

**República Dominicana**  
**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)**  
**Universidad Patrimonio de la Comunidad**



**Facultad de Postgrado y Educación Continuada**  
**Departamento de Postgrado**

**Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en**  
**Matemáticas**

**Título**

Relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante el proceso  
de límite.

**Sustentante**

Frankely Escolastico Robles

**Asesor**

Dr. Víctor José Galán Céspedes

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

## **TÍTULO**

Relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante el proceso de límite.

## **Declaración de Autoría**

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

## **Título**

Relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante el proceso de límite.

Trabajo de Postgrado presentado por **Frankely Escolastico Robles** para optar por el título de Maestría en Matemáticas

## **Composición del tribunal**

**Dr. Manuel Aurelio Diloné**

Jurado de metodología

**MA. Nelson Sánchez Adames**

Jurado de Redacción

**MA. Wilson Lucilo Heredia Amparo**

Jurado de Contenido

**Lic. Yuderka Reyes**

---

Directora de Postgrado

**CALIFICACIÓN FINAL:**\_\_\_\_\_

# Índice general

|                                                                                                                      |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Agradecimientos .....                                                                                                | VI       |
| Dedicatorias.....                                                                                                    | VII      |
| Resumen.....                                                                                                         | VIII     |
| <b>CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.</b>                                                                                     | <b>1</b> |
| 1.1 Introducción. ....                                                                                               | 1        |
| 1.2 Antecedentes .....                                                                                               | 1        |
| 1.2.1 Antecedentes históricos de la sucesión de Fibonacci .....                                                      | 1        |
| 1.2.2 Antecedentes históricos del número áureo. ....                                                                 | 2        |
| 1.2.3 Antecedentes académicos .....                                                                                  | 4        |
| 1.3 Planteamiento del problema. ....                                                                                 | 5        |
| 1.4 Justificación. ....                                                                                              | 6        |
| 1.5 Objetivos. ....                                                                                                  | 7        |
| 1.5.1 General. ....                                                                                                  | 7        |
| 1.5.2 Específicos. ....                                                                                              | 7        |
| 1.6 Alcances y límites. ....                                                                                         | 8        |
| <b>CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.</b>                                                                               | <b>9</b> |
| 2.1 Introducción. ....                                                                                               | 9        |
| 2.2 Marco teórico. ....                                                                                              | 9        |
| 2.2.1 Fundamentos básicos de las sucesiones .....                                                                    | 9        |
| 2.2.2 Convergencia de una sucesión .....                                                                             | 9        |
| 2.2.3 Sucesión de Fibonacci .....                                                                                    | 12       |
| 2.2.4 Proporción áurea. ....                                                                                         | 18       |
| 2.3 Fundamentos para las demostraciones de la relación entre la sucesión<br>de Fibonacci y la proporción áurea ..... | 22       |
| 2.3.1 Preliminares algebraicos .....                                                                                 | 22       |
| 2.3.2 Fundamentos básicos de matrices .....                                                                          | 23       |
| 2.3.3 Ecuaciones en diferencias .....                                                                                | 25       |

|                                                                                                                                                      |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CAPÍTULO III. METODOLOGÍA</b>                                                                                                                     | <b>27</b> |
| 3.1 Introducción . . . . .                                                                                                                           | 27        |
| 3.2 Marco metodológico . . . . .                                                                                                                     | 27        |
| 3.2.1 Diseño . . . . .                                                                                                                               | 27        |
| 3.2.2 Método. . . . .                                                                                                                                | 27        |
| 3.2.3 Tipo. . . . .                                                                                                                                  | 27        |
| 3.2.4 Enfoque. . . . .                                                                                                                               | 28        |
| 3.2.5 Procedimientos. . . . .                                                                                                                        | 28        |
| <b>CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS</b>                                                                                                   | <b>30</b> |
| 4.1 Introducción . . . . .                                                                                                                           | 30        |
| 4.2 Convergencia de la sucesión de Fibonacci y el límite de la razón $F(n+1)/F(n)$ a medida que $n$ tiende a infinito . . . . .                      | 30        |
| 4.3 Caracterización de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante los procesos de límite . . . . .                                      | 35        |
| 4.4 Demostraciones algebraicas, matriciales y de ecuaciones en diferencias, de la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea. . . | 40        |
| 4.4.1 Método algebraico . . . . .                                                                                                                    | 40        |
| 4.4.2 Método matricial . . . . .                                                                                                                     | 42        |
| 4.4.3 Método de ecuación en diferencias . . . . .                                                                                                    | 43        |
| <b>CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS</b>                                                                                                | <b>45</b> |
| 5.1 Introducción . . . . .                                                                                                                           | 45        |
| 5.2 Análisis de los resultados . . . . .                                                                                                             | 45        |
| 5.3 Conclusiones . . . . .                                                                                                                           | 47        |
| 5.4 Líneas futuras de investigación . . . . .                                                                                                        | 48        |
| <b>Referencias</b>                                                                                                                                   | <b>49</b> |
| Anexos . . . . .                                                                                                                                     | 52        |

## **Agradecimientos.**

**A Dios;** por darme la fuerza necesaria para alcanzar este logro. Su inmenso amor ha sido mi luz en los momentos más difíciles de oscuridad y duda.

**A mi esposa Ana Miguelina de la Cruz;** quien siempre ha sido fuente inagotable de apoyo, aliento y amor incondicional. Su dedicación y sacrificio han sido el motor que me impulsó a perseverar en este largo camino académico. Gracias por creer en mí cuando dudé de mis propias habilidades.

**A mis padres y familiares;** quienes siempre han creído en mí y me han brindado su amor y apoyo inquebrantable. Gracias por ser mi fuerza y guía en cada paso que doy.

**A mis profesores;** gracias por su paciencia y por inspirarme a expandir mis horizontes intelectuales, por compartir sus conocimientos y experiencias conmigo. Cada enseñanza ha sido invaluable para mi crecimiento personal y profesional.

**A mi asesor de tesis Víctor José Galán;** por su guía, orientación y sabios consejos a lo largo de esta investigación. Su compromiso con la excelencia académica ha sido una inspiración constante.

**A mis amigos y compañeros de estudio:** Ramona Eridania, Eliana, Wilbert, Yadiri, Maritza y otros, quienes siempre estuvieron presente durante los grandes desafíos. Su amistad y apoyo hicieron este viaje mucho más significativo y llevadero.

## Dedicatorias

**A Dios:** Por ser mi guía y mi fuerte en este camino.

**A mi esposa e hija:** Por ser el motor que me inspiran a seguir adelante.

**A toda mi familia:** Porque siempre han apostado a mí en todo mi desarrollo profesional.

**A los maestros:** que han inspirado en mí el deseo de aprender y han despertado la curiosidad por explorar el mundo del conocimiento con su dedicación y pasión por la enseñanza.

República Dominicana  
**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)**  
Universidad Patrimonio de la Comunidad



**Facultad de Postgrado y Educación Continuada**

**Sustentante**

Frankely Escolastico Robles

**Asesor**

Dr. Víctor José Galán Céspedes

**RESUMEN**

Esta tesis presenta un análisis de la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea a través del límite de una sucesión, cuyos objetivos investigativos específicos se basaron en evaluar la convergencia de la sucesión de Fibonacci y el límite de la razón  $f(n+1)/f(n)$  a medida que  $n$  tiende a infinito, establecer caracterizaciones y demostrar de forma algebraica, matricial y en ecuaciones en diferencias, la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea.

La metodología utilizada se centró en un enfoque no experimental y transversal, que no altera deliberadamente las variables y se enfoca en la recolección de datos en un momento específico. Además, se aplicó el método analítico-deductivo, el razonamiento deductivo para derivar conclusiones a partir de los hallazgos y con un enfoque cualitativo.

Esta investigación concluye que existe una relación estrecha y significativa entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea ( $\phi$ ). Se ha establecido que la razón entre términos consecutivos de Fibonacci, expresada como  $f(n+1)/f(n)$ , converge hacia  $\phi$  a medida que  $n$  tiende al infinito. Esta convergencia no solo se observa en términos individuales de la sucesión, sino también en sumas más complejas de potencias de términos de Fibonacci. Además, se han empleado diversos métodos para profundizar en esta relación: una aproximación algebraica que reformula la recurrencia de Fibonacci, un método matricial que utiliza autovalores y autovectores de una matriz asociada a Fibonacci, y un enfoque de ecuaciones en diferencias.

**Palabras claves:** Sucesión de Fibonacci, Proporción áurea, Convergencia.

## CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN.

### 1.1. Introducción.

En este primer capítulo se presentan los antecedentes históricos y académicos que sirven de referentes investigativos, el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos, y los alcances y límites de la misma.

### 1.2. Antecedentes

#### 1.2.1. Antecedentes históricos de la sucesión de Fibonacci

Leonardo Pisano o Leonardo Filius Bonacci fue un matemático innovador en el siglo XIII. Pasó a la posteridad por la publicación de su célebre Liber Abacci donde entre otras cosas introdujo la numeración indu-árabe, libro que no fue superado hasta varios siglos después y que se siguió estudiado y ha sido fuente de inspiración matemática hasta la actualidad (Grigas, 2013).

De acuerdo con Scott y Marketos (2014), se plantea que los números de Fibonacci fueron presentados por primera vez en 1202 por Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci, en su libro Liber Abaci. Este libro se considera uno de los textos matemáticos más influyentes producidos en Europa en esa época. Los números de Fibonacci surgieron como solución a un problema planteado de la siguiente manera “Un hombre colocó un par de conejos en un lugar rodeado por todos lados por un muro. ¿Cuántas parejas de conejos se pueden obtener a partir de ese par en un año, suponiendo que cada mes cada pareja de conejos se reproduce y que la reproducción comienza a partir del segundo mes de vida de cada pareja?”. Esta pregunta condujo a la secuencia de números conocida como los números de Fibonacci, que ha demostrado tener numerosas aplicaciones en matemáticas y otros campos. La secuencia resultante es:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Fibonacci omitió el primer término en Liber Abaci. La fórmula de recurrencia para estos números es:

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad n > 1.$$

Aunque Fibonacci solo presentó la secuencia, evidentemente sabía que el  $n$ -ésimo número de su secuencia era la suma de los dos números anteriores.

### 1.2.2. Antecedentes históricos del número áureo.

En la antigüedad, el número áureo se descubrió como un concepto geométrico, no como una expresión aritmética. A lo largo de la historia este número, cuyo descubrimiento se debió a la geometría, ha recibido diversas denominaciones, haciendo referencia a su origen geométrico (razón, proporción), y a su relación con la belleza (áureo, dorado) y la divinidad (divino, de Dios). Se cree que el número áureo se encuentra como proporción en varias estelas de Babilonia y Asiria de alrededor del 2000 a.C. Sin embargo, no existe documentación histórica que acredite que dicho número fuera empleado de forma consciente en la elaboración de las estelas, por lo que no se sabe si la aparición del número áureo en la medición de las proporciones de dichas estelas fue intencionada o casual (Luque, 2022).

El primer estudio formal sobre el número áureo del que se tiene constancia (alrededor del 300 a.C.) se debe a Euclides, considerado el padre de la geometría. En su tratado “Los Elementos”, Euclides definió al número áureo de la siguiente manera “Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al segmento menor”. Además de esto, demostró también que este número no puede ser expresado o descrito como la razón de dos números enteros, es decir, que es un número irracional (Sánchez y Trumper, 2012).

En el Renacimiento, en 1509 el matemático y teólogo italiano Luca Pacioli publicó un libro titulado “La divina proporción”, en el que daba cinco razones por las que el número áureo debía considerarse divino:

- a) La unicidad del número, que se asemeja a Dios.
- b) El hecho de que esté definido por tres segmentos de una recta, que asemeja a la Trinidad.
- c) La inconmensurabilidad del número, igual que Dios es inconmensurable.
- d) Este número es omnipresente e invariable, igual que Dios.
- e) Dios dió ser al universo a través de la quintaesencia, representada por un dodecaedro, y el número áureo dio ser al dodecaedro.

Los estudios previos de Abu Kamil influyeron en Leonardo de Pisa (Fibonacci), que los empleó para resolver problemas geométricos, pero no llegó a conectarlos con la famosa secuencia que posteriormente fue nombrada en su honor. En 1525, Alberto Durero publicó unas instrucciones sobre la medida con regla y compás de figuras planas sólidas, donde describe cómo trazar la espiral basada en la proporción áurea, denominada espiral áurea o espiral de Durero (Luque, 2022).

La primera aproximación decimal al número áureo la consiguió Michael Maestlin en 1597, obteniendo un valor de 1.6180340. El primer uso conocido del adjetivo áureo, dorado o de oro para referirse a este número se debe al matemático alemán Martin Ohm, quien en la segunda edición de 1835 de su libro “Las matemáticas puras elementales”, escribe una nota indicando se acostumbra llamar a esta división de una línea arbitraria en dos partes como esas, la sección dorada. Esta referencia parece implicar que el término ya era de uso común en ese año. Actualmente el número áureo se designa con la letra phi ( $\Phi, \phi, \varphi$ ), desde que en 1910 el matemático Mark Barr le adjudicó esta denominación en honor al escultor griego Phidias, por el máximo valor estético atribuido a sus esculturas y porque se cree empleaba ya esta proporción en la antigüedad (Salvador, 2020).

### 1.2.3. Antecedentes académicos

Por su parte, Ferrando y Segura (2010), en su artículo “La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza”, destacan que existen varios grupos de investigación multidisciplinarios (formados por botánicos, físicos y matemáticos) muy activos trabajando en la filotaxis matemáticas, en donde la sucesión de Fibonacci es altamente utilizada.

De acuerdo con Figueroa et al. (2013), en la publicación titulada “La Secuencia de Fibonacci y el Número de Oro en ingeniería eléctrica y análisis numérico”, se pretendió desarrollar soluciones alternativas a dos diferentes problemas que contienen la razón áurea. Como conclusión, en un circuito eléctrico con infinitas resistencias óhmicas se presentó una solución inductiva mediante la secuencia de Fibonacci y se corroboró además el resultado usando fracciones continuas. Además, en la formulación newtoniana para el diseño de un cono truncado de mínima resistencia aerodinámica se propuso una solución numérica para probar la bondad del modelo.

Por su parte, Fiorenza y Vincenzi (2013) publicó un artículo llamado “De la sucesión de Fibonacci a la proporción áurea”, donde se trató la caracterización de la proporción áurea como límite de la razón de términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, y se da una explicación de esta propiedad en el marco de la teoría de las ecuaciones en diferencia.

En el estudio realizado por Van (2014), sobre “The Fibonacci sequence and the golden ratio in music”, se presenta una composición original basada en los números de Fibonacci para explorar el atractivo estético inherente de la sucesión de Fibonacci. También se menciona el uso de la proporción áurea en ciertas obras musicales de Debussy y en las proporciones de los violines creados por Stradivarius.

Córdoba (2015), realizó un estudio titulado “La sucesión de Fibonacci y su aplicación didáctica en las matemáticas de la educación secundaria”, donde se pretendió

plantear una forma de mejorar la percepción y la predisposición del alumnado hacia las Matemáticas en la Educación Secundaria. En este trabajo se acerca las Matemáticas al alumnado, a partir de la sucesión de Fibonacci, su relación con el número áureo, sus aplicaciones y curiosidades, tanto matemáticas como en otras áreas, de una forma atractiva e interdisciplinar.

Según Chavan y Suryawanshi (2020), en el artículo titulado “Correlación de la secuencia de Fibonacci y la proporción áurea con sus aplicaciones en ingeniería y ciencia”, se discute la correlación entre la secuencia de Fibonacci y la proporción áurea, así como sus aplicaciones en ingeniería y ciencia. Este estudio intentó aplicar el concepto de Fibonacci y la proporción áurea para maximizar la eficiencia de nuestra vida cotidiana. Se consideró la curva auto-similar, como la espiral dorada. Además, se plantea que las teorías matemáticas de los números de Fibonacci y la proporción áurea proporcionan el origen de muchas ideas nuevas en matemáticas, química, ingeniería civil, arquitectura, ingeniería automotriz, filosofía, botánica y biología, ingeniería eléctrica, ciencias de la computación e ingeniería, ingeniería mecánica, sistemas de comunicación, educación matemática, así como física teórica y física de partículas de alta energía.

### **1.3. Planteamiento del problema.**

Las propiedades recursivas de la sucesión de Fibonacci desempeñan un papel fundamental en la teoría de números y el álgebra, ya que puede utilizarse para explorar y demostrar numerosas identidades algebraicas y propiedades de los números, las cuales, a menudo se basan en su definición recursiva. En el campo del álgebra, la secuencia es utilizada para demostrar ciertos resultados en la teoría de anillos y cuerpos, además de su implicación en las ecuaciones en diferencias, un concepto que es crucial en matemáticas discretas y en el análisis de algoritmos.

Por su parte, la proporción áurea, denotada regularmente por  $\phi$ , es un número con propiedades matemáticas notables. Esta proporción tiene la especial característi-

ca de ser autosemejante, lo que significa que se repite a sí misma a diferentes escalas y que convierte al número áureo en una constante inherentemente recursiva, tanto en su representación algebraica como en terminos de una fracción continua.

En los últimos años, se ha observado un creciente interés en el estudio y la aplicación de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea debido a que estos dos conceptos tienen una presencia sorprendentemente amplia en el mundo que nos rodea. Desde los patrones de crecimiento en la naturaleza hasta la composición en el arte y la arquitectura, estas entidades matemáticas parecen regir aspectos fundamentales de nuestro universo. La conexión entre estos dos temas se destaca en las diversas áreas que los abarcan, revelando numerosas propiedades y teoremas que se desprenden de ellos. Es especialmente intrigante que al dividir un número por su anterior consecutivo en un proceso infinito, el resultado plantea una aproximación cada vez más cercana entre estos dos aspectos. Es por esto, que esta investigación concibe como pregunta general, ¿Cómo se relacionan la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea a través de los procesos de límite?

A los fines de dar respuesta a esta pregunta, se plantean las siguientes interrogantes específicas.

1. ¿Cómo evaluar la convergencia de la sucesión de Fibonacci y el límite de la razón  $f(n+1)/f(n)$  a medida que  $n$  tiende a infinito?
2. ¿Cuáles condiciones caracterizan la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante los procesos de límite?
3. ¿Cómo demostrar la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea utilizando métodos algebraicos, matriciales y de ecuaciones en diferencias?

#### **1.4. Justificación.**

Esta investigación es considerada de gran importancia porque tanto la sucesión de Fibonacci como la proporción áurea son conceptos matemáticos con propiedades

interesantes y que a la vez, modelan el comportamiento de muchos patrones existentes en la naturaleza.

Esta investigación es relevante porque aunque es conocido que el cociente de dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende a la proporción áurea en el límite, existen aspectos de esta convergencia y su relación inherente que es preciso evaluar y caracterizar en términos de proporcionar una comprensión más profunda de las propiedades de estas entidades matemáticas y de cómo interactúan entre sí. Además, el estudio de la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea a través del límite de una sucesión puede tener importantes implicaciones prácticas, que van desde el análisis de algoritmos en ciencias de la computación hasta el modelado de patrones de crecimiento en biología.

Este estudio ha de servir de base a futuras líneas de investigaciones, debido a que es un tema poco estudiado en el contexto de la República Dominicana, y así puedan ser aplicados para solución de problemas concretos de la modelación matemática, y la realización de algoritmos informáticos.

## **1.5. Objetivos.**

### **1.5.1. General.**

Analizar la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea a través del límite de una sucesión.

### **1.5.2. Específicos.**

1. Evaluar la convergencia de la sucesión de Fibonacci y el límite de la razón  $f(n+1)/f(n)$  a medida que  $n$  tiende a infinito.
2. Establecer caracterizaciones de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante los procesos de límite.
3. Demostrar mediante métodos algebraicos, matriciales y de ecuaciones en diferencias, la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea.

### **1.6. Alcances y límites.**

Esta investigación se enmarcó dentro de las matemáticas puras y estuvo centrada en el estudio de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea, con énfasis en las propiedades algebraicas de estas dos entidades matemáticas. Esto implica que se centró más en caracterizaciones y demostraciones, que las posibles aplicaciones prácticas que se pudieran generar en diversas disciplinas.

## CAPÍTULO II

### MARCO REFERENCIAL.

#### 2.1. Introducción.

En este capítulo se plantean las definiciones, proposiciones, teoremas y algunas demostraciones que sirven de soporte y referente conceptual de esta investigación.

#### 2.2. Marco teórico.

##### 2.2.1. Fundamentos básicos de las sucesiones

**Definición 2.1** Una sucesión es una función  $f$  cuyo dominio son casi todos los enteros positivos. Si el recorrido es un subconjunto de los números reales,  $f$  se dice una sucesión real y si el recorrido es un subconjunto de los números complejos,  $f$  se dice una sucesión compleja. El  $n$ -ésimo término de la sucesión  $f$ , se denotará por  $f_n$  o en forma sucinta por  $a_n$  y la sucesión misma por  $a_n$  ó  $f_n$  (Salazar y Acevedo 1997).

**Definición 2.2** Si a cada entero positivo  $n$ , está asociado un número real  $a_n$ , se dice que el conjunto ordenado  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  es una sucesión. Los términos de la sucesión son los números  $a_1, a_2, a_3, a_4$  y así hablaremos del primer término  $a_1$ , del segundo término  $a_2$  y en general del  $n$ -ésimo término  $a_n$ . Cada término  $a_n$  tiene un siguiente  $a_{n+1}$ , si la sucesión es infinita no existe un ultimo término (Acevedo, 2014).

**Definición 2.3** Se dice que una sucesión  $a_n$  es creciente si  $a_n \leq a_{n+1}$  para todo  $n \geq 1$ , con  $n$  perteneciente al conjunto de los números naturales (Acevedo, 2014).

**Definición 2.4** Una sucesión es infinita si se cumple que para cada entero positivo  $n$ , está asociado un número Real  $a_n$ , y el conjunto ordenado  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ , es decir, para cada término  $a_n$  tiene un siguiente  $a_{n+1}$ .

##### 2.2.2. Convergencia de una sucesión

**Definición 2.5** Según Amillo (1996), una sucesión  $(a_n)$  tiene limite  $L$  si para cada  $\epsilon > 0$  existe un número  $N > 0$  tal que para todo índice  $n > N$  se verifica

$$|a_n - L| < \epsilon.$$

En este caso se escribe

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L.$$

**Definición 2.6** Una sucesión convergente es aquella que tiene límite, es decir, una sucesión  $a_n$  es convergente si el siguiente límite existe;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Amillo (1996) señala que en lo que concierne a la convergencia o divergencia de una sucesión los primeros términos no tienen importancia. Lo que cuenta es el comportamiento de las colas de una sucesión. Por cola de una sucesión se designa a todos los términos de la misma cuyos índices son mayores que un número entero  $N > 0$ , i.e. el conjunto  $a_n/n > N$ . Otra forma de expresar que una sucesión  $(a_n)$  converge a  $L$  es decir que para cada  $\epsilon > 0$  el intervalo  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$  contiene todos los términos de la sucesión salvo un número finito de ellos.

A continuación, se muestran algunas propiedades útiles para el cálculo y análisis de límites, cuya información puede ser consultada y profundizada en Pérez (2016).

**Teorema 2.1** Si una sucesión es convergente, su límite es único.

**Teorema 2.2** Sean  $(a_n)$  y  $(b_n)$  dos sucesiones tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B$$

y  $\alpha$  y  $\beta$  números reales cualesquiera. Entonces,

1) Linealidad

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B$$

2) Regla del producto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = AB$$

3) Regla del producto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$$

siempre que  $B \neq 0$ .

**Teorema 2.3** (Regla del Sandwich). Sean  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  y  $(c_n)$  tres sucesiones tales que  $a_n \leq c_n \leq b_n$  para todo  $n$  (o para todo  $n > N$  siendo  $N$  un entero positivo cualquiera) y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L.$$

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = L$$

**Teorema 2.4** Sea  $(a_n)$  una sucesión con límite  $L$  y  $f$  una función real continua en  $L$  y cuyo dominio contiene los valores de la sucesión. Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(L)$$

**Definición 2.7** Una sucesión  $(a_n)$  es acotada superiormente si existe un  $B$  tal que  $a_n \leq B$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dicha sucesión está acotada inferiormente si existe un  $b$  tal que  $a_n \geq b$  para todo  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Una sucesión es acotada si está acotada superiormente e inferiormente a la vez (Amillo, 1996).

**Teorema 2.5** Toda sucesión convergente es acotada. O lo que es equivalente, toda sucesión no acotada es divergente (Amillo, 1996).

**Teorema 2.6** Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. De forma similar toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente es convergente (Amillo, 1996).

### 2.2.3. Sucesión de Fibonacci

**Definición 2.8** De acuerdo con Clancy (2008), el término de números de Fibonacci se utiliza para describir la serie de números generados por el patrón

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

donde cada número de la secuencia se obtiene mediante la suma de los dos términos anteriores. Este patrón se define como  $F_1 = 0, F_2 = 1$  y la fórmula recursiva

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2$$

donde  $F_n$  representa el  $n$ -ésimo número de Fibonacci. Por lo tanto, el número de Fibonacci  $F_n$  se obtiene sumando el número de Fibonacci anterior  $F_{n-1}$  y el número de Fibonacci dos lugares antes  $F_{n-2}$ .

**Definición 2.9** La sucesión de Fibonacci es una función  $F : N \rightarrow N$  donde cada elemento siguiente se obtiene sumando el anterior consecutivo, está definida por;  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  (Domínguez, 1990).

#### 2.2.3.1. Propiedades básicas de los números de Fibonacci

En este apartado se presentan varias propiedades que relacionan los números de Fibonacci, las cuales pueden ser consultadas, conjuntamente con sus demostraciones en Vorobiev (2002).

**Proposición 2.2.1** La suma de los primeros  $n$  números de Fibonacci se puede expresar como

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$$

Demostración. A partir de la definición de la secuencia de Fibonacci, se sabe que

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_3 - F_2, \\
 F_2 &= F_4 - F_3, \\
 F_3 &= F_5 - F_4, \\
 &\vdots \\
 F_{n-1} &= F_{n+1} - F_{n+2}, \\
 F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Ahora sumando estas ecuaciones, se tiene

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2.$$

Recordando que  $F_2 = 1$ , esta ecuación es equivalente a la conjetura inicial:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1.$$

**Proposición 2.2.2** La suma de los términos impares de la secuencia de Fibonacci

$$F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Demostración. Al observar los términos individuales, se nota que a partir de la definición de la secuencia que

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_2, \\
 F_3 &= F_4 - F_2, \\
 F_5 &= F_6 - F_4, \\
 &\vdots \\
 F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}.
 \end{aligned}$$

Si ahora se suman estas ecuaciones término a término, queda el resultado requerido.

**Proposición 2.2.3** La suma de los términos pares de la secuencia de Fibonacci

$$F_2 + F_4 + F_6 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Demostración. A partir de la proposición (2.2.2), se tiene

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1.$$

Restando la ecuación para la suma de los términos impares, se obtiene

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$$

como se deseaba.

**Proposición 2.2.4** La suma de los números de Fibonacci con signos alternantes se puede expresar como

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1.$$

Demostración. Progresando desde los resultados obtenidos en las sumas anteriores, se puede restar la ecuación de la suma de los términos pares a la ecuación de la suma de los términos impares para encontrar

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1. \quad (2.1)$$

Luego, sumando  $F_{2n+1}$  a ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots - F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+1} - F_{2n-1} + 1,$$

o

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots - F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n} + 1. \quad (2.2)$$

Al combinar las ecuaciones (2.1) y (2.2), se llega a la suma de los números de

Fibonacci con signos alternantes:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1} F_n = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1.$$

Hasta ahora, se han sumado los términos individuales de ecuaciones simples para derivar proposiciones relacionadas con las sumas de los números de Fibonacci. Ahora se utilizará una técnica similar para encontrar la fórmula de la suma de los cuadrados de los primeros  $n$  números de Fibonacci.

**Proposición 2.2.5** La suma de los cuadrados de los primeros  $n$  números de Fibonacci se puede expresar como

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Demostración. Se observa que

$$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k^2.$$

Si se suman las ecuaciones

$$F_1^2 = F_1 F_2,$$

$$F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2,$$

$$F_3^2 = F_3 F_4 - F_2 F_3,$$

$$\vdots$$

$$F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$$

término a término, se llega a la fórmula deseada.

Aquí se utilizó principalmente el argumento de sumar término a término para encontrar fórmulas de las sumas de los números de Fibonacci. Ahora se utilizará el método de inducción para demostrar la siguiente fórmula importante.

**Proposición 2.2.6** La fórmula para el enésimo término de la secuencia de Fibonacci con un desplazamiento  $m$  se puede expresar como

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}.$$

Demostración. Se comenzará esta demostración mediante inducción en  $m$ . Para  $m = 1$ ,

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_{n-1} + F_n \\ &= F_{n-1}F_1 + F_nF_2, \end{aligned}$$

lo cual se puede ver que cumple con la fórmula. La ecuación para  $m = 2$  también cumple con la fórmula, ya que

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\ &= F_{n-1} + F_n + F_n \\ &= F_{n-1} + 2F_n \\ &= F_{n-1}F_2 + F_nF_3. \end{aligned}$$

Así, se ha demostrado la base de inducción. Ahora se supone que la fórmula es cierta para  $m = k$  y para  $m = k + 1$ . Se demostrará que también se cumple para  $m = k + 2$ .

Por lo tanto, mediante inducción, se asume que

$$F_{n+k} = F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1}$$

y

$$F_{n+k+1} = F_{n-1}F_{k+1} + F_nF_{k+2}.$$

Si se suman estas dos ecuaciones término a término, se obtiene

$$F_{n+k} + F_{n+k+1} = F_{n-1}(F_k + F_{k+1}) + F_n(F_{k+1} + F_{k+2})$$

$$F_{n+k+2} = F_{n-1}F_{k+2} + F_nF_{k+3},$$

que es el resultado deseado. Por lo tanto, mediante inducción se ha demostrado que la fórmula inicial es válida para  $m = k + 2$  y, por lo tanto, para todos los valores de  $m$ .

**Proposición 2.2.7** La diferencia de los cuadrados de los números de Fibonacci se puede expresar como

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

Demostración. Continuando desde la fórmula anterior, se toma  $m = n$ . Se obtiene

$$F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1},$$

o

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}).$$

Dado que

$$F_n = F_{n+1} - F_{n-1},$$

ahora se puede reescribir la fórmula de la siguiente manera:

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1}),$$

o

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

De esta manera, se puede concluir que para dos números de Fibonacci cuyas posiciones en la secuencia difieren en dos, la diferencia de los cuadrados será nuevamente un número de Fibonacci.

### 2.2.3.2. Otras propiedades.

1. El  $n$ -ésimo número de Fibonacci está dado por (Fórmula de Binet)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

2. Dados cuatro números de Fibonacci consecutivos, la diferencia de cuadrados

entre el tercero y el segundo es igual al producto del primero con el cuarto, es decir

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}$$

3. Una relación entre  $\pi$  y los números de Fibonacci, está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$$

4. La siguiente ecuación relaciona los números de Fibonacci, con tal vez los números más especiales de las matemáticas  $\pi, i, e$ :

$$F_k = \sum_{m=1}^k 5^{\frac{k-m}{2}} e^{i(m-1)\frac{\pi}{2} + i(k-m)\tan^{-1}(-2)} \begin{pmatrix} 2k-m \\ m-1 \end{pmatrix}$$

#### 2.2.4. Proporción áurea.

##### 2.2.4.1. Razones y proporciones: Fundamentos básicos.

**Definición 2.10** Sean  $a$  y  $b$  dos cantidades. Una razón entre  $a$  y  $b$  es:  $a : b$  denotada también  $\frac{a}{b}$ , y se lee  $a$  es a  $b$ . Una razón entre dos magnitudes es una comparación entre las dos cantidades mediante una división entre dichas cantidades (Andonegui, 2006).

**Definición 2.11** De acuerdo con Fernández et al.,(2009), una proporción es una igualdad entre dos razones. Sean  $a, b, c$  y  $d$  cuatro cantidades. La igualdad  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  se denomina proporción. Se lee:  $a$  es a  $b$  como  $c$  es a  $d$ .

**Proposición 2.2.8** Propiedades de las proporciones.

$$1. \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

De aquí se desprende que un extremo es igual al producto de los medios dividido entre el otro extremo, y que un medio es igual al producto de los extremos dividido entre el otro medio:

$$a = \frac{b \cdot c}{d}, d = \frac{b \cdot c}{a}, b = \frac{a \cdot d}{c}, c = \frac{a \cdot d}{b}$$

2. De toda proporción  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , o de su expresión equivalente  $a \cdot d = b \cdot c$ , pueden derivarse otras tres proporciones diferentes:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{b}{a} = \frac{d}{c}, \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$$

3. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces  $\frac{m \cdot a}{n \cdot b} = \frac{m \cdot c}{n \cdot d}$

4. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  y  $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ , entonces  $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

5. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  y  $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$

6. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  y  $a > b$ , entonces  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  y  $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$

7. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  y  $a > b$ , entonces  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

8. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , entonces  $\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$  y  $\frac{a+c}{a} = \frac{b+d}{b}$

9. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  y  $a > c$ , entonces  $\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$  y  $\frac{a-c}{a} = \frac{b-d}{b}$

10. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  y  $a > c$ , entonces  $\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}$

11. Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ , entonces  $\frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$

#### 2.2.4.2. Proporción áurea

**Definición 2.12** En matemáticas, dos cantidades están en la proporción áurea si su cociente es igual al cociente de su suma con respecto a la cantidad más grande (Ghorbani, 2021). Expresado algebraicamente, para las cantidades  $a$  y  $b$  con  $a > b > 0$ :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi \quad (2.3)$$

o

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \quad (2.4)$$

donde la letra griega phi ( $\phi$  ó  $\phi$ ) representa la proporción áurea. Es un número irracional (lo que significa que no se puede expresar como una fracción simple), con

un valor de:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887$$

Otra relación interesante que involucra la proporción áurea se puede obtener directamente de:

$$\varphi = \sqrt{1 + \varphi}$$

sustituyendo sucesivamente el lado izquierdo de la ecuación en el lado derecho, se obtiene:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

De manera similar, al reemplazar  $x = \frac{1}{\varphi}$  en la ecuación (2.4), se obtiene la ecuación cuadrática  $x^2 + x - 1 = 0$ , cuya raíz positiva es  $\frac{1}{\varphi}$ , es decir,

$$\frac{1}{\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{\varphi}} = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}}$$

Nuevamente, se puede obtener otra relación utilizando  $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi}} = \dots$  repetidamente, lo que nos lleva a que la proporción áurea está relacionada con la siguiente fracción continua:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Otra combinación de raíz cuadrada anidada y fracción continua para  $\varphi$  se deriva de la fórmula  $\varphi = \sqrt{1 + \varphi} = \sqrt{2 + \frac{1}{\varphi}}$ , lo cual resulta en:

$$\varphi = \sqrt{2 + \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{1}{\sqrt{2 + \dots}}}}}$$

Además, cualquier potencia de  $\varphi$  es igual a la suma de las dos potencias inmediatamente anteriores:

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$$

A continuación, se utiliza la relación  $\varphi^2 = \varphi + 1$  para inspeccionar las potencias

sucesivas de  $\varphi$  escribiéndolas en sus componentes de la siguiente manera.

$$\varphi^3 = \varphi\varphi^2 = \varphi(\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = (\varphi + 1) + \varphi = 2\varphi + 1$$

$$\varphi^4 = \varphi^2\varphi^2 = (\varphi + 1)(\varphi + 1) = \varphi^2 + 2\varphi + 1 = (\varphi + 1) + 2\varphi + 1 = 3\varphi + 2$$

$$\varphi^5 = \varphi^3\varphi^2 = (2\varphi + 1)(\varphi + 1) = 2\varphi^2 + 3\varphi + 1 = 2(\varphi + 1) + 3\varphi + 1 = 5\varphi + 3$$

$$\varphi^6 = \varphi^3\varphi^3 = (2\varphi + 1)(2\varphi + 1) = 4\varphi^2 + 4\varphi + 1 = 4(\varphi + 1) + 4\varphi + 1 = 8\varphi + 5$$

$$\varphi^7 = \varphi^4\varphi^3 = (3\varphi + 2)(2\varphi + 1) = 6\varphi^2 + 7\varphi + 2 = 6(\varphi + 1) + 7\varphi + 1 = 13\varphi + 8$$

y así sucesivamente. A este punto, se debería poder ver un patrón a medida que se toman potencias adicionales de  $\varphi$ . De hecho, el resultado final de cada potencia de  $\varphi$  es igual a un múltiplo de  $\varphi$  más una constante, en una forma lineal  $\varphi^n = a_n\varphi + a_{n-1}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , donde  $a_n$  y  $a_{n-1}$  son enteros especiales conocidos como números de Fibonacci (Posamentier y Lehmann, 2007). Aplicar este patrón permite escribir simplemente las potencias adicionales de  $\varphi$ , por ejemplo,  $\varphi^8 = 21\varphi + 13$  y  $\varphi^9 = 34\varphi + 21$ .

Una ecuación recursiva similar también debe cumplirse para la otra raíz de  $\varphi^2 = (\varphi + 1)$ , es decir,  $\chi = 1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , que se expresa como  $\chi^n = a_n\chi + a_{n-1}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Resolviendo estas dos ecuaciones para  $a_n$ , se obtiene:

$$a_n = \frac{\varphi^n - \chi^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Esta relación es principalmente de interés teórico (Kilic, 2008) y se conoce como la fórmula de Binet, en honor al matemático francés Jacques Philippe Marie Binet. La fórmula permite encontrar el valor de cualquier número en la secuencia de Fibonacci  $\{a_n\}$ .

**Proposición 2.2.9** Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \varphi^n &= a_n\varphi + a_{n-1}, \\ (\varphi - 1)^n &= a_{-n}\varphi + a_{-n-1}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Proposición 2.2.10** Se cumple la siguiente relación:

$$a_n = \frac{1}{2\varphi - 1} \{\varphi^n - (1 - \varphi)^n\}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

**Proposición 2.2.11** Se cumplen las siguientes relaciones:

$$(I) \quad \frac{\varphi}{1} = \frac{1 + \varphi}{\varphi} = \frac{1 + 2\varphi}{1 + \varphi} = \frac{2 + 3\varphi}{1 + 2\varphi} = \frac{3 + 5\varphi}{2 + 3\varphi} = \dots = \frac{a_n + a_{n+1}\varphi}{a_{n-1} + a_n\varphi} \approx 1.61803,$$

$$(II) \quad \frac{a_n + a_{n+1}\varphi}{a_{n-1} + a_n\varphi} = \dots = \frac{2\varphi - 3}{5 - 3\varphi} = \frac{2 - \varphi}{2\varphi - 3} = \frac{\varphi - 1}{2\varphi} = \frac{1}{\varphi - 1} = \frac{\varphi}{1},$$

$$(III) \quad \frac{0.236}{0.146} \approx \frac{0.382}{0.236} \approx \frac{0.618}{0.382} \approx \frac{1}{0.618} \approx \frac{1.618}{1} \approx \frac{2618}{1618} \approx \frac{4236}{2618} \approx \dots \approx 1.618.$$

### 2.3. Fundamentos para las demostraciones de la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea

En este apartado se proporciona el referente conceptual de las demostraciones algebraica, matricial y de ecuaciones en diferencias, realizadas en la presentación de resultados de esta investigación.

#### 2.3.1. Preliminares algebraicos

**Definición 2.13** Una ecuación algebraica de grado  $n$  es una expresión matemática de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde  $x$  es la variable incógnita y los coeficientes  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  son constantes reales o complejas. El grado de la ecuación es  $n$ , que es el mayor exponente de  $x$  en la ecuación (Cox et al., 2013).

**Definición 2.14** Según Larson (2016), un sistema de  $m$  ecuaciones lineales en  $n$  variables es un conjunto de  $m$  ecuaciones, cada una de las cuales es lineal en las mismas  $n$  variables:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3, \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}$$

**Definición 2.15** La solución de un sistema de ecuaciones lineales es una sucesión de números  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  que es solución de cada una de las ecuaciones lineales del sistema (Larson, 2016).

### 2.3.2. Fundamentos básicos de matrices

**Definición 2.16** Según Merino (2021), dado un cuerpo  $F$ , una matriz de orden  $m \times n$  con coeficientes en  $F$  es un arreglo de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Constituida por  $mn$  elementos de  $F$  distribuidos en  $m$  filas y  $n$  columnas, de forma que denotamos por  $a_{ij}$  al elemento situado en la fila  $i$ , columna  $j$ . De forma reducida se expresa:

$$A = (a_{ij})_{i,j}$$

**Teorema 2.7** En Larson (2016), se presentan las siguientes propiedades de la multiplicación de matrices. Si  $A, B$  y  $C$  son matrices (con tamaños tales que los productos matriciales dados están definidos) y  $c$  es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

- $A(BC) = (AB)C$  Propiedad asociativa de la multiplicación
- $A(B + C) = AB + AC$  Propiedad distributiva izquierda

- $(A + B)C = AC + BC$  Propiedad distributiva derecha
- $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

**Definición 2.17** Una matriz  $A$  de  $n \times n$  es invertible (o no singular) si existe una matriz  $B$  de  $n \times n$  tal que

$$AB = BA = I_n$$

donde  $I_n$  es la matriz identidad de orden  $n$ . La matriz  $B$  se denomina inversa (multiplicativa) de  $A$ . La matriz  $A$  que no tiene una inversa se denomina no invertible (o singular).

**Teorema 2.8** Si  $A$  es una matriz invertible, entonces su inversa es única. La inversa de  $A$  se denota por  $A^{-1}$ .

**Teorema 2.9** Si  $A$  es una matriz invertible,  $k$  es un entero positivo y  $c$  es un escalar diferente de cero, entonces  $A^{-1}$ ,  $A^k$ ,  $cA$  y  $A^T$  son invertibles y se cumple lo siguiente.

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$
2.  $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
3.  $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$
4.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

**Teorema 2.10** Si  $A$  y  $B$  son dos matrices invertibles de tamaño  $n$ , entonces  $AB$  es invertible y se cumple que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**Definición 2.18** Valor característico y vector característico. Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  con componentes reales. El número  $\lambda$  (real o complejo) se denomina valor característico de  $A$  si existe un vector diferente de cero  $v$  en  $\mathbb{C}^n$  (conjunto complejo de  $n$  dimensiones) tal que

$$Av = \lambda v$$

El vector  $v \neq 0$  se denomina vector característico de  $A$  correspondiente al valor característico  $\lambda$ . El número  $\lambda$  puede ser real o complejo, y el vector  $v$  puede tener componentes reales o complejos (Kolman y Hill, 2006).

**Definición 2.19** Ecuación característica y polinomio característico. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de  $n \times n$  y  $\lambda$  el valor característico. El determinante

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es el polinomio característico de  $A$ . La ecuación

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

Es la ecuación característica de  $A$  (Kolman y Hill, 2006).

**Teorema 2.11** Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ . Entonces  $\lambda$  es un valor característico de  $A$  si y sólo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

### 2.3.3. Ecuaciones en diferencias

**Definición 2.20** Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes (Zill, 2012).

**Definición 2.21** El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es el orden de la mayor derivada en la ecuación (Zill, 2012).

**Definición 2.22** De acuerdo con Contreras (2020), se llama ecuación en diferencias (e.d.) a toda expresión de la forma

$$F(t, y(t), y(t+1), \dots, y(t+n), \dots) = 0$$

**Definición 2.23** Según Contreras (2020), se denomina orden de una e.d. a la diferencia entre el operador diferencia mayor y menor que aparezcan en la ecuación, es decir,  $t + n - t = n$

**Definición 2.24** Se le llama solución de una e.d. a toda sucesión  $\{y(0), y(1), \dots, y(t), \dots\}$  que la satisfaga (Contreras, 2020).

**Definición 2.25** La solución general de una e.d. es el conjunto de todas las soluciones, que tendrá tantos parámetros como orden tenga la ecuación. La determinación de estos parámetros, a partir de unas condiciones iniciales, proporciona las distintas soluciones particulares (Contreras, 2020).

**Definición 2.26** Cascales (2014) plantea que una ecuación en diferencias lineal de orden  $n$  es toda expresión de la forma

$$y(t+n) + a_1(t)y(t+n-1) + \dots + a_{n-1}(t)y(t+1) + a_n(t)y(t) = b(t) \quad \text{con} \quad a_n(t) \neq 0$$

**Proposición 2.3.1** Las e.d. lineales se pueden clasificar en:

1. Homogéneas si  $b(t) = 0$
2. Completas si  $b(t) \neq 0$
3. De coeficientes constantes si  $a_i(t) = a_i \quad \forall i$
4. De coeficientes no constante si  $a_i(t) \neq a_i$  para algún  $i$ .

## **CAPÍTULO III METODOLOGÍA**

### **3.1. Introducción**

En este capítulo, se presentan los fundamentos metodológicos de esta propuesta investigativa, los cuales engloban el diseño adoptado, el método, el tipo de investigación, el enfoque utilizado y los procesos realizados.

### **3.2. Marco metodológico**

#### **3.2.1. Diseño**

Este estudio estuvo basado en un diseño no experimental, que de acuerdo a Hernández et al. (2018), las variables no se modifican de manera deliberada o son manipuladas según el criterio del autor. En términos de la duración del estudio, fue transversal, ya que implicó la recolección de datos en un instante específico.

#### **3.2.2. Método.**

Este estudio se fundamentó en la aplicación del método analítico-deductivo, es analítica ya que estableció una comparación y relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante los procesos de límite, y como bien lo define Espinoza (2020), el método analítico es una técnica de investigación que implica descomponer un todo en sus partes constituyentes con el fin de examinar su naturaleza. Se empleó un razonamiento deductivo que permitió derivar conclusiones significativas a partir de los hallazgos, facilitando así la verificación de los objetivos que se proponen en esta investigación (Sabino, 2014).

#### **3.2.3. Tipo.**

De acuerdo a las características, esta investigación es de tipo exploratoria, explicativa y descriptiva. Es exploratoria ya que se examinó y recopiló datos de diferentes fuentes, para posteriormente analizarlos y presentarlos para comprender su estructura y aplicabilidad. Es explicativa porque se centró en identificar y en comprender

las relaciones entre variables al determinar cómo interactúan entre sí. Es descriptiva porque implicó detallar y presentar datos tal como son, sin influir en ellos o buscar relaciones causales. (Ramos-Galarza, 2020).

#### **3.2.4. Enfoque.**

El enfoque que se empleó en esta tesis se basó en un enfoque cualitativo, porque unificó la sucesión de Fibonacci y proporción áurea, mediante definiciones, proposiciones, teoremas y demostraciones matemáticas de carácter no necesariamente numéricos (Babativa, 2017).

#### **3.2.5. Procedimientos.**

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso realizado para la entrega de este proyecto:

1. Se realizó la solicitud de aprobación del tema de investigación y su correspondiente defensa preliminar.
2. Se consultó en múltiples fuentes acerca de los fundamentos, antecedentes y referente conceptual de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea.
3. Se redactaron los capítulos I, II y III correspondientes al anteproyecto requerido.
4. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
5. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, para la evaluación de los jurados y examinar la redacción, el contenido y su correspondencia con la metodología.
6. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología, en coordinación con el asesor.
7. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.

8. Se entregó nuevamente tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada con el borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.
9. Luego de esto, se integrarán al trabajo las observaciones realizadas por los jurados para su posterior entrega definitiva a la Universidad.

## CAPÍTULO IV

### PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

#### 4.1. Introducción

La secuencia de Fibonacci  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  se define mediante la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

También se llama a  $F_n$  el número de Fibonacci. En los siguientes apartados se analiza su término general en relación a la expresión:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (4.2)$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

Además, definiendo  $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ , entonces la secuencia  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  se ha de evaluar que este límite  $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  es la razón Áurea.

#### 4.2. Convergencia de la sucesión de Fibonacci y el límite de la razón $F(n+1)/F(n)$ a medida que $n$ tiende a infinito

Este apartado muestra algunos resultados que permiten establecer y evaluar la convergencia de la sucesión de Fibonacci, relacionándolo con el número áureo.

**Proposición 4.2.1** La razón  $\frac{F_n}{F_{n-1}}$  se aproxima al número áureo  $\phi$  a medida que  $n$  aumenta.

Prueba. Desde el comienzo mismo de la secuencia de Fibonacci, se nota que la razón  $\frac{F_n}{F_{n-1}}$  oscila alrededor de  $\phi = 1.6180 \dots$ , acercándose más y más al número áureo:

Es fácil ver por qué esto es cierto, tomando un enfoque recursivo. Utilizando la definición del  $n$ -ésimo número de Fibonacci, se puede reescribir esta razón como

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}. \quad (4.3)$$

Por el mismo principio exacto, se puede reescribir

| $n$ | $F_{n+1}/F_n$ | Valor  |
|-----|---------------|--------|
| 1   | 1/1           | 1.0000 |
| 2   | 2/1           | 2.0000 |
| 3   | 3/2           | 1.5000 |
| 4   | 5/3           | 1.6667 |
| 5   | 8/5           | 1.6000 |
| 6   | 13/8          | 1.6250 |
| 7   | 21/13         | 1.6154 |
| 8   | 34/21         | 1.6190 |
| 9   | 55/34         | 1.6176 |
| 10  | 89/55         | 1.6182 |

Cuadro 4.1: Razones de números consecutivos de Fibonacci

$$\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}}}.$$

Y así sucesivamente, y sustituyendo estas unas por otras para  $\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}$  en el lado derecho de la ecuación (4.3),

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-2}}{F_{n-3}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{F_{n-3}}{F_{n-4}}}}} = \dots$$

de donde

$$\frac{F_{n'}}{F_{n'-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots + \frac{1}{1 + \frac{1}{F_1/F_0}}}}}, \quad (4.4)$$

donde el último coeficiente a la derecha es 1 porque  $F_1/F_0 = 1$ . Notando que la fracción continua en el lado derecho se alarga cada vez más a medida que  $n$  aumenta (el número de coeficientes aumenta proporcionalmente), entonces a medida que  $n$  se aproxima a infinito la fracción continua en (4.4) se acerca más y más a la fracción continua infinita, la cual es igual a  $\phi$ .  $\square$

**Teorema 4.1** Sea  $F_n$  la sucesión de Fibonacci y  $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (4.5)$$

Demostración. Por el teorema de Weierstrass-Bolzano, se tiene que

$$x_1 = \frac{F_2}{F_1} = 1, \quad x_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_n} \quad (4.6)$$

para  $n \in \mathbb{N}$ . Dado que la secuencia  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una secuencia positiva creciente, entonces  $1 \leq x_{n+1} \leq 2$  para  $n \in \mathbb{N}$ .

A partir de (4.6), se sigue que

$$x_{n+1} - x_n = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) = -\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n x_{n-1}}.$$

Por lo tanto,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  no es monótona. Usando la fórmula (4.6) nuevamente, se obtiene

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 1 + \frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_n}} = \frac{2x_n + 1}{1 + x_n}. \\ x_{n+2} - x_n &= \frac{2x_n + 1}{1 + x_n} - \frac{2x_{n-2} + 1}{1 + x_{n-2}} = \frac{x_n - x_{n-2}}{(x_n + 1)(x_{n-2} + 1)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Dado que  $(x_n + 1)(x_{n-2} + 1) > 0$ , entonces  $(x_{n+2} - x_n)(x_n - x_{n-2}) \geq 0$ . Esto implica que las secuencias  $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$  son todas monótonas. De hecho, mediante inducción, se puede demostrar que  $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$  es creciente y  $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$  es decreciente.

La subsecuencia  $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$  son todas monótonas y acotadas, por lo que todas convergen. Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = A$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = B$ . Mediante cálculos directos, a partir de (4.7), se tiene

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2x_{2k-1} + 1}{x_{2k-1} + 1} = \frac{2A + 1}{A + 1}, \quad (4.8)$$

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2x_{2k} + 1}{x_{2k} + 1} = \frac{2B + 1}{B + 1}. \quad (4.9)$$

En el intervalo  $[1, 2]$ , se obtiene que  $A = B = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  resolviendo las ecuaciones (4.8) y (4.9). Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , lo cual concluye la demostración.  $\square$

**Teorema 4.2** Sea  $1 \leq x_n \leq 2$  y  $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (4.10)$$

Demostración. Dado que  $1 \leq x_n \leq 2$  para  $n \in \mathbb{N}$ , a partir de (4.7), se sigue que

$$|x_{n+2} - x_n| = \frac{|x_n - x_{n-2}|}{(x_n + 1)(x_{n-2} + 1)} \leq \frac{1}{4} |x_n - x_{n-2}|.$$

y luego

$$\begin{aligned} |x_{2k+2} - x_{2k}| &\leq \frac{1}{4^{k-1}} |x_4 - x_2| \\ |x_{2k+1} - x_{2k-1}| &\leq \frac{1}{4^{k-1}} |x_3 - x_1| \end{aligned}$$

donde  $k \in \mathbb{N}$ . Por propiedades de series con términos positivos, se deduce que las series  $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{2k+2} - x_{2k})$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{2k+1} - x_{2k-1})$  son absolutamente convergentes. Dado que

$$\begin{aligned} x_{2k} &= x_2 + \sum_{i=2}^k (x_{2i} - x_{2(i-1)}), \\ x_{2k-1} &= x_1 + \sum_{i=2}^k (x_{2i-1} - x_{2(i-3)}), \end{aligned}$$

las secuencias  $\{x_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$  y  $\{x_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$  convergen. El resto es igual que la prueba dada en el teorema 4.1.  $\square$

Además, otra forma de analizar la convergencia es dada la secuencia de Fibonacci  $\{F_n\}$  definida para  $n = 0, 1, 2, \dots$  donde se cumple que:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad \text{y} \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \forall n \geq 0.$$

Sea  $L$  el límite que se desea encontrar. Teniendo en cuenta que para todo  $n$  entero positivo  $F_n$  es mayor que cero, al dividir la ecuación recursiva de la sucesión de Fibonacci por  $F_{n+1}$  y procediendo al cálculo del límite cuando  $n$  tiende a infinito, se obtiene:

$$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_n}{F_{n+1}} + 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{F_n}{F_{n+1}} \right) + 1$$

$$\Rightarrow L^2 = L + 1 \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Considerando la positividad de los términos de la sucesión para cualquier entero  $n$ , se deduce que:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

**Proposición 4.2.2** Sea la serie dada por la suma  $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ , donde se desea determinar su radio de convergencia  $R$  y verificar la identidad

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = 1,$$

donde  $|x| < R$  y  $f(x)$  es representada por la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ .

Prueba. Utilizando el criterio de D'Alembert, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1} x^{n+1}}{F_n x^n} = |xL| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = R.$$

La serie en cuestión converge absolutamente para  $|x| < R$  y diverge cuando  $|x| > R$ , de donde se deduce que el radio de convergencia es  $R = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Continuando con la demostración de la identidad, se observa que:

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} \\ &= (F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n) - (F_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n) - \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\ &= F_0 + F_1 x - F_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_n - F_{n-1} - F_{n-2}) x^n \\ &= 1 + x - x + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot x^n \\ &= 1. \end{aligned} \tag{4.11}$$

□

#### 4.3. Caracterización de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante los procesos de límite

En esta sección se plantea una caracterización de la sucesión de Fibonacci, mostrando su correspondiente relación con la proporción áurea.

**Teorema 4.3** Sea  $1 \leq x_n \leq 2$  y  $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \phi. \quad (4.12)$$

Demostración. Notar que la ecuación  $x = 1 + \frac{1}{x}$  correspondiente a  $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$  para  $n \in \mathbb{N}$  tiene una única raíz positiva  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Por definición de límite, utilizando el resultado  $1 \leq x_n \leq 2$  para  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$x_n - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{x_{n-1}} + 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (4.13)$$

$$= \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (4.14)$$

$$x_n - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{5}} + x_{n-1} - 1 \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2x_{n-1}} + x_{n-1} - 1 \quad (4.16)$$

$$= \frac{\sqrt{5} - 1}{2x_{n-1}} + \left( x_{n-1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad (4.17)$$

$$\leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \left| x_{n-1} - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| \quad (4.18)$$

entonces

$$\left| x_n - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| \leq \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n \left| x_1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| \quad (4.19)$$

$$= \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ . □

**Teorema 4.4** Sea  $F_n$  la sucesión de Fibonacci y  $\phi$  el número áureo, entonces

$$\sum_{i=1}^n F_i^k = \frac{\phi^k}{\phi^k - 1} F_n^k - \frac{1}{\phi^k - 1} F_n^{k-1} + O(F_n^{k-1}).$$

Donde  $k$  es un entero positivo fijo arbitrario. Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n F_i^k}{F_n^k} = \frac{\phi^k}{\phi^k - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\phi^k} \right)^i.$$

Demostración. Nota que si  $k = 1$  entonces  $\frac{\phi}{\phi-1} = 1 + \phi$  y si  $k = 2$  entonces  $\frac{\phi^2}{\phi^2-1} = \phi$ .

Partiendo que

$$F_n = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}} + O(1),$$

donde  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  es la proporción áurea. Note que si  $\alpha$  es un número real positivo entonces  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$  cuando  $x$  tiende a 0. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{F_n^k}{\sqrt{5}} &= \left( \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} + O(1) \right)^k = \left( \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right)^k \left( 1 + O\left( \frac{1}{\phi^n} \right) \right)^k \\ &= \left( \frac{\phi^k}{\sqrt{5}} \right)^n \left( 1 + O\left( \frac{1}{\phi^n} \right) \right)^k = \left( \frac{\phi^k}{\sqrt{5}} \right)^n \left( 1 + O\left( \phi^{(k-1)n} \right) \right) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_i^k &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\phi^k}{\sqrt{5}} \right)^i + O\left( \phi^{(k-1)i} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{i=1}^n \left( \phi^k \right)^i + O\left( \sum_{i=1}^n \left( \phi^{k-1} \right)^i \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\phi^k}{\phi^k - 1} - O\left( \phi^{(k-1)n} \right) = \frac{\phi^k}{\phi^k - 1} (F_n + O(1))^k + O\left( F_n^{k-1} \right) \\ &= \frac{\phi^k}{\phi^k - 1} F_n^k + O\left( F_n^{k-1} \right). \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.5** Sea  $F_n$  la sucesión de Fibonacci y  $\phi$  el número áureo, entonces

$$\sum_{i=1}^n \left( -F_{2i-1}^k + F_{2i}^k \right) = \frac{\phi^k}{\phi^k + 1} F_{2n}^k + O\left( F_{2n}^{k-1} \right).$$

donde  $k \geq 2$  un entero positivo fijo arbitrario. Además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (-F_{2i-1}^k + F_{2i}^k)}{F_{2n}^k} = \frac{\phi^k}{\phi^k + 1} = \sum_{i=0}^{\infty} \left( -\frac{1}{\phi^k} \right)^i.$$

Demostración. Note que si  $k = 1$  entonces  $\frac{\phi}{\phi+1} = \frac{1}{\phi}$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (-F_{2i-1} + F_{2i}) &= -\sum_{i=1}^n F_{2i-1} + \sum_{i=1}^n F_{2i} \\ &= -\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^{k(2i-1)} + O\left(\phi^{(k-1)(2i-1)}\right) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^{k2i} + O\left(\phi^{(k-1)2i}\right) \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{\phi^k} \right) \sum_{i=1}^n \left( \frac{\phi^{2k}}{\sqrt{5}} \right)^i + O\left( \sum_{i=1}^n \left( \phi^{(k-1)(2i-1)} \right) \right). \end{aligned}$$

Por la fórmula de Binet para los números de Fibonacci junto con propiedades de sumas geométricas.

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$$

Al considerar los índices pares e impares, se obtienen las siguientes expresiones:

$$F_{2i} = \frac{\phi^{2i} - (-\phi)^{-2i}}{\sqrt{5}}, \quad F_{2i-1} = \frac{\phi^{2i-1} - (-\phi)^{-(2i-1)}}{\sqrt{5}}$$

Elevando estos términos a la potencia  $k$  y asumiendo que los términos con  $(-\phi)^{-n}$  son menores y pueden ser tratados como un término de error  $O$ , se analiza la suma:

$$\sum_{i=1}^n (-F_{2i-1}^k + F_{2i}^k)$$

Esta suma se aproxima mediante la expresión:

$$\frac{\phi^k}{\sqrt{5}^k} \sum_{i=1}^n \left( -\phi^{k(2i-1)} + \phi^{k2i} \right)$$

Al factorizar, simplificar y utilizando que  $\frac{1}{\phi^k} - 1 = -\frac{1}{\phi^k + 1}$ , se llega a:

$$-\frac{1}{\phi^k + 1} \sum_{i=1}^n \phi^{2ki}$$

La suma geométrica  $\sum \phi^{2ki}$  se puede aproximar por su último término debido a que  $\phi > 1$  y la serie incrementa exponencialmente:

$$\sum_{i=1}^n \phi^{2ki} \approx \phi^{2kn}$$

Entonces, la suma inicial se puede aproximar como:

$$\sum_{i=1}^n (-F_{2i-1}^k + F_{2i}^k) \approx -\frac{1}{\phi^k + 1} \phi^{2kn}$$

Y dado que  $\phi^{2kn}$  es proporcional a  $F_{2n}^k$  según la fórmula de Binet, se obtiene finalmente la aproximación:

$$\sum_{i=1}^n (-F_{2i-1}^k + F_{2i}^k) = \frac{\phi^k}{\phi^k + 1} F_{2n}^k + O(F_{2n}^{k-1})$$

□

**Proposición 4.3.1** Asumiendo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$ , entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_{k+n}}{F_k} = \Phi^n.$$

Demostración. Se tiene que

$$\frac{F_{k+n}}{F_k} = \frac{F_{k+n}}{F_{k+n-1}} \times \frac{F_{k+n-1}}{F_{k+n-2}} \times \cdots \times \frac{F_{k+1}}{F_k}.$$

Luego, tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , y utilizando

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F_j}{F_{j-1}} = \Phi,$$

se obtiene directamente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_{k+n}}{F_k} = \Phi^n.$$

□

**Proposición 4.3.2** Utilizando  $\Phi^2 = \Phi + 1$ , se cumple la siguiente linealización de las potencias de la razón áurea:

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}, \quad (4.20)$$

donde  $n$  es un entero positivo y  $F_0 = 0$ .

Demostración. Se probará la expresión (4.20) por inducción matemática. Para  $n = 1$ , la relación (4.20) se convierte en  $\Phi = \Phi$ , lo cual es verdadero.

Supongase ahora que (4.20) es verdadera para un entero positivo  $n = k$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \Phi^{k+1} &= \Phi \Phi^k \\ &= \Phi(F_k \Phi + F_{k-1}) \quad (\text{por la hipótesis de inducción}) \\ &= F_k \Phi^2 + F_{k-1} \Phi \\ &= F_k(\Phi + 1) + F_{k-1} \Phi \quad (\text{por } \Phi^2 = \Phi + 1) \\ &= (F_k + F_{k-1})\Phi + F_k \\ &= F_{k+1}\Phi + F_k \quad (\text{por la relación de recurrencia}) \end{aligned}$$

de tal modo que (4.20) es verdadera para  $n = k + 1$ . □

**Proposición 4.3.3** Utilizando  $\Phi^2 = -\Phi + 1$ , se cumple la siguiente linealización de las potencias del conjugado de la razón áurea:

$$(-\Phi)^n = -F_n \Phi + F_{n-1}, \quad (4.21)$$

donde  $n$  es un entero positivo y  $F_0 = 0$ .

Demostración. Por inducción matemática, para  $n = 1$ , la relación (4.21) se convierte en  $-\Phi = -\Phi$ , lo cual es verdadero.

Asumiendo que (4.21) es verdadera para un entero positivo  $n = k$ . Entonces se sigue que

$$\begin{aligned}
 (-\Phi)^{k+1} &= -\Phi(-\Phi)^k \\
 &= -\Phi(F_k\Phi + F_{k-1}) \quad (\text{por la hipótesis de inducción}) \\
 &= F_k\Phi^2 - F_{k-1}\Phi \\
 &= F_k(-\Phi + 1) - F_{k-1}\Phi \quad (\text{por } \Phi^2 = -\Phi + 1) \\
 &= -(F_k + F_{k-1})\Phi + F_k \\
 &= -F_{k+1}\Phi + F_k \quad (\text{por la relación de recurrencia})
 \end{aligned}$$

de tal modo que (4.21) es verdadera para  $n = k + 1$ . □

#### 4.4. Demostraciones algebraicas, matriciales y de ecuaciones en diferencias, de la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea.

##### 4.4.1. Método algebraico

Para esta demostración, inicialmente se reescribe  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  como

$$F_{n+2} - pF_{n+1} = q(F_{n+1} - pF_n).$$

esto es

$$F_{n+2} = (p + q)F_{n+1} - pqF_n$$

Definiendo

$$\begin{cases} p + q = 1 \\ pq = -1 \end{cases} \quad (4.22)$$

entonces se obtienen soluciones para (4.22) de la siguiente manera

$$\begin{cases} p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ q = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} p = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, la fórmula de recurrencia  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  se puede reescribir como

$$F_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left( F_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_n \right) \quad (4.23)$$

y

$$F_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left( F_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_n \right) \quad (4.24)$$

A partir de (4.23), se obtiene

$$F_{n+2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}, \quad (4.25)$$

A partir de (4.24), se deduce que

$$F_{n+2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}F_{n+1} = \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}. \quad (4.26)$$

A partir del sistema de ecuaciones (4.25) y (4.26), se tiene

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

y

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

#### 4.4.2. Método matricial

Dado que para  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple que

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , entonces los autovalores de la matriz cuadrada  $A$  son  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , y sus correspondientes autovectores

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tomando

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

esto implica

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n & 0 \\ 0 & \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1} - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^{n+1} \\ \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n - \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \begin{pmatrix} \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} - \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} \\ \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^n - \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^n & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

es decir,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 4.4.3. Método de ecuación en diferencias

A partir de  $F_{n+2} = F_{n-1} + F_n$ , se obtiene la ecuación de diferencia lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$$

Su ecuación propia es  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ , cuyos valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solución general de la ecuación de diferencia es

$$F_n = C_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Con las condiciones iniciales  $F_1 = 1$  y  $F_2 = 1$ , se obtiene que

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

‘ y

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1} - \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^{n+1}}{\left[ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]^n - \left[ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right]^n} \rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

a medida que  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \phi$ .

## CAPÍTULO V

### ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

#### 5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea, conforme a los objetivos y preguntas planteadas para esta investigación. Además, se presentan las conclusiones y posibles líneas futuras para continuar profundizando en el estudio de estas entidades matemáticas que tanto están presentes en la naturaleza.

#### 5.2. Análisis de los resultados

Con respecto al objetivo 1, de evaluar la convergencia de la sucesión de Fibonacci y el límite de la razón  $f(n+1)/f(n)$  a medida que  $n$  tiende a infinito, se plantea una proposición que establece que esta razón se aproxima al número áureo  $\phi$  a medida que  $n$  aumenta. Esto se ilustra con ejemplos que muestran cómo esta razón se acerca cada vez más a  $\phi$ , además mediante un enfoque recursivo, mostrando que la razón actual se puede expresar en términos de la razón anterior, lo que finalmente lleva a la convergencia hacia  $\phi$ .

Además, se plantean dos teoremas que abordan la convergencia de la sucesión de Fibonacci. Uno parte del teorema de Weierstrass-Bolzano y muestra que la secuencia  $x_n$  no es monótona, pero se divide en dos subsecuencias monótonas. Luego, mediante cálculos y resolución de ecuaciones, se llega a la conclusión de que ambas subsecuencias convergen a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , lo que implica que  $x_n$  también converge a este valor.

El otro teorema, en lugar de utilizar el teorema de Weierstrass-Bolzano, se demuestra que las secuencias  $x_{2n-1}$  y  $x_{2n}$  son monótonas y acotadas. Luego, se utiliza la convergencia de estas secuencias para demostrar que  $x_n$  también converge a  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

Conforme al segundo objetivo de establecer caracterizaciones de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea mediante los procesos de límite, se planteó que la

razón entre términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende a la proporción áurea ( $\phi$ ) cuando  $n$  tiende a infinito. La demostración utiliza la propiedad recursiva de Fibonacci y el concepto de límite. La ecuación  $x = 1 + \frac{1}{x}$  juega un papel central, y la demostración emplea manipulaciones algebraicas para mostrar que la diferencia entre la razón de Fibonacci y  $\phi$  tiende a cero, además se presentó la suma de potencias de fibonacci y la proporción áurea, demostrando que la suma normalizada por  $F_n^k$  tiende a una función de  $\phi^k$  cuando  $n$  tiende a infinito, así como también, de la suma alternada de potencias de términos Fibonacci pares e impares.

Los teoremas presentados demuestran una conexión profunda entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea, no solo en términos de la razón de términos consecutivos sino también en sumas más complejas de potencias de estos términos. Estos resultados destacan la gran presencia de  $\phi$  en la matemática de la sucesión de Fibonacci, revelando patrones y relaciones que van más allá de la simple definición de esta famosa secuencia. La utilización de límites, sumas de series y la fórmula de Binet son fundamentales en estas demostraciones, mostrando la importancia de estos conceptos en la matemática avanzada.

En relación al tercer objetivo de demostrar mediante métodos algebraicos, matriciales y de ecuaciones en diferencias, la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea, se presenta una demostración algebraica donde se parte de la recurrencia de Fibonacci  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  y se reescribe como una ecuación lineal de primer orden con coeficientes  $p$  y  $q$ . Luego, se define un sistema de ecuaciones para  $p$  y  $q$ , cuyas soluciones son  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Con estas soluciones, se obtiene una forma alternativa de la recurrencia, que es la base para encontrar una fórmula cerrada para los términos de Fibonacci.

En cuanto al método matricial, se representa la recurrencia de Fibonacci en forma de una matriz de dos dimensiones, donde los términos  $F_{n+2}$  y  $F_{n+1}$  están relacionados a través de la multiplicación por una matriz de Fibonacci  $A$ . Se encuentra que

los autovalores de esta matriz son  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , y sus correspondientes autovectores se utilizan para diagonalizar  $A$ . Finalmente, se obtiene una expresión para  $F_n$  en términos de estos autovalores y autovectores, que coincide con la fórmula de Fibonacci.

En el método que donde son utilizadas las ecuaciones en diferencias, se parte de la ecuación de recurrencia  $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$  y se trata como una ecuación de diferencia lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Se encuentra la solución general de esta ecuación en términos de dos constantes  $C_1$  y  $C_2$ . Luego, se utilizan condiciones iniciales  $F_1 = 1$  y  $F_2 = 1$  para determinar los valores de estas constantes, lo que conduce a la misma fórmula de Fibonacci.

### 5.3. Conclusiones

En correspondencia con los objetivos planteados en esta investigación, a continuación se plantean las conclusiones más importantes que se derivan de la presentación y análisis de los resultados:

1. En relación a la convergencia de la sucesión de Fibonacci y el límite de  $f(n+1)/f(n)$  cuando tiende al infinito, se ha establecido que esta razón converge hacia la proporción áurea ( $\phi$ ).
2. Con respecto a la caracterización de la relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea ( $\phi$ ) a través de procesos de límite, se concluye que la razón entre términos consecutivos de Fibonacci converge a  $\phi$  al infinito. Esta convergencia se evidencia no solo en términos sucesivos, sino también en sumas más complejas de potencias de términos de Fibonacci.
3. Conforme a las demostraciones de la conexión entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea ( $\phi$ ), la aproximación algebraica reformula la recurrencia de Fibonacci como una ecuación lineal de primer orden, cuyas soluciones llevan a una fórmula cerrada para los términos de Fibonacci. El método matricial transforma la recurrencia en una operación matricial, donde los autovalores y auto-

vectores de la matriz de Fibonacci se relacionan directamente con  $\phi$ , resultando en una expresión equivalente para  $F_n$ . Por último, el enfoque de ecuaciones en diferencias maneja la recurrencia como una ecuación lineal de segundo orden, cuya solución, condicionada por los términos iniciales de Fibonacci, también conduce a la fórmula clásica.

De acuerdo al objetivo general planteado, esta investigación concluye que existe una fuerte relación entre la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea ( $\phi$ ), demostrándose que la razón entre términos consecutivos de Fibonacci converge a  $\phi$  con el aumento de  $n$ , tanto en términos individuales como en sumas más complejas.

#### **5.4. Líneas futuras de investigación**

Dados los resultados planteados en esta investigación, a continuación se plantean posibles líneas de investigación que permitirán seguir profundizando en el estudio de la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea:

1. Aplicaciones de la Relación Fibonacci-Áurea en Sistemas Dinámicos y Teoría del Caos.
2. Relación entre la Sucesión de Fibonacci, la Proporción Áurea y la Geometría Fractal.
3. Impacto de la Proporción Áurea en la Optimización y la Teoría de Algoritmos.
4. Aplicaciones en Criptografía Basadas en la Sucesión de Fibonacci y la Proporción Áurea.

## Referencias

- Acevedo Frías, B. (2014). Cálculo integral en una variable: sucesiones y series. Departamento de Matemáticas y Estadística.
- Andonegui Z, M. (2006). Razones y proporciones. Serie Desarrollo del pensamiento matemático. Federación Internacional Fe y Alegría.
- Babativa, C. A. (2017). Investigación cuantitativa. Fundación Universitaria del Área Andina: Apreandina. Bogotá, Colombia.
- Cascales, A. (2014). Ecuaciones en diferencias racionales. Proyecto de investigación.
- Chavan, A., & Suryawanshi, C. (2020). Correlation of Fibonacci sequence and golden ratio with its applications in engineering and science. International Journal of Engineering and Management Research.
- Clancy, T. (2008). The Fibonacci Numbers. Senior Project Archive, Whitman College.
- Contreras, Á. (2020). Ecuaciones en diferencias. Aplicaciones. Universidad de Jaén. Matemáticas.
- Córdoba Muñoz, C. (2015). La sucesión de Fibonacci y su aplicación didáctica en las matemáticas de la educación secundaria. Universidad de San Pablo.
- Cox, D., Little, J., y O'Shea, D. (2013). Ideales, variedades y algoritmos: una introducción a la geometría algebraica computacional y al álgebra conmutativa. Medios de ciencia y negocios de Springer.
- Domínguez, A. (1990). Representaciones de la sucesión de Fibonacci. Educación Matemática, 2(03), 4-6.
- Espinoza Freire, E. E. (2020). La investigación cualitativa, una herramienta ética en el ámbito pedagógico. Conrado, 16(75), 103-110.
- Fernández L., A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., & Puig, L. (2009). Competencias en razón y proporción en la Escuela Primaria. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de Valencia.
- Ferrando, I., & Segura, C. (2010). La sucesión de Fibonacci como herramienta para modelizar la naturaleza. Modelling in science education and learning, 3, 45-54.

- Figuerola, C., Castro, L., Fox, J. R., & Lozano, M. (2013). La Secuencia de Fibonacci y el Número de Oro en ingeniería eléctrica y análisis numérico. *Formación universitaria*, 6(2), 23-32.
- Fiorenza, A., & Vincenzi, G. (2013). From Fibonacci sequence to the golden ratio. *Journal of Mathematics*, 2013.
- Ghorbani, H. (2021). Golden Ratio: The Mathematics of Beauty. *Mathematics Interdisciplinary Research*, 6(2), 159-170.
- Grigas, A. (2013). The Fibonacci Sequence: Its history, significance, and manifestations in nature.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2018). Metodología de la investigación (Vol. 4, pp. 310-386). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*. Pearson Educación.
- Kilic, E. (2008). The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci p-numbers. *European Journal of combinatorics*, 29(3), 701-711.
- Larson, R. (2016). *Fundamentos de Algebra Lineal*. Séptima edición, Cengage Learning Editores: México.
- Luque, J. (2022). El Número Áureo y la Sucesión de Fibonacci. *Revista Digital de ACTA: Cedro*.
- Merino, L. M., & Santos Alaez, E. (2021). *Álgebra lineal con métodos elementales*. 3a. Editorial Paraninfo.
- Posamentier, A., & Lehmann, I. (2007). *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*. Prometheus Books.
- Ramos-Galarza, CA (2020). Los alcances de una investigación. *CienciaAmérica*, 9(3), 1-6.
- Sabino, C. (2014). *El proceso de investigación*. Décima edición. Editorial Episteme, Guatemala.
- Salazar Caicedo, J. A., & Acevedo Frías, B. (1997). *Sucesiones y series numéricas*. Departamento de Matemáticas y Estadística.
- Salvador, A. (2020). *Recursos para el aula: El número de oro*. Universidad Politécnica

de Madrid.

Sánchez, D., & Trumper, R. E. (2012). El número Áureo  $\phi$ , una propuesta didáctica.

XV Jornada Nacional de Educación Matemática-SOCHIEM.

Scott, T. C., & Marketos, P. (2014). On the origin of the Fibonacci Sequence. Mac-Tutor History of Mathematics, 23.

Van Gend, R. (2014). The Fibonacci sequence and the golden ratio in music. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 20(1), 72-77.

Vorobiev, N. (2002). Fibonacci numbers. Springer Science Business Media.

Xalapa-Eqz, V. (2008). Memorias: Tercer taller de teoría de números del centro sureste. Universidad Autónoma Metropolitana.

Zill, D. G. (2012). Matemáticas avanzadas para ingeniería. Cuarta edición. McGraw Hill México.

## ANEXOS

## Anexo I. Proporción áurea y números de Fibonacci en la naturaleza.

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea y/o los números de Fibonacci:

1. Leonardo de Pisa, Fibonacci, usó la sucesión que lleva su nombre para calcular el número de pares de conejos  $n$  meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse (suponiendo que los conejos están aislados por muros, se empiezan a reproducir cuando tienen dos meses de edad, tardan un mes desde la fecundación hasta la aparición y cada camada es de dos conejos).
2. La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).
3. La distribución de las hojas en un tallo.
4. La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a  $\phi$  tomando como unidad la rama superior).
5. La cantidad de espirales de una piña (ocho y trece espirales), flores o inflorescencias. Estos números son elementos de la sucesión de Fibonacci y el cociente de dos elementos consecutivos tiende al número áureo.
6. La cantidad de pétalos en las flores. Existen flores con 3, 5 y 8 pétalos y también con 13, 21, 34, 55, 89 y 144.
7. La distribución de las hojas de la yuca y la disposición de las hojas de las alcachofas.
8. La relación entre la distancia entre las espiras del interior espiralado de cualquier caracol o de cefalópodos como el nautilus.
9. En la cantidad de elementos constituyentes de las espirales o dobles espirales de las inflorescencias, como en el caso del girasol, y en otros objetos orgánicos como los piñas de los pinos se encuentran números pertenecientes a la sucesión de Fibonacci.

## Anexo II. Presupuesto en la realización de la tesis.

Este apartado contempla un desglose de los recursos económicos invertidos en el proceso de realización de esta tesis.

| <b>Descripción de aspectos</b>     | <b>Monto</b>     |
|------------------------------------|------------------|
| Transporte, combustible y viáticos | 8,300.00         |
| Impresión                          | 6,400.00         |
| Encuadernado, empastado y CDs      | 2,750.00         |
| Fotocopias                         | 4,600.00         |
| Materiales e insumos               | 4,800.00         |
| Imprevistos                        | 5,500.00         |
| <b>Total</b>                       | <b>32,350.00</b> |

## Anexo III. Cronograma de trabajo de la investigación.

En este apartado se describen las diferentes etapas del proceso de elaboración de esta investigación y sus respectivas fechas de ejecución.

| <b>Descripción</b>                         | <b>Periodos de ejecución</b> |
|--------------------------------------------|------------------------------|
| Solicitud de título                        | Abril, 2023                  |
| Aprobación del título                      | Mayo, 2023                   |
| Elaboración y entrega del anteproyecto.    | Noviembre, 2023              |
| Evaluación del Anteproyecto                | Noviembre-diciembre, 2023    |
| Elaboración de capítulo IV y V             | Diciembre, 2023              |
| Defensa ante los jurados                   | Enero, 2024                  |
| Entrega de proyecto completo a la Facultad | Enero, 2024                  |
| Graduación                                 | Febrero, 2024                |