https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/chebyshev>
- Feng, X., Liu, Y., & Zhao, L. (2013). A Chebyshev-Newton Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*, 239, 50-60.
- Fernández, J. A. E., Jiménez, J. M. G., Verón, M. A. H., & Martínez, M. A. S. (2001). El método de Halley: posiblemente, el método más redescubierto del mundo.

- In Margarita mathematica: en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández (pp. 205-220). Universidad de La Rioja.
- Frey, A. (2022). El Método de Halley. Universidad de Valladolid. Facultad de Ciencias.
- Frontini, M., & Sormani, E. (2003). Some variant of Newton's method with third-order convergence. *Applied Mathematics and Computation*, 140(2-3), 419-426.
- Garrido, J. (2009). *Álgebra lineal*. Pearson Educación.
- Gómez G, J. (2017). Interpolación numérica. ¿Qué hay detrás de Chebfun?. Universidad de Cantabria.
- Gómez, A. (2019). Construcción de un nuevo método iterativo mediante composición de funciones para resolver ecuaciones de orden superior. Universidad Tecnológica del Cibao Oriental, UTECO. República Dominicana.
- Grinberg, E. (2020). A self-contained proof of the fundamental theorem of algebra. *American Mathematical Monthly*, 127(1), 44-55.
- Gutiérrez, L. (2016). Métodos numéricos para resolver ecuaciones y problemas de optimización no lineales. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2018). Metodología de la investigación (Vol. 4, pp. 310-386). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Iqbal, M., Jabeen, F., & Khalid, A. (2014). A new Newton-Raphson iterative method for solving nonlinear equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 91(7), 1394-1404.
- Jiménez, J. M. G. (1997). El método de Newton en espacios de Banach. Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja.
- Kincaid, D., & Cheney, W. (2012). *Análisis numérico: matemáticas para la computación*. Cengage Learning Editores.
- Kneisl, K. (2001). Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method, and Halley's method. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 11(2), 359-370.
- Lin, J., & Su, J. (2018). A new Chebyshev iterative method for solving nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation*, 321, 600-608.

- Olivo, M. G. (2013). El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales. Doctoral dissertation, Universidad de La Rioja.
- Olivo, M. G., & Gutiérrez, J. M. (2013). Notas históricas sobre el método de Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales. *Miscelánea Matemática*, 57, 63-83.
- Rodriguez, Y. (2020). Metodología de la Investigación. Klik: Soluciones educativas. México.
- Scavo, T. R., & Thoo, J. B. (1995). On the geometry of Halley's method. *The American Mathematical Monthly*, 102(5), 417-426.
- Stewart, I. (2003). Galois theory. Tercera edición. Chapman & Hall/CRC.
- Vassileva, M. P. (2011). Métodos iterativos eficientes para la resolución de sistemas no lineales. Doctoral dissertation, Universitat Politècnica de València.
- Wang, H., Zeng, F., & Gao, W. (2018). A Chebyshev-Newton Method for Solving Nonlinear Systems of Equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2018, 1-13.

ANEXOS.

Anexo I. Prueba de iteración para la convergencia del método JP1, obtenido de la composición de Chebyshev con Halley.

```
Chebyshevconhalley.nb * - Wolfram Mathematica
Archivo Edición Insertar Formato Celda Gráficos Evaluación Paletas Ventana Ayuda

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA EL HOGAR
Centro de aprendizaje | Comunidad Wolfram | Help

Chebyconhalley[x_] := x - (2 f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2 - f[x] × f''[x]) -
(1 + (f[x - (2 f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2 - f[x] × f''[x])] ×
f''[x - (2 f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2 - f[x] × f''[x])]) /
(2 f'[x - (2 f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2 - f[x] × f''[x])]^2)) *
(f[x - (2 f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2 - f[x] × f''[x])] /
f'[x - (2 f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2 - f[x] × f''[x])])

(*Calcular la sexta derivada de*)
derivada = D[Chebyconhalley[x], {x, 9}]
deriva
sustituiruno = derivada /. f[x] → 0
simplificaruno = Simplify[sustituiruno]
simplifica
sustituirdos = simplificaruno /. f[x] → 0
```

```
Chebyshevconhalley.nb * - Wolfram Mathematica
Archivo Edición Insertar Formato Celda Gráficos Evaluación Paletas Ventana Ayuda

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA EL HOGAR
Centro de aprendizaje | Comunidad Wolfram | Help

Out[ ] = 
$$\frac{1}{4 f'[x]^{12}} \left( 1720845 f[x]^2 f''[x]^{10} - 7067655 f[x]^2 f'[x] f''[x]^8 f^{(3)}[x] + \right.$$


$$11340 f[x] f'[x]^2 f''[x]^6 \left( -88 f''[x]^3 + 871 f[x] f^{(3)}[x]^2 + 168 f[x] f''[x] f^{(4)}[x] \right) -$$


$$42 f[x] f'[x]^3 f''[x]^4 \left( -86040 f''[x]^3 f^{(3)}[x] + 130430 f[x] f^{(3)}[x]^3 + \right.$$


$$104490 f[x] f''[x] f^{(3)}[x] f^{(4)}[x] + 8739 f[x] f''[x]^2 f^{(5)}[x] \left. \right) +$$


$$21 f'[x]^4 f''[x]^2 \left( 540 f''[x]^6 + 46600 f[x]^2 f^{(3)}[x]^4 - 45180 f[x] f''[x]^4 f^{(4)}[x] + 134220 \right.$$


$$f[x]^2 f''[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(4)}[x] + 45 f[x]^2 f''[x]^2 \left( 457 f^{(4)}[x]^2 + 696 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] \right) +$$


$$648 f[x] f''[x]^3 \left( -305 f^{(3)}[x]^2 + 4 f[x] f^{(6)}[x] \right) \left. \right) -$$


$$3 f'[x]^5 \left( 8820 f''[x]^6 f^{(3)}[x] + 1680 f[x]^2 f^{(3)}[x]^5 + \right.$$


$$133000 f[x]^2 f''[x] f^{(3)}[x]^3 f^{(4)}[x] - 57456 f[x] f''[x]^5 f^{(5)}[x] +$$


$$105 f[x]^2 f''[x]^2 f^{(3)}[x] \left( 1385 f^{(4)}[x]^2 + 912 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] \right) + 56 f[x] f''[x]^3$$


$$\left( -10220 f^{(3)}[x]^3 + 585 f[x] f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + 441 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] \right) +$$


$$36 f[x] f''[x]^4 \left( -15225 f^{(3)}[x] f^{(4)}[x] + 74 f[x] f^{(7)}[x] \right) \left. \right) +$$


$$2 f'[x]^6 \left( 7 f[x]^2 f^{(3)}[x]^2 \left( 2505 f^{(4)}[x]^2 + 376 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] \right) + \right.$$

```



$$\begin{aligned}
 & 3780 f''[x]^4 \left(3 f^{(3)}[x]^2 - 2 f[x] f^{(6)}[x] \right) + 28 f[x] f''[x] \\
 & \left(-4180 f^{(3)}[x]^4 + 405 f[x] f^{(4)}[x]^3 + 1323 f[x] f^{(3)}[x] f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + \right. \\
 & \quad 408 f[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(6)}[x] \left. \right) + 36 f[x] f''[x]^2 \left(-8820 f^{(3)}[x]^2 f^{(4)}[x] + \right. \\
 & \quad 21 f[x] \left(f^{(5)}[x]^2 + 4 f^{(4)}[x] f^{(6)}[x] \right) + 83 f[x] f^{(3)}[x] f^{(7)}[x] \left. \right) + \\
 & \quad 756 f[x] f''[x]^3 \left(-90 f^{(4)}[x]^2 - 150 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(8)}[x] \right) \left. \right) + \\
 & 56 f'[x]^8 f^{(3)}[x] \left(20 f^{(3)}[x]^3 - 60 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] + \right. \\
 & \quad f[x] \left(-162 f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(9)}[x] \right) \left. \right) - \\
 & 8 f'[x]^7 \left(f[x] \left(-8050 f^{(3)}[x]^3 f^{(4)}[x] + 567 f[x] f^{(4)}[x]^2 f^{(5)}[x] + \right. \right. \\
 & \quad 21 f[x] f^{(3)}[x] \left(3 f^{(5)}[x]^2 + 17 f^{(4)}[x] f^{(6)}[x] \right) + 138 f[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(7)}[x] \left. \right) + \\
 & \quad 63 f[x] f''[x] f^{(3)}[x] \left(-90 f^{(4)}[x]^2 - 112 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(8)}[x] \right) + \\
 & \quad 21 f''[x]^2 \left(50 f^{(3)}[x]^3 - 90 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] + \right. \\
 & \quad \left. \left. f[x] \left(-162 f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(9)}[x] \right) \right) \right) \left. \right) \\
 \\
 & Out[*] = \frac{1}{4 f'[x]^{12}} \left(11340 f'[x]^4 f''[x]^8 - 26460 f'[x]^5 f''[x]^6 f^{(3)}[x] + \right. \\
 & \quad \left. 22680 f'[x]^6 f''[x]^4 f^{(3)}[x]^2 - 8400 f'[x]^7 f''[x]^2 f^{(3)}[x]^3 + 1120 f'[x]^8 f^{(3)}[x]^4 \right)
 \end{aligned}$$

Anexo II. Prueba de iteración para la convergencia del método JP2, obtenido de la composición de Halley con Chebyshev.

Halleyconchebyshev.nb - Wolfram Mathematica

Archivo Edición Insertar Formato Celda Gráficos Evaluación Paletas Ventana Ayuda

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA EL HOGAR

Centro de aprendizaje | Comunidad Wolfram | Help

```

In[ ]:= ClearAll[Halleyconchebyshev, x]
|borra todo

Halleyconchebyshev[x_] := x - (1 + (f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2)) * (f[x] / f'[x]) -
(2 f[x - (1 + (f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2)) * (f[x] / f'[x])] ×
f'[x - (1 + (f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2)) * (f[x] / f'[x])] /
(2 f'[x - (1 + (f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2)) * (f[x] / f'[x])]^2 -
f[x - (1 + (f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2)) * (f[x] / f'[x])] ×
f''[x - (1 + (f[x] × f'[x]) / (2 f'[x]^2)) * (f[x] / f'[x])])

(*Calcular la novena derivada*)
derivada = D[Halleyconchebyshev[x], {x, 9}]
|deriva

sustituiruno = derivada /. f[x] → 0
simplificaruno = Simplify[sustituiruno]
|simplifica

sustituirdos = simplificaruno /. f[x] → 0

```

Halleyconchebyshev.nb - Wolfram Mathematica

Archivo Edición Insertar Formato Celda Gráficos Evaluación Paletas Ventana Ayuda

WOLFRAM MATHEMATICA | EDICIÓN PARA EL HOGAR

Centro de aprendizaje | Comunidad Wolfram | Help

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[] = & \frac{1}{f'[x]^8 \left(-2 f'[x]^2 + f[x] f''[x] \right)^4} \left(6667920 f[x]^4 f''[x]^{12} - 24551100 f[x]^4 f'[x] f''[x]^{10} f^{(3)}[x] + \right. \\
 & 3780 f[x]^3 f'[x]^2 f''[x]^8 \left(-15036 f''[x]^3 + 7399 f[x] f^{(3)}[x]^2 + 2257 f[x] f''[x] f^{(4)}[x] \right) - \\
 & 1512 f[x]^3 f'[x]^3 f''[x]^6 \left(-133395 f''[x]^3 f^{(3)}[x] + 5680 f[x] f^{(3)}[x]^3 + \right. \\
 & \left. 12210 f[x] f''[x] f^{(3)}[x] f^{(4)}[x] + 769 f[x] f''[x]^2 f^{(5)}[x] \right) + \\
 & 21 f[x]^2 f'[x]^4 f''[x]^4 \left(4947480 f''[x]^6 - 95720 f[x]^2 f^{(3)}[x]^4 - 2213280 f[x] f''[x]^4 f^{(4)}[x] + \right. \\
 & 478680 f[x]^2 f''[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(4)}[x] + 225 f[x]^2 f''[x]^2 \left(407 f^{(4)}[x]^2 + 430 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] \right) + \\
 & \left. 72 f[x] f''[x]^3 \left(-161055 f^{(3)}[x]^2 + 109 f[x] f^{(6)}[x] \right) \right) - \\
 & f[x]^2 f'[x]^5 f''[x]^2 \left(354450600 f''[x]^6 f^{(3)}[x] - 772800 f[x]^2 f^{(3)}[x]^5 + \right. \\
 & 602000 f[x]^2 f''[x] f^{(3)}[x]^3 f^{(4)}[x] - 5866560 f[x] f''[x]^5 f^{(5)}[x] + \\
 & 63 f[x]^2 f''[x]^2 f^{(3)}[x] \left(26705 f^{(4)}[x]^2 + 12988 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] \right) + \\
 & 84 f[x] f''[x]^3 \left(-1334380 f^{(3)}[x]^3 + 3735 f[x] f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + 2709 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] \right) + \\
 & \left. 54 f[x] f''[x]^4 \left(-1832460 f^{(3)}[x] f^{(4)}[x] + 337 f[x] f^{(7)}[x] \right) \right) + 2 f[x] f'[x]^6 \\
 & \left(-15717240 f''[x]^9 + 1680 f[x]^3 f^{(3)}[x]^6 + 32481540 f[x] f''[x]^7 f^{(4)}[x] - 85680 f[x]^3 \right. \\
 & \left. f''[x] f^{(3)}[x]^4 f^{(4)}[x] + 7 f[x]^3 f''[x]^2 f^{(3)}[x]^2 \left(10605 f^{(4)}[x]^2 + 88 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] \right) - \right. \\
 & 1512 f[x] f''[x]^6 \left(-140445 f^{(3)}[x]^2 + 238 f[x] f^{(6)}[x] \right) + \\
 & 84 f[x]^2 f''[x]^3 \left(-77140 f^{(3)}[x]^4 + 270 f[x] f^{(4)}[x]^3 + 1152 f[x] f^{(3)}[x] f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + \right. \\
 & 417 f[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(6)}[x] + 18 f[x]^2 f''[x]^4 \left(-1606850 f^{(3)}[x]^2 f^{(4)}[x] + \right. \\
 & \left. 231 f[x] f^{(5)}[x]^2 + 504 f[x] f^{(4)}[x] f^{(6)}[x] + 509 f[x] f^{(3)}[x] f^{(7)}[x] \right) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 378 f[x]^2 f''[x]^5 \left(-10895 f^{(4)}[x]^2 - 13522 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] + 2 f[x] f^{(8)}[x] \right) + 224 f'[x]^{12} \\
& f^{(3)}[x] \left(20 f^{(3)}[x]^3 - 60 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] + f[x] \left(-162 f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(9)}[x] \right) \right) - \\
& 4 f[x] f'[x]^7 f''[x] \left(-22834980 f''[x]^6 f^{(3)}[x] + 1922508 f[x] f''[x]^5 f^{(5)}[x] - \right. \\
& 84 f[x]^2 f^{(3)}[x]^2 \left(-3340 f^{(3)}[x]^3 + 27 f[x] f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + 10 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] \right) - \\
& 54 f[x] f''[x]^4 \left(-617925 f^{(3)}[x] f^{(4)}[x] + 337 f[x] f^{(7)}[x] \right) + \\
& 2 f[x]^2 f''[x] \left(-897470 f^{(3)}[x]^3 f^{(4)}[x] + 567 f[x] f^{(4)}[x]^2 f^{(5)}[x] + \right. \\
& 21 f[x] f^{(3)}[x] \left(33 f^{(5)}[x]^2 + 62 f^{(4)}[x] f^{(6)}[x] \right) + 516 f[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(7)}[x] \left. \right) + \\
& 63 f[x]^2 f''[x]^2 f^{(3)}[x] \left(-29225 f^{(4)}[x]^2 - 17732 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] + 4 f[x] f^{(8)}[x] \right) + \\
& 21 f[x] f''[x]^3 \left(2503920 f^{(3)}[x]^3 - 11916 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] + \right. \\
& f[x] \left(-15588 f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(9)}[x] \right) \left. \right) + \\
& 4 f'[x]^8 \left(45360 f''[x]^8 - 3065580 f[x] f''[x]^6 f^{(4)}[x] + 85680 f[x]^3 f^{(3)}[x]^4 f^{(4)}[x] - \right. \\
& 70 f[x]^3 f''[x] f^{(3)}[x]^2 \left(2769 f^{(4)}[x]^2 + 824 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] \right) + 1512 f[x] f''[x]^5 \\
& \left(-14915 f^{(3)}[x]^2 + 134 f[x] f^{(6)}[x] \right) - 36 f[x]^2 f''[x]^3 \left(-552440 f^{(3)}[x]^2 f^{(4)}[x] + \right. \\
& 21 f[x] \left(11 f^{(5)}[x]^2 + 24 f^{(4)}[x] f^{(6)}[x] \right) + 509 f[x] f^{(3)}[x] f^{(7)}[x] \left. \right) - \\
& 189 f[x]^2 f''[x]^4 \left(-11975 f^{(4)}[x]^2 - 17278 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] + 8 f[x] f^{(8)}[x] \right) + \\
& 14 f[x]^2 f''[x]^2 \left(662540 f^{(3)}[x]^4 - 3240 f[x] f^{(4)}[x]^3 - 5784 f[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(6)}[x] + \right. \\
& f[x] f^{(3)}[x] \left(-14958 f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(9)}[x] \right) \left. \right) \left. \right) - \\
& 4 f'[x]^9 \left(75600 f''[x]^6 f^{(3)}[x] - 303912 f[x] f''[x]^5 f^{(5)}[x] + \right. \\
& 168 f[x]^2 f^{(3)}[x]^2 \left(1530 f^{(3)}[x]^3 + 27 f[x] f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + 10 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] \right) + \\
& 54 f[x] f''[x]^4 \left(-87150 f^{(3)}[x] f^{(4)}[x] + 337 f[x] f^{(7)}[x] \right) - \\
& 8 f[x]^2 f''[x] \left(-384125 f^{(3)}[x]^3 f^{(4)}[x] + 567 f[x] f^{(4)}[x]^2 f^{(5)}[x] + \right. \\
& 21 f[x] f^{(3)}[x] \left(33 f^{(5)}[x]^2 + 62 f^{(4)}[x] f^{(6)}[x] \right) + 516 f[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(7)}[x] \left. \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 63 f[x]^2 f''[x]^2 f^{(3)}[x] \left(-32465 f^{(4)}[x]^2 - 23372 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] + 16 f[x] f^{(8)}[x] \right) - \\
& 84 f[x] f''[x]^3 \left(105120 f^{(3)}[x]^3 - 3339 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] + \right. \\
& f[x] \left(-4140 f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(9)}[x] \right) \left. \right) + \\
& 8 f'[x]^{10} \left(7 f[x]^2 f^{(3)}[x]^2 \left(17085 f^{(4)}[x]^2 + 8152 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] \right) + \right. \\
& 7560 f''[x]^4 \left(3 f^{(3)}[x]^2 - f[x] f^{(6)}[x] \right) + 18 f[x] f''[x]^2 \left(-56490 f^{(3)}[x]^2 f^{(4)}[x] + \right. \\
& 21 f[x] \left(11 f^{(5)}[x]^2 + 24 f^{(4)}[x] f^{(6)}[x] \right) + 509 f[x] f^{(3)}[x] f^{(7)}[x] \left. \right) + \\
& 756 f[x] f''[x]^3 \left(-90 f^{(4)}[x]^2 - 246 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(8)}[x] \right) - \\
& 28 f[x] f''[x] \left(19160 f^{(3)}[x]^4 - 810 f[x] f^{(4)}[x]^3 - 1671 f[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(6)}[x] + \right. \\
& f[x] f^{(3)}[x] \left(-4104 f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(9)}[x] \right) \left. \right) \left. \right) - \\
& 16 f'[x]^{11} \left(2 f[x] \left(-21280 f^{(3)}[x]^3 f^{(4)}[x] + 567 f[x] f^{(4)}[x]^2 f^{(5)}[x] + \right. \right. \\
& 21 f[x] f^{(3)}[x] \left(33 f^{(5)}[x]^2 + 62 f^{(4)}[x] f^{(6)}[x] \right) + 516 f[x] f^{(3)}[x]^2 f^{(7)}[x] \left. \right) + \\
& 252 f[x] f''[x] f^{(3)}[x] \left(-90 f^{(4)}[x]^2 - 112 f^{(3)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(8)}[x] \right) + 21 f''[x]^2 \\
& \left. \left(140 f^{(3)}[x]^3 - 180 f[x] f^{(3)}[x] f^{(6)}[x] + f[x] \left(-162 f^{(4)}[x] f^{(5)}[x] + f[x] f^{(9)}[x] \right) \right) \right) \left. \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Out[]} = \frac{1}{16 f'[x]^{16}} \left(181440 f'[x]^8 f''[x]^8 - 302400 f'[x]^9 f''[x]^6 f^{(3)}[x] + \right.$$

$$181440 f'[x]^{10} f''[x]^4 f^{(3)}[x]^2 - 47040 f'[x]^{11} f''[x]^2 f^{(3)}[x]^3 + 4480 f'[x]^{12} f^{(3)}[x]^4$$