

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de
Maestría en Matemáticas.

Título

Análisis de la regla de Laplace aplicado al cálculo de la probabilidad

Sustentante

Carla Margarita Merejo Rodríguez

Asesor

M.Sc. Rainier Sánchez

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

TÍTULO

ANÁLISIS DE LA REGLA DE LAPLACE APLICADO AL CÁLCULO DE LA
PROBABILIDAD

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en la presente investigación, es responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se hicieron respetando el derecho de autor.

Título

Análisis de la regla de Laplace aplicado al cálculo de la probabilidad

Tesis presentada por **Carla Margarita Merejo Rodríguez** para la obtención del grado de Maestría en Matemáticas.

Composición del tribunal evaluador

MA. Danny Manzueta

Metodología

MA. José Miguel Gómez

Contenidos

MA. Nelson Sánchez

Redacción

Lic. Yuderka Reyes

Directora de postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos	VI
Dedicatorias	VII
Resumen	VIII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Antecedentes históricos	1
1.1.2. Antecedentes académicos	3
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Justificación	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivos específicos	6
1.5. Alcances y límites	6
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	7
2.1. Las leyes de la probabilidad	7
2.2. Regla de Laplace	8
2.2.1. Operaciones con sucesos	10
2.2.2. Probabilidad de la unión de dos sucesos	11
2.2.3. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles	11
2.2.4. Suceso contrario o complementario	12
2.2.5. Diferencia de dos sucesos.	12
2.2.6. Probabilidad de la diferencia de sucesos.	12
2.3. Probabilidad en experimentos compuestos	13
2.3.1. Probabilidad condicionada	13
2.3.2. Teorema de la probabilidad total	13
2.3.3. Fórmulas de Bayes	13
2.4. Variables discretas y las continuas	14

2.5.	Esperanza matemática, momento y varianza de una variable aleatoria X	15
2.6.	Cálculo fraccional local de funciones de una variable	16
2.6.1.	Conjuntos fraccionarios de conjuntos de la recta real.	16
2.7.	Axioma de completitud de Dedekind generalizado.	20
2.7.1.	Límite fraccional local	20
2.7.2.	Definición y propiedades la derivada fraccionaria local	21
2.7.3.	Integral fraccional local	23
2.7.4.	Propiedades de la integral fraccional local	23
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA		25
3.1.	Método de investigación	25
3.2.	Diseño de investigación	25
3.3.	Tipo de investigación	25
3.4.	Enfoque de investigación	25
3.5.	Procedimiento de investigación	26
CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS		27
4.1.	Función de densidad de probabilidad generalizada	27
4.2.	Función de densidad de probabilidad conjunta generalizada	30
4.3.	Esperanza matemática generalizada	35
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES		38
5.1.	Conclusiones	38
5.2.	Líneas futuras de investigaciones.	39
Referencias		41
Anexos.		I
Anexo A. Símbolos Matemáticos		II
Anexo B. Cronograma		IV

Agradecimientos

A Dios: por cubrirme con sus bendiciones, por cada día que me permite despertar con vida y continuar con salud, fuerzas y empeño para que, con cada avance, experiencia y momento fueran de grandes aprendizajes y poder crecer en mi ámbito laboral, gracias por guiarme hasta la culminación de mi meta.

Al MESCyTmescyt: por proporcionarme su apoyo a través de una beca para poder desarrollar mis habilidades y destrezas en mi área de formación.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO): por abrirme las puertas y brindarme la oportunidad de avanzar en mi carrera profesional. Al coordinador de la facultad y a la directora general de esta institución, quienes mostraron una actitud de colaboración y apoyo. Al asesor: M. Sc. Rainier Sánchez por todas sus enseñanzas, consejos, experiencia, comprensión y paciencia, los cuales propiciaron un proceso de aprendizaje mutuo y por la disposición para mostrarme el camino académico, con ese apoyo, sin el cual este trabajo no hubiera sido posible.

A los profesores: por ser parte fundamental de este logro, que con su experiencia y conocimientos fortalecieron, guiaron y enriquecieron mis trabajos académicos.

A los compañeros de maestría: de manera especial a Yulenny Altagracia Santos, Carola Gómez, Maribel Núñez y Yeraldý Reinoso por su amistad y porque estuvieron conmigo en los momentos de estrés y alegría durante este largo y retador camino. Su apoyo, confianza, soporte y cariño han sido invaluableles. Cada uno de ustedes ha contribuido a mi fortaleza y animo de una manera u otra.

Carla Margarita Merejo Rodríguez

Dedicatorias

Mi tesis la dedico a mis padres Carlos Merejo y Margarita Rodríguez quienes con sus palabras de aliento no me dejaban decaer para que siguiera adelante y siempre sea perseverante y cumpla con mis metas.

A mi esposo Danphier Rodríguez: por su amor, cariño, sacrificio y entrega, por creer en mí, en mis capacidades y por esos momentos difíciles que pase y tu estabas ahí para brindarme tu apoyo y comprensión.

A mis hijos: Daphne y Dereck por ser mi fuente de motivación e inspiración para poder superarme cada día más y así poder luchar para que la vida nos depare un futuro mejor.

A mi hermano: Carlos Antonio Merejo por estar siempre junto a mí y brindándome su apoyo, muchas veces poniéndose en el papel de padre.

A mis suegros: Antonia Rosario y Domingo Rodríguez quienes sin esperar nada a cambio estuvieron a mi lado apoyándome y pusieron su confianza en mí para lograr este sueño.

Carla Margarita Merejo Rodríguez

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL

Análisis de la regla de Laplace aplicado al cálculo de la probabilidad

Carla Margarita Merejo Rodríguez

Sustentante

M.Sc. Rainier Sánchez

Asesor

RESUMEN

La investigación se centró en el análisis de la aplicación de la regla de Laplace en el cálculo de la probabilidad en sucesos equiprobables, con el objetivo general de examinar sus propiedades en el contexto de las probabilidades. La metodología adoptada un enfoque deductivo y cualitativo, con un diseño no experimental, transversal y analítico. Se destaca el uso de herramientas como la función de densidad de probabilidad generalizada y la función de distribución acumulativa generalizada, aplicadas a variables aleatorias continuas. Los hallazgos revelan información importantes sobre la regla de Laplace, incluyendo propiedades de las funciones mencionadas que facilitan el cálculo de probabilidades en intervalos específicos. Además, se presentan expresiones para la esperanza matemática generalizada, la varianza y el momento generalizado en conjuntos fractales, revelando relaciones significativas con los momentos convencionales en casos específicos. Estos resultados contribuyen de manera sustancial a la comprensión teórica y aplicada de la regla de Laplace en contextos más complejos.

Palabras clave: Regla de Laplace. Cálculo de probabilidad. Sucesos equiprobables.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los antecedentes históricos, donde se exponen el origen y evolución de la regla de Laplace. Seguidamente se exhiben los antecedentes académicos que sirven de sustento a esta investigación. Posteriormente, se hace el planteamiento del problema, se da la justificación, se establecen los objetivos y se da el alcance y los límites de la investigación.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Antecedentes históricos

Las leyes más simples en las ciencias naturales están constituidas por condiciones que determinan si ocurre o no algún evento determinado. Estas condiciones se pueden expresar de dos maneras:

1. Si el sistema (grupo o conjunto) de condición S se cumple, entonces definitivamente ocurre el evento A ;
2. Si se cumple un conjunto de condiciones S , entonces el evento A no ocurre.

La primera formulación explícita del concepto de ley del azar se atribuye al célebre matemático y físico Italiano G. Cardano, quien en 1526 estableció la igualdad de probabilidad de ocurrencias a largo plazo en la superficie de los dados, a partir de la condición de simetría. Posteriormente en 1651, Knight, F. planteó varios problemas relacionados con los juegos de azar a los principales matemáticos de la época, lo que dio lugar a una gran correspondencia entre Pascal y Fermat. Uno de los problemas planteados consistió en determinar cómo distribuir las apuestas de manera justa entre los jugadores de la misma habilidad cuando deciden irse antes de que termine el juego (lo que sucede con bastante frecuencia porque el juego es ilegal). Los dos jugadores acuerdan que la condición para comenzar el juego es que gane el jugador que primero obtenga una determinada puntuación.

Jeffrey (1992), en su artículo sobre probabilidad introductoria, sugiere que

la definición de probabilidad surge del deseo del hombre de conocer con certeza los eventos que ocurren en el futuro. Por esta razón, a lo largo de la historia se han desarrollado diversos enfoques para desarrollar un concepto de probabilidad y determinar sus valores.

En 1774, Pierre-Simon Laplace hizo el primer intento para deducir una regla que permitiera combinar observaciones a partir de los principios de la teoría de las probabilidades. Dentro de sus resultados destaca la conocida ley de Laplace, que permite predecir que resultado de un experimento es más probable que ocurra y es ampliamente utilizado en estadística.

La idea de probabilidad está muy relacionada con la idea de azar y nos ayuda este mismo orden de ideas de Laplace a entender nuestras posibilidades de ganar un juego de azar o a analizar encuestas. Pierre-Simon Laplace, un matemático y astrónomo francés que, a la edad de 24 años, fue apodado “el Newton de Francia” por algunos de sus descubrimientos, dijo: Es notable que lo que comenzó como una ciencia pensando en los juegos de azar se haya convertido en el “objeto más importante del conocimiento humano.

La teoría de probabilidades ha sido estudiada y generalizada por diversos investigadores, dentro de los cuales se destacan A. Markov, S. Bernstein y F. Hinchin (1912) invirtieron mucha investigación para ampliar al máximo las condiciones para el establecimiento de la relación límite, es decir, las condiciones para el establecimiento de la ley de los grandes números. Estos estudios son de fundamental interés teórico, pero más importantes son los estudios precisos de la distribución de probabilidad de la variable $\zeta - \mathbf{M}(\zeta)$.

Siguiendo esta línea de investigación, los matemáticos rusos E. Dynkin, Y. Prokhorov y S. Bernstein (1925) contribuyen a la teoría de la probabilidad estable-

ciendo la ecuación

$$\mathbf{P} \{t_1\sigma_\zeta \leq \zeta - \mathbf{M}(\zeta) < t_2\sigma_\zeta\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t/2} dt, \quad (1.1.1)$$

la cual es asintóticamente válida, es decir, con mayor y mayor exactitud a medida que n crece indefinidamente.

Esta ecuación fue demostrada parcialmente por P. Chebichev (si es posible coloca el año), para el caso de términos acotados e independientes. Posteriormente, A. Markov llenó un vacío en el argumento de P. Chebichev y amplía las condiciones bajo las cuales se aplica (1.1.1), las cuales fueron generalizadas por A. Lyapunov (si puedes coloca el año y explica brevemente lo que hizo). En este mismo orden de ideas en xxxx, Bernstein estudió exhaustivamente la aplicabilidad de (1.1.1) a sumas de términos mutuamente independientes.

Markov fue el autor de un esquema probabilístico que viene a ser una generalización inmediata del esquema determinista descrito por la ecuación

$$\omega = F(t_0, \omega_0, t). \quad (1.1.2)$$

Markov consideró solamente el caso en que el espacio de las fases del sistema consiste en un número finito de estados $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ y que estudió el cambio de estado del sistema para cambios discretos del tiempo t solamente. Pero con este modelo estremadamente esquemático logró establecer una serie de leyes fundamentales.

1.1.2. Antecedentes académicos

Para Morales (2002) en su estudio sobre “Historia de la probabilidad (desde sus orígenes a Laplace) y su relación con la historia de la teoría de la decisión”, de la Universidad Complutense de Madrid, cuyo objetivo fue mostrar la historia de la probabilidad desde sus orígenes a Laplace y su relación con la historia de la teoría de la decisión, concluye que:

La moderna Teoría de la Probabilidad es el resultado de la confluencia de la geometría del azar y de la probabilidad filosófica-teológica heredada del pensamiento clásico y cristiano. En efecto, en ambas materias se estudian cuestiones acerca de las cuales el hombre no posee la certeza absoluta sobre su realización o existencia. En definitiva, la moderna Teoría de la Probabilidad es el resultado de la unión de muchos y continuos esfuerzos a lo largo de los siglos, que tras un proceso de continuas elaboraciones, modificaciones y desarrollos ha permitido a la Estadística ser el cuerpo de conocimiento que mejor estructura los fenómenos de azar.

De acuerdo con Rojas y Guzmán (2018) en su estudio sobre “Probabilidad, desde lo coloquial a lo formal”, de la Universidad de los Lagos (Chile), cuyo objetivo fue mostrar cronológicamente resultados probabilista desde lo coloquial a lo formal, en la cual se concluye que este estudio propone una nueva conceptualización de la noción de probabilidad, que no contradice las concepciones anteriores, sino que las integra. Esta nueva noción refiere a lo relativo de la concepción de probabilidad que es la siguiente: “La probabilidad es la cuantificación del grado de posibilidad de ocurrencia de cierto hecho o fenómeno que satisface reglas, en particular los axiomas de Kolmogorov”.

En tal sentido, Vidal y Szabó (2021) en su estudio sobre “Enfoques de enseñanza para aprender probabilidad en educación básica. Didáctica de la matemática para primer ciclo de educación básica” de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, cuyo objetivo fue determinar los enfoques de enseñanza que permiten aprender probabilidad en educación básica, concluyen que aprender probabilidad puede prevenir engaños durante el proceso de decidir, tal como indicaba Laplace “no hay ciencia más digna de nuestro estudio ni más útil para que se incluya en el sistema público de educación” (p. 206).

En este mismo orden de ideas, Calderón Torres, et. al, (2022) en su estudio sobre “Cálculo de probabilidades en tablas de contingencia por estudiantes chilenos de primer año medio”. De la Universidad Autónoma de Puebla. Revista de estudios y

experiencias en educación, cuyo objetivo establecer mecanismos que permitan tener suficientes reservas por concepto de primas.

1.2. Planteamiento del problema

La teoría de la probabilidad surgió por la necesidad de analizar los juegos de azar y con el paso del tiempo se ha convertido en una importante rama de las matemáticas que cuenta con profundas conexiones con otras disciplinas matemáticas y encuentra aplicaciones en física, estadística, biomedicina y economía. La base fundamental para el desarrollo de esta teoría fue la regla de Laplace, la cual nos permite determinar la probabilidad de ocurrencia (o no) de un suceso determinado. De lo antes expuesto surgen las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para aplicar la regla de Laplace?
2. ¿Cómo aplicar la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades?

1.3. Justificación

Esta investigación se justifica porque permitió reflexionar sobre la regla de Laplace en el cálculo de probabilidades y su importancia para describir y estudiar fenómenos aleatorios. Un caso particularmente importante son los juegos de azar, en los cuales la aplicación de la regla de Laplace aumenta la posibilidad de éxito.

Además, la comprensión de esta regla coadyuva a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la teoría básica de probabilidades y su posterior aplicación en la vida cotidiana.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Analizar la regla de Laplace para el cálculo de probabilidad sucesos equiprobables.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Estudiar las propiedades de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades.
2. Determinar cómo se puede usar la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades.

1.5. Alcances y límites

Esta investigación se enmarca en el campo de la probabilidad, específicamente al estudio de sucesos equiprobables. Se hizo un análisis minucioso de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades y algunas de sus aplicaciones.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presentan las definiciones y resultados básicos sobre la teoría de probabilidad que sustentan esta investigación.

2.1. Las leyes de la probabilidad

Las leyes más simples en las ciencias naturales son aquellas condiciones que determinan si ocurre o no algún evento de nuestro interés, pero en ambos casos, estas condiciones se pueden expresar de dos maneras (Miller y Freund, 2021):

1. Si el sistema (grupo o colección) de la condición S se cumple, entonces el evento A definitivamente ocurre;
2. Si se cumple un conjunto de condiciones S , entonces el evento A no ocurre.

En el primer caso, se dice que el evento A , con respecto a la condición establecida S , es un evento cierto o necesario, y en el segundo caso, un evento imposible. Por ejemplo, entre la presión atmosférica y la temperatura t entre 0° y 100° (condición establecida S) el agua debe estar en estado líquido (el evento A_1 es verdadero) y no puede estar en estado sólido o gaseoso (los eventos A_2 y A_3 no son posibles).

Un evento A que a veces ocurre y otras veces no ocurre bajo un conjunto de condiciones S se dice que es un evento aleatorio con respecto a ese conjunto de condiciones. Esto plantea la pregunta: ¿el evento casual A prueba que no hay leyes que relacionen el sistema condicional S con A ?

De acuerdo con Evans (2018), para una bombilla la ley de probabilidad viene dada por la función $\mathbf{P}(T)$, donde $\mathbf{P}(T)$ es la probabilidad de que la bombilla (hecha bajo las condiciones dadas) se vea como mínimo T horas. Una afirmación de que el evento A ocurre con alguna probabilidad bajo la condición S

$$\mathbf{P}(A/S) = p \tag{2.1.1}$$

es equivalente a decir que en una serie suficientemente larga de ensayos (es decir, la realización del conjunto de condiciones S), la frecuencia

$$v_r = \frac{\mu_r}{n_r} \quad (2.1.2)$$

de ocurrencia del suceso A (donde n_r es el número de ensayos realizados en la r -ésima serie, y μ_r el número de ellos en que ocurre A) son aproximadamente idénticas unas a otras y están próximas a p .

De manera mas puntual se presentan las siguientes propiedades (Mode, 2021):

1. La probabilidad de cualquier suceso es siempre mayor o igual que cero y menor o igual que 1

$$0 \leq p \leq 1$$

2. La probabilidad del suceso seguro es 1 y la del suceso imposible es 0
3. La probabilidad de cualquier suceso es siempre 1 menos la probabilidad de su complemento.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

4. Cuando dos sucesos son incompatibles (su intersección es cero, no tienen nada en común) la probabilidad de su unión es la suma de sus probabilidades. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5. Para dos sucesos cualesquieran A y B , se cumple que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2.2. Regla de Laplace

Para Calderón et. al, (2022), en un experimento aleatorio regular, la probabilidad de un suceso viene dada por:

$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables a que ocurra } A}{\text{Casos posibles}} = \frac{N^\circ \text{ de elementos de } A}{N^\circ \text{ de elementos de } E}$$

La probabilidad nos indica si es más o menos frecuente que ocurra dicho suceso. La probabilidad de un suceso siempre es un número entre 0 y 1 (ambos incluidos): $0 \leq p(A) \leq 1$, pues el número de casos favorables siempre es menor o igual al número de casos posibles.

Definición 2.2.1 Para Fernández (2019) un suceso seguro, es aquel que siempre ocurre al realizar el experimento. Por ejemplo, al lanzar una moneda el suceso $A =$ salir cara o cruz $= \{C, X\}$ siempre ocurre, pues al lanzar la moneda siempre sale cara o cruz. A es un suceso seguro. Observa que A coincide con el espacio muestral, E .

Definición 2.2.2 Según Rojas y Guzmán (2018), el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio es llamado espacio muestral, y es denotado por Ω .

Ejemplos.

1. El experimento de lanzar una moneda: $\Omega = \{a, s\}$, donde a denota águila y s denota sello.
2. El experimento de lanzar un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
3. El experimento de observar el tiempo de vida de un aparato eléctrico: $\Omega = [0, \infty)$.
4. El experimento de lanzar dos monedas consecutivamente:

$$\Omega = \{(a, a), (a, s), (s, a), (s, s)\}.$$

5. Experimento de contar el número de autos que cruzan en determinado intervalo de tiempo, digamos por día, por la caseta de peaje:

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Definición 2.2.3 Según Luna y Vaca (2019) la probabilidad del suceso seguro, es 1 : $p(\mathbf{E}) = 1$ Por tanto, si $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, entonces $p(x_1) + p(x_2) + \dots + p(x_n) = 1$

Definición 2.2.4 Suceso imposible. Es aquel que nunca ocurre. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, el suceso $A = \text{salir un número mayor que 6}$ nunca ocurre. A es un suceso imposible. El suceso imposible es el conjunto que no tiene ningún elemento. Este conjunto se llama conjunto vacío y se representa con el símbolo $\emptyset$. (Bernabeu, et. al, 2021))

Definición 2.2.5 Probabilidad del suceso imposible. La probabilidad del suceso imposible es 0 : $p(\emptyset) = 0$. (Campos, 2018).

2.2.1. Operaciones con sucesos

Unión de sucesos. La unión de dos sucesos A y B es otro suceso formado juntando los elementos de A y B . La unión de A y B se representa por $A \cup B$.

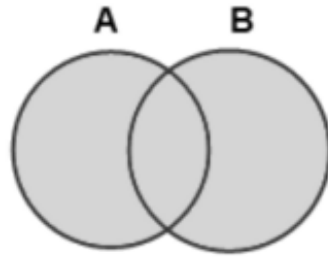


Figura 2.2.1: $A \cup B$ significa: ocurre A ó B

Ejemplo 2.2.1 En el lanzamiento de un dado, si tomamos los sucesos:

$$\begin{cases} A = \text{salir n}^\circ \text{ par} = \{2, 4, 6\} \\ B = \text{salir n}^\circ \text{ primo} = \{2, 3, 5\} \end{cases}$$

entonces $A \cup B = \text{salir par o primo} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Intersección de sucesos. La intersección de dos sucesos A y B es otro suceso formado por los elementos comunes de A y B . La intersección de los sucesos A y B se representa por $A \cap B$.

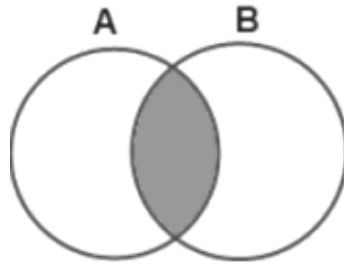


Figura 2.2.2: $A \cap B$ significa: ocurre A y B

Ejemplo 2.2.2 En el lanzamiento de un dado, si tomamos los sucesos:

$$\begin{cases} A = \text{salir n}^\circ \text{ par} = \{2, 4, 6\} \\ B = \text{salir n}^\circ \text{ primo} = \{2, 3, 5\} \end{cases}$$

entonces $A \cap B = \text{salir par y primo} = \{2\}$.

2.2.2. Probabilidad de la unión de dos sucesos

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

2.2.3. Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Dos sucesos A y B son compatibles cuando pueden ocurrir al mismo tiempo. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado los sucesos $A = \text{salir un número par}$ $B = \text{salir un número primo}$ son compatibles, pues si sale un 2 ocurren los dos sucesos a la vez: 2 es un número par y también es un número primo. Si A y B son compatibles, hay elementos comunes a los sucesos y por tanto $A \cap B \neq \emptyset$. (Miller y Freund, 2021)

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando no pueden ocurrir al mismo tiempo. Por ejemplo, si sacamos al azar una carta de la baraja, los sucesos $A = \text{salir un basto}$ $B = \text{salir una espada}$ son incompatibles, pues no puede salir a la vez un basto y una espada.

Si A y B son incompatibles, no hay elementos comunes a los sucesos y por tanto $A \cap B = \emptyset$. Si A y B son incompatibles, $p(A \cap B) = 0 \rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, siendo A y B incompatibles.

2.2.4. Suceso contrario o complementario

Dado un suceso A , el suceso contrario o complementario de A es aquel que expresa lo contrario que el suceso A . Se representa por A^C o también por $\bar{A}$. El suceso A^C está formado por los elementos del espacio muestral que no están en A . (Evans, 2018).

Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, si $A = \text{salir número par} = \{2, 4, 6\}$, entonces el suceso contrario es $A^C = \text{no salir número par} = \text{salir número impar} = \{1, 3, 5\}$.

Probabilidad del suceso contrario.

1. $p(A^c) = 1 - p(A)$
2. $p(A) = 1 - p(A^c)$

2.2.5. Diferencia de dos sucesos.

Dados dos sucesos A y B , se define $A - B$ como el suceso que expresa: ocurre A y no ocurre B . Es decir $A - B = A \cap B^C$. Los elementos de $A - B$ se obtienen tomando los elementos de A que no estén en B .

2.2.6. Probabilidad de la diferencia de sucesos.

$$\begin{cases} p(A - B) = p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) \\ p(B - A) = p(B \cap A^c) = p(B) - p(A \cap B) \end{cases} \quad (2.2.3)$$

2.3. Probabilidad en experimentos compuestos

2.3.1. Probabilidad condicionada

Dados dos sucesos, A y B , con $p(B) \neq 0$, se llama probabilidad de A condicionada a B a la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B . La probabilidad de A condicionada a B se representa por $p(A/B)$ y se puede calcular usando la fórmula:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad (2.3.4)$$

Si despejamos $p(A \cap B)$ de la fórmula anterior se obtiene:

$$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B) \quad (2.3.5)$$

Razonando de forma análoga para B condicionado a A :

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \quad (2.3.6)$$

$$p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A).$$

Sucesos independientes. Dos sucesos A y B son independientes si $p(A/B) = p(A)$ y $p(B/A) = p(B)$. Por tanto, si A y B son independientes

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

2.3.2. Teorema de la probabilidad total

Si A_1, A_2 son sucesos incompatibles con $A_1 \cup A_2 = E$ y A es un suceso cualquiera

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2)$$

$$\text{Luego } P(A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2)$$

2.3.3. Fórmulas de Bayes

De acuerdo con Barbier y Macris (2019), si A_1, A_2 son sucesos incompatibles tales que $A_1 \cup A_2 = E$ y A es un suceso de probabilidad no nula, entonces se cumple:

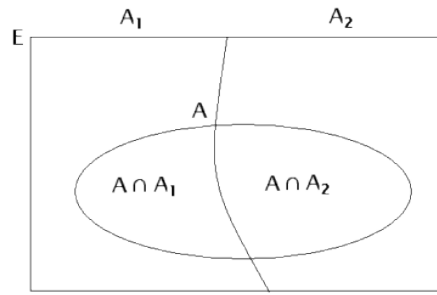


Figura 2.3.3: $P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2)$

$$P(A_1/A) = \frac{P(A_1) \cdot P(A/A_1)}{P(A)}, \quad P(A_2/A) = \frac{P(A_2) \cdot P(A/A_2)}{P(A)}$$

donde, según el teorema de la probabilidad total, $P(A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2)$.

2.4. Variables discretas y las continuas

Definición 2.4.1 Una variable aleatoria es discreta si solo puede tomar un conjunto finito o infinito numerable de valores distintos.

Ejemplos: Número de hijos en una familia (puede ser 0, 1, 2, 3, etc., pero no puede ser 1.5). Número de caras al lanzar un dado. Esperanza Matemática: Para una variable aleatoria discreta X , la esperanza matemática se calcula sumando los productos de cada valor posible de X por su probabilidad correspondiente.

Definición 2.4.2 Una variable aleatoria es continua si puede tomar cualquier valor en un intervalo dado de números reales.

Ejemplos: Altura de una persona (puede ser cualquier valor en un rango continuo). Tiempo que toma completar una tarea. Esperanza Matemática: Para una variable aleatoria continua X , la esperanza matemática se calcula mediante una integral que toma en cuenta la función de densidad de probabilidad de X .

Diferencias clave: Las variables aleatorias discretas toman valores específicos, mientras que las variables aleatorias continuas pueden tomar cualquier valor en un intervalo. La función de masa de probabilidad describe la probabilidad de cada valor individual para variables discretas, mientras que la función de densidad de probabilidad describe la probabilidad de intervalos para variables continuas. En el caso de variables discretas, la esperanza matemática se calcula mediante la suma de productos, mientras que para variables continuas, se utiliza una integral.

2.5. Esperanza matemática, momento y varianza de una variable aleatoria X

La esperanza matemática (o valor esperado), el momento y la varianza son conceptos importantes en la teoría de probabilidad y estadística, especialmente cuando se trabaja con variables aleatorias. Aquí se explico cada uno de ellos para una variable aleatoria X :

1. **Esperanza Matemática (Valor Esperado):** La esperanza matemática de una variable aleatoria X se denota comúnmente como $E(X)$ o μ (mu) y se define como la suma ponderada de todos los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria, cada uno ponderado por su probabilidad. Para una variable discreta X , la esperanza se calcula como:

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Para una variable continua, la fórmula se convierte en una integral:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de X . (Rojas, A., y Guzmán, I. (2018).

2. **Momento de Orden r :** El momento de orden r de una variable aleatoria X se denota comúnmente como $E(X^r)$ y se define como la esperanza matemática de X^r . Los momentos son útiles para describir la forma de la distribución de

probabilidad de una variable. El primer momento ($r = 1$) es simplemente la esperanza matemática. (Campos Bonilla, B. (2018).

3. **Varianza:** La varianza de una variable aleatoria X , denotada como $\text{Var}(X)$, mide la dispersión de los valores alrededor de la esperanza matemática. Se calcula como la esperanza del cuadrado de la diferencia entre cada valor y la esperanza matemática:

$$\text{Var}(X) = E [(X - \mu)^2]$$

Alternativamente, la varianza también se puede expresar como:

$$\text{Var}(X) = E (X^2) - [E(X)]^2$$

donde $E (X^2)$ es el segundo momento de X . (Evans, M. J. (2018).

2.6. Cálculo fraccional local de funciones de una variable

Desde la publicación del libro de Mandelbrot (1983), los fractales han resultado ser una herramienta de mucha utilidad en diversas áreas del conocimiento. En 2011, X.-J. Yang propuso el cálculo fraccional local en el contexto de los conjuntos fractales (o fraccionarios), el cual ha utilizado con éxito para describir problemas de aplicaciones en matemáticas y física.

2.6.1. Conjuntos fraccionarios de conjuntos de la recta real.

En esta sección, se presentan algunos elementos de la teoría de conjuntos fractales desarrollada por X.-J. Yang.

Definición 2.6.1 El conjunto α -tipo del conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ se define como el conjunto Ω^α , donde $0 < \alpha \leq 1$ es la dimensión fractal de Ω . El conjunto Ω^α se denomina conjunto fraccionario (o conjunto fractal) y Ω es llamado conjunto base del conjunto fraccional. El conjunto Ω^α es

$$\Omega^\alpha = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i^\alpha, b_i^\alpha),$$

si se puede establecer una correspondencia uno-a-uno con el subconjunto de $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$ de $\mathbb{R}$.

Los conjuntos de números de la recta real sobre un conjunto fractal, con dimensión fractal finita α ($0 < \alpha \leq 1$), se definen de la siguiente manera:

1. El conjunto de los números naturales α -tipo:

$$\mathbb{N}^{\alpha} = \{0^{\alpha}, 1^{\alpha}, 2^{\alpha}, \dots, n^{\alpha}, \dots\}.$$

2. El conjunto de los números enteros α -tipo:

$$\mathbb{Z}^{\alpha} = \{0^{\alpha}, \pm 1^{\alpha}, \pm 2^{\alpha}, \dots, \pm n^{\alpha}, \dots\}.$$

3. El conjunto de los números racionales α -tipo:

$$\mathbb{Q}^{\alpha} = \left\{ m^{\alpha} = \left(\frac{p}{q} \right)^{\alpha} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

4. El conjunto de los números irracionales α -tipo:

$$\mathbb{J}^{\alpha} = \left\{ m^{\alpha} \neq \left(\frac{p}{q} \right)^{\alpha} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

5. El conjunto de los números reales α -tipo:

$$\mathbb{R}^{\alpha} = \mathbb{Q}^{\alpha} \cup \mathbb{J}^{\alpha}.$$

Se denomina conjunto fractal a $\mathbb{R}^{\alpha}$ y a cualquier subconjunto de él. En $\mathbb{R}^{\alpha}$ se definen dos operaciones binarias, la adición (+) y la multiplicación ($\cdot$) como sigue:

- Adición:

$$+ : \mathbb{R}^{\alpha} \times \mathbb{R}^{\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}^{\alpha}$$

$$(a^{\alpha}, b^{\alpha}) \longmapsto a^{\alpha} + b^{\alpha} := (a + b)^{\alpha}.$$

- Multiplicación:

$$\cdot : \mathbb{R}^{\alpha} \times \mathbb{R}^{\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}^{\alpha}$$

$$(a^{\alpha}, b^{\alpha}) \longmapsto a^{\alpha} \cdot b^{\alpha} := a^{\alpha} b^{\alpha} = (ab)^{\alpha}$$

Definición 2.6.2 Suponga que M es un conjunto fractal con dimensión fractal α ($0 < \alpha \leq 1$) y $\Theta = M \cap [a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$. La función $\Upsilon^\alpha : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^\alpha$ se define de la siguiente manera

$$\Upsilon^\alpha(M \cap [a, b]) = (b - a)^\alpha.$$

Observación 2.6.1 De la igualdad (2.6.2) se obtiene que $\Upsilon^\alpha(M \cap [0, a + b]) = (a + b)^\alpha$, $\Upsilon^\alpha(M \cap [0, a]) = a^\alpha$ y $\Upsilon^\alpha(M \cap [0, b]) = b^\alpha$. Luego, por la definición de suma de números de la recta real, se tiene que

$$(a + b)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha,$$

lo que implica que

$$\Upsilon^\alpha(M \cap [0, a + b]) = \Upsilon^\alpha(M \cap [0, a]) + \Upsilon^\alpha(M \cap [0, b]).$$

Axiomas de campo fractal.

- $(\mathbb{R}^\alpha, +)$ es un grupo conmutativo:

$$(A_1) a^\alpha + b^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha.$$

$$(A_2) a^\alpha + b^\alpha = b^\alpha + a^\alpha = (a + b)^\alpha = (b + a)^\alpha.$$

$$(A_3) a^\alpha + (b^\alpha + c^\alpha) = (a^\alpha + b^\alpha) + c^\alpha.$$

$$(A_4) 0^\alpha \text{ es la identidad en } (\mathbb{R}^\alpha, +); \text{ esto es}$$

$$a^\alpha + 0^\alpha = 0^\alpha + a^\alpha = a^\alpha, \forall a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha.$$

$$(A_5) \forall a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha, (-a)^\alpha \text{ es el elemento inverso de } a^\alpha \text{ en } (\mathbb{R}^\alpha, +); \text{ esto es}$$

$$a^\alpha + (-a)^\alpha = (a + (-a))^\alpha = 0^\alpha.$$

- $(\mathbb{R}^\alpha \setminus \{0\}, \cdot)$ es un grupo conmutativo:

$$(M_1) a^\alpha b^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$$

$$(M_2) a^\alpha b^\alpha = b^\alpha a^\alpha = (ab)^\alpha = (ba)^\alpha.$$

$$(M_3) a^\alpha (b^\alpha c^\alpha) = (a^\alpha b^\alpha) c^\alpha.$$

$$(M_4) 1^\alpha \text{ es la identidad para } (\mathbb{R}^\alpha, \cdot); \text{ esto es}$$

$$a^\alpha 1^\alpha = 1^\alpha a^\alpha = a^\alpha, \forall a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha.$$

$(M_5) \forall a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha \setminus \{0^\alpha\}, \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha$ es el elemento inverso de a^α en $(\mathbb{R}^\alpha, \cdot)$; esto es

$$a^\alpha \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha = \left(a \left(\frac{1}{a}\right)\right)^\alpha = 1^\alpha.$$

- Axioma de distributividad: $a^\alpha (b^\alpha + c^\alpha) = a^\alpha b^\alpha + a^\alpha c^\alpha$.

Axiomas de campo fractal ordenado.

Si $a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$, entonces se dice que $a \in \mathbb{R}$ es su base. Como el conjunto $\mathbb{R}^\alpha$ se puede hacer corresponder uno a uno con $\mathbb{R}$, entonces también es posible establecer una correspondencia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^\alpha$. Esto implica las siguientes relaciones entre los elementos de $\mathbb{R}^\alpha$ y sus respectivas bases: $a^\alpha = b^\alpha \iff a = b$, $a^\alpha < b^\alpha \iff a < b$.

Un sistema de números de la recta real es un campo fractal ordenado, si satisface los axiomas de campo y tiene una relación $<$ que satisface los siguientes axiomas:

Ley de tricotomía. Para cada par de números a^α y b^α en $\mathbb{R}^\alpha$ se verifica sólo una de las siguientes relaciones $a^\alpha < b^\alpha, a^\alpha = b^\alpha$ o $b^\alpha < a^\alpha$.

(O_2) Ley de transitividad. $(a^\alpha < b^\alpha \wedge b^\alpha < c^\alpha) \implies a^\alpha < c^\alpha$.

$(O_3) a^\alpha < b^\alpha \implies a^\alpha + c^\alpha < b^\alpha + c^\alpha$.

$(O_4) (0^\alpha < a^\alpha \wedge 0^\alpha < b^\alpha) \implies (0^\alpha < a^\alpha b^\alpha \wedge 0^\alpha < a^\alpha + b^\alpha)$.

Los axiomas O_1 y O_3 expresan que $<$ es un orden lineal y el axioma O_4 combina la relación de orden con las funciones $+$ y $\cdot$.

Definición 2.6.3 Si $a^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$, entonces $|a^\alpha|$ se define de la siguiente manera:

$$|a^\alpha| = \begin{cases} a^\alpha & \text{si } a^\alpha \geq 0^\alpha \\ -a^\alpha & \text{si } -a^\alpha < 0^\alpha. \end{cases}$$

Como resultados de la definición (2.6.3), se tiene que:

1. $|a^\alpha b^\alpha| = |a^\alpha| |b^\alpha|.$
2. $|a^\alpha| - |b^\alpha| \leq |a^\alpha + b^\alpha| \leq |a^\alpha| + |b^\alpha|.$

2.7. Axioma de completitud de Dedekind generalizado.

Antes de enunciar el axioma de completitud se define una cortadura de Dedekind generalizada.

Definición 2.7.1 Una cortadura generalizada en un campo fractal ordenado es un par de conjuntos no vacíos Ω_1^α y Ω_2^α tales que:

- a) Cada número de la recta real está en Ω_1^α o está en Ω_2^α .
- b) Cada $a^\alpha \in \Omega_1^\alpha$ es menor que cada $b^\alpha \in \Omega_2^\alpha$. Ahora se presenta un axioma de completitud de Dedekind generalizado.
- c) Si los números de la recta real son un campo fractal ordenado tal que Ω_1^α y Ω_2^α forman un cortadura, entonces existe un número r^α que está en Ω_1^α o está en Ω_2^α y todos los demás números en Ω_1^α satisfacen $a^\alpha < r^\alpha$ y en Ω_2^α satisfacen $b^\alpha < r^\alpha$.

2.7.1. Límite fraccional local

A continuación, se presentan las definiciones de función continua fraccionaria local y derivada fraccionaria local y se exponen las principales propiedades de la derivada fraccionaria local.

Definición 2.7.2 Suponga que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^\alpha$ es una función. El número $L^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ se denomina el límite generalizado de $f(x)$ cuando x tiende a a (o límite de $f(x)$ en a), si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L^\alpha| < \varepsilon^\alpha$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Esto se denota por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L^\alpha$ y se dice que $f(x)$ tiende a L^α cuando x tiende a a (en símbolos $f(x) \longrightarrow L^\alpha$ cuando $x \longrightarrow a$).

El límite generalizado tiene las siguientes propiedades. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L^\alpha$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M^\alpha$, entonces:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L^\alpha + M^\alpha.$
2. $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L^\alpha|.$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = L^\alpha M^\alpha.$
4. Si $M^\alpha \neq 0^\alpha$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L^\alpha}{M^\alpha}.$$

Definición 2.7.3 Una función no diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ se llama continua fraccionaria local en $x_0 \in \mathbb{R}$, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha,$$

siempre $x \in \mathbb{R}$ y $0 < |x - x_0| < \delta$. Esto se escribe como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(x_0)$.

Una función es continua fraccionaria local en un intervalo I , si la función f es continua fraccional local en cada punto de I , esto se denota por $f \in C_\alpha(I)$.

2.7.2. Definición y propiedades la derivada fraccionaria local

Seguidamente, se exhibe la definición y las propiedades de la derivada fraccionaria local para funciones no diferenciables definidas sobre un conjunto fractal.

Definición 2.7.4 La derivada fraccionaria local de f de orden α en $x = x_0$ está definida por

$$f^{(\alpha)}(x_0) = {}_{x_0}D_x^\alpha f(x) = \left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Gamma(1+\alpha)(f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^\alpha} \quad (2.7.7)$$

donde Γ es la función Gamma. La fórmula (2.7.7) se puede expresar de la siguiente manera:

$${}_{x_0}D_x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{\frac{(x-x_0)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}}$$

donde $\frac{(x-x_0)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ es la función de masa fractal del conjunto $C_\alpha(x, x_0)$.

Por otro lado, si se hace $\Delta x = x - x_0$, entonces $x = \Delta x + x_0$ y $\Delta x \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow x_0$, por lo que la fórmula (2.7.7) también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\left. \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(1+\alpha) (f(\Delta x + x_0) - f(x_0))}{(\Delta x)^\alpha}.$$

Ejemplo 2.7.1 A continuación se calcula la derivada fraccionaria local con respecto a x de $f(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ usando la definición . Se aplica directamente la definición de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(1+\alpha)(f(\Delta x + x) - f(x))}{(\Delta x)^\alpha} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(1+\alpha) \left(\frac{(\Delta x + x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right)}{(\Delta x)^\alpha} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x + x)^\alpha - x^\alpha}{(\Delta x)^\alpha} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^\alpha + x^\alpha - x^\alpha}{(\Delta x)^\alpha} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^\alpha}{(\Delta x)^\alpha} \\ &= 1^\alpha. \end{aligned}$$

Si existe $f^{((k+1)\alpha)}(x) = \overbrace{D_x^\alpha \cdots D_x^\alpha}^{k+1 \text{ veces}} f(x)$ para todo $x \in I \subseteq \mathbb{R}$, esto se denota $f \in D_{(k+1)\alpha}(I)$, donde $k = 0, 1, 2, \dots$

Seguidamente se exponen las reglas básicas de la derivada fraccionaria local. Suponga que $f, g \in D_\alpha(I)$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo. Las reglas de la derivada fraccionaria local son las siguientes:

1. $D_x^\alpha(f(x) \pm g(x)) = D_x^\alpha f(x) \pm D_x^\alpha g(x).$
2. $D_x^\alpha(f(x)g(x)) = g(x)D_x^\alpha f(x) + f(x)D_x^\alpha g(x).$
3. $D_x^\alpha \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)D_x^\alpha f(x) + f(x)D_x^\alpha g(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0.$
4. $D_x^\alpha(Cf(x)) = CD_x^\alpha f(x),$ donde C es una constante.

5. Si $y(x) = (f \circ u)(x)$ con $u(x) = g(x)$, entonces $D_x^\alpha y(x) = f^{(\alpha)}(g(x)) (g^{(1)}(x))^\alpha$, cuando $f^{(\alpha)}(g(x))$ y $g^{(1)}(x)$ existen.

Estas fórmulas generalizan las reglas de diferenciación clásicas de funciones reales de una variable real.

2.7.3. Integral fraccional local

Definición 2.7.5 Suponga que $f \in C_\alpha[a, b]$. La integral fraccional local de f de orden α esta dada por

$$\begin{aligned} {}_a I_b^{(\alpha)} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \int_a^b f(t) (dt)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) (\Delta t_j)^\alpha, \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

con $\Delta t = \max \{\Delta t_0, \Delta t_1, \dots, \Delta t_{N-1}\}$ y $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, para $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, donde $t_0 = a < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_{N-1} < t_N = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$.

Si ${}_a I_x^{(\alpha)} f$ existe para cualquier $x \in [a, b]$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$, entonces se escribe $f \in I_x^{(\alpha)}[a, b]$.

Por conveniencia, se asume que:

1. ${}_a I_a^{(\alpha)} f(x) = 0$ si $a = b$.
2. ${}_a I_b^{(\alpha)} f(x) = -{}_b I_a^{(\alpha)} f(x)$, si $a < b$.

2.7.4. Propiedades de la integral fraccional local

Si $f, g \in C_\alpha[a, b]$, entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. ${}_a I_b^{(\alpha)} [f(x) \pm g(x)] = {}_a I_b^{(\alpha)} f(x) \pm {}_a I_b^{(\alpha)} g(x)$.
2. ${}_a I_b^{(\alpha)} [Cf(x)] = C {}_a I_b^{(\alpha)} f(x)$, donde C constante.

3. Si $f(x) = 1$, entonces ${}_aI_b^{(\alpha)}1 = \frac{(b-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

4. Si $f(x) \geq 0$, entonces ${}_aI_b^{(\alpha)}f(x) \geq 0$.

5. Si $f(x) \geq g(x)$, entonces ${}_aI_b^{(\alpha)}f(x) \geq {}_aI_b^{(\alpha)}g(x)$.

6. $\left| {}_aI_b^{(\alpha)}f(x) \right| \leq {}_aI_b^{(\alpha)}|f(x)|$.

7. Si $f(x) = g^{(\alpha)}(x) \in C_\alpha[a, b]$, entonces ${}_aI_b^{(\alpha)}f(x) = g(b) - g(a)$.

8. Si $g(x) \in C_1[a, b]$ y $(f \circ g)(s) \in C_\alpha[g(a), g(b)]$, entonces

$${}_aI_b^{(\alpha)}(f \circ g)(s) [g^{(1)}(s)]^\alpha = {}_{g(a)}I_{g(b)}^{(\alpha)}f(x).$$

9. Si $f, g \in D_\alpha[a, b]$ y $f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)} \in C_\alpha[a, b]$, entonces

$${}_aI_b^{(\alpha)}f(t)g^{(\alpha)}(t) = [f(t)g(t)]_a^b - {}_aI_b^{(\alpha)}f^{(\alpha)}(t)g(t)$$

10.

$$\frac{1^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b x^{k\alpha} (dx)^\alpha = \frac{\Gamma(1+k\alpha)}{\Gamma(1+(k+1)\alpha)} (b^{(k+1)\alpha} - a^{(k+1)\alpha}).$$

Estas fórmulas generalizan las reglas de integración clásicas de funciones reales de una variable real.

Ejemplo 2.7.2 Para ilustrar las propiedades antes descritas, a continuación se calculan:

$$1. {}_0I_1^{(\alpha)}t^\alpha = \frac{1^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 t^\alpha (dt)^\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)}.$$

$$2. {}_0I_1^{(\alpha)}t^{2\alpha} = \frac{1^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^1 t^{2\alpha} (dt)^\alpha = \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}.$$

$$3. {}_0I_1^{(\alpha)}t^\alpha(1-t)^\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)}.$$

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

En este capítulo se describen los aspectos metodológicos de la investigación, tales como el método, el diseño, el tipo de investigación, el enfoque y el procedimiento para desarrollar la investigación.

3.1. Método de investigación

En esta investigación el método a utilizar fue el Analítico-deductivo. Específicamente, se analizaron trabajos previos referentes al tema para conocer las técnicas empleadas, plantear problemas, dar extensiones de algunos resultados clásicos de la regla de Laplace y plantear generalizaciones para dar nuevas ideas referentes al tema de estudio. (Inacio, 2019).

3.2. Diseño de investigación

La presente investigación, según la búsqueda de la causa, tuvo un diseño no experimental ya que no se manipularon variables para lograr los objetivos propuestos. En relación a la duración de la investigación, el diseño es transversal ya que se desarrolló durante un período de tiempo definido. En tal sentido, según Maxwell (2019) la investigación tiene un diseño analítico.

3.3. Tipo de investigación

La investigación es documental y descriptiva. Es documental porque se basó en revisiones bibliográficas tales como: libros, tesis y artículos científicos. Y es descriptiva porque se estudian las características de la la regla de Laplace, sus aplicaciones y se establecen generalizaciones utilizando cálculo fraccional local.

3.4. Enfoque de investigación

Según Ortega (2018), una investigación es cualitativa si recopila y analiza datos no numéricos para comprender conceptos, opiniones o experiencias, así como datos

sobre experiencias vividas, emociones o comportamientos, con los significados que las personas les atribuyen. Por esta razón, los resultados se expresan en palabras. En tal sentido, la investigación se desarrolló bajo un enfoque cualitativo, debido a que se analizó el cálculo de probabilidades usando la regla de Laplace.

3.5. Procedimiento de investigación

La investigación se ejecutó en varias etapas para alcanzar los objetivos establecidos. Inicialmente se efectuó una exhaustiva y amplia revisión bibliográfica sobre la teoría de probabilidad. Posteriormente, se analizaron las principales definiciones y teoremas para dar respuesta a los problemas planteados y se finalizó con una serie de conclusiones y líneas futuras de investigación.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se generaliza la regla de Laplace para variables aleatorias utilizando el cálculo fraccional local. Específicamente se generalizan los conceptos de función de densidad de probabilidad, probabilidad de una variable aleatoria continua X , función de distribución acumulativa, esperanza matemática, varianza y p -momento.

4.1. Función de densidad de probabilidad generalizada

Definición 4.1.1 Sea X una variable aleatoria continua. Se definen

1. La función

$$p : [a, b] \rightarrow [0^\alpha, 1^\alpha],$$

tal que

$$\text{i) } p(x) \geq 0^\alpha$$

$$\text{II) } \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(dx)^\alpha = 1^\alpha,$$

se denomina función de densidad de probabilidad generalizada de X .

2. Si la probabilidad de que X se encuentre entre a y b es

$$P_\alpha(a < X < b) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^b p(x)(dx)^\alpha.$$

3. La correspondiente función de distribución acumulativa generalizada está dada por

$$P_{r_\alpha}(X \leq x) = F_\alpha(x) := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_a^x p(t)(dt)^\alpha. \quad (4.1.1)$$

Observación 4.1.1 i) $P_\alpha(a < X < b) = P_\alpha(a \leq X \leq b) = P_\alpha(a \leq X < b) = P_\alpha(a < X \leq b)$. ii) $F_\alpha(x) = P_{r_\alpha}(X \leq x) = P_{r_\alpha}(-\infty < X \leq x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^x p(t)(dt)^\alpha$. iii) Derivando (1.1.1) se obtiene

$$dF_\alpha(x) = p(x),$$

en todos los puntos donde p es continua fraccional local.

Ejemolo. Determine el valor de la constante $c^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$ para el cual la función

$$P : [0, 3] \mapsto \mathbb{R}^\alpha$$

$$x \mapsto p(x) = \begin{cases} c^\alpha x^{2\alpha} & 0 < x < 3 \\ 0^\alpha & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (4.1.2)$$

sea una función de densidad de probabilidad de generalizada, calcule $P_\alpha(1 < X < 2)$ y determine la función de distribución acumulativa generalizada.

Solución. Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(dx)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^3 c^\alpha x^{2\alpha}(dx)^\alpha \\ &= c^\alpha \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} x^{3\alpha} \Big|_0^3 \\ &= c^\alpha \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} (27)^\alpha, \end{aligned}$$

entonces

$$c^\alpha \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} (27)^\alpha = 1^\alpha \iff c^\alpha = \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{(27)^\alpha \Gamma(1+2\alpha)}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned} P(1 < x < 2) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_1^2 \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{(27)^\alpha \Gamma(1+2\alpha)} x^{2\alpha}(dx)^\alpha \\ &= \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{(27)^\alpha \Gamma(1+2\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_1^2 x^{2\alpha}(dx)^\alpha \\ &= \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{(27)^\alpha \Gamma(1+2\alpha)} \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} (2^{3\alpha} - 1^\alpha) \\ &= \frac{2^{3\alpha}}{(27)^\alpha} - \frac{1^\alpha}{(27)^\alpha} \\ &= \left(\frac{8}{27} - \frac{1}{27} \right)^\alpha = \left(\frac{7}{27} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Por otro lado, para determinar la función de distribución acumulativa generalizada de (4.1.2) se deben analizar los casos $x < 0$, $0 \leq x < 3$ y $x \geq 3$.

Si $x < 0$, entonces

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^x p(t)(dt)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^x 0^\alpha (dt)^\alpha = 0^\alpha. \end{aligned}$$

Si $0 \leq x < 3$, entonces

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x P(t)(dt)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{(27)^\alpha \Gamma(1+2\alpha)} \tau^{2\alpha} (dt)^\alpha \\ &= \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{(27)^\alpha \Gamma(1+2\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^x t^{2\alpha} (dt)^\alpha \\ &= \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{(27)^\alpha \Gamma(1+2\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma(1+3\alpha)} t^{3\alpha} \Big|_0^x \\ &= \frac{x^{3\alpha}}{(27)^\alpha} \\ &= \left(\frac{x^3}{27} \right)^\alpha. \end{aligned}$$

Si $x \geq 3$, entonces

$$\begin{aligned} F_\alpha(x) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^3 p(t)(dt)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_3^x p(t)(dt)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^3 \frac{\Gamma(1+3\alpha)}{(27)^\alpha \Gamma(1+2\alpha)} t^{2\alpha} (dt)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_3^\alpha 0^\alpha (dt)^\alpha \\ &= \left(\frac{1}{27} \right)^\alpha t^{3\alpha} \Big|_0^3 = \left(\frac{1}{27} \right)^\alpha \cdot 3^{3\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{27} \right)^\alpha (27)^\alpha \\ &= 1^\alpha. \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 0^\alpha & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x^3}{27} \right)^\alpha & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1^\alpha & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

4.2. Función de densidad de probabilidad conjunta generalizada

En esta sección se generaliza los conceptos de función de densidad de probabilidad generalizada, probabilidad y función de distribución acumulativa generalizada para dos o más variables aleatorias.

Definición 4.2.1 Sean X y Y dos variables aleatorias continuas. Se definen

1. La función

$$p : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow [0^\alpha, 1^\alpha]$$

tal que

$$\text{I) } p(x, y) \geq 0^\alpha$$

$$\text{II) } \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int^{(2)} p(x, y) (dx)^\alpha (dy)^\alpha = 1^\alpha,$$

se denomina función de densidad de probabilidad conjunta generalizada de X y Y .

2. La probabilidad de que X está entre a y b en tanto que Y está entre c y d está dada por

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=a}^b \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{y=c}^d p(x, y) (dx)^\alpha (dy)^\alpha$$

La función de distribución acumulativa generalizada de X y Y está dada por

$$P_{r_\alpha}(X \leq x, Y \leq y) = F_\alpha(x, y) := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{u=-\infty}^x \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{v=-\infty}^y p(u, v) (du)^\alpha (dv)^\alpha \quad (4.2.3)$$

3. Las funciones de distribución acumulativa generalizada de X y Y están dadas por

$$P_{r_\alpha}(X \leq x) = F_{1\alpha}(x) := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{u=-\infty}^x \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{v=-\infty}^{\infty} p(u, v) (du)^\alpha (dv)^\alpha \quad (4.2.4)$$

y

$$P_{r_\alpha}(Y \leq y) = F_{2\alpha}(y) := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{u=-\infty}^x \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{v=-\infty}^y p(u, v)(du)^\alpha (dv)^\alpha \quad (4.2.5)$$

respectivamente.

Observación 4.2.1

I) Derivando (4.2.3) se obtiene

$$\frac{\partial^{2\alpha} F_\alpha(x, y)}{\partial^\alpha x \partial^\alpha y} = p(x, y).$$

II) Derivando (4.2.4) con respecto a x se obtiene

$$p_{1\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{v=-\infty}^{\infty} p(x, v)(dv)^\alpha, \quad (4.2.6)$$

que es la función de densidad acumulativa generalizada de X .

III) Derivando (4.2.5) con respecto a y se obtiene

$$P_{2\alpha}(y) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{u=-\infty}^{\infty} p(u, y)(du)^\alpha \quad (4.2.7)$$

que es la función de densidad acumulativa generalizada de Y .

Ejemplo. Sean X y Y dos variables aleatorias continuas. Consideremos la función

$$p : [0, 4] \times [1, 5] \longrightarrow \mathbb{R}^\alpha$$

$$(x, y) \longrightarrow p(x, y) = \begin{cases} c^\alpha x^\alpha y^\alpha & 0 < x < 4, 1 < y < 5 \\ 0^\alpha & \text{en otro parte.} \end{cases}$$

Determine el valor de $c^\alpha \in \mathbb{R}$ para que p sea una función de densidad de probabilidad.

Determine $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$.

Calcule $P(x \geq 3, y \leq 2)$.

Solución. Debido a que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{-\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) (dx)^{\alpha} (dy)^{\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=0}^4 \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{y=1}^5 c^{\alpha} x^{\alpha} y^{\alpha} (dx)^{\alpha} (dy)^{\alpha} \\
&= c^{\alpha} \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=0}^4 \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{y=1}^5 x^{\alpha} y^{\alpha} (dy)^{\alpha} \right) \right] (dx)^{\alpha} \\
&= c^{\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=0}^4 \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} x^{\alpha} y^{2\alpha} \Big|_1^5 (dx)^{\alpha} \right) \\
&= c^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=0}^4 ((25)^{\alpha} x^{\alpha} - x^{\alpha}) (dx)^{\alpha} \right] \\
&= c^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} \left(\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=0}^4 (24)^{\alpha} x^{\alpha} (dx)^{\alpha} \right) \\
&= c^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} (24)^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} x^{2\alpha} \Big|_0^4 \\
&= (24)^{\alpha} c^{\alpha} \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma^2(1+2\alpha)} (4)^{2\alpha} \\
&= (384)^{\alpha} c^{\alpha} \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma^2(1+2\alpha)},
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \Big|_{-\infty}^{\infty} P(x, y) dx \Big)^{\alpha} (dy)^{\alpha} = 1^{\alpha} \\
&\Leftrightarrow (384)^{\alpha} c^{\alpha} \frac{\Gamma^2(1+\alpha)}{\Gamma^2(1+2\alpha)} = 1^{\alpha} \\
&\Leftrightarrow c^{\alpha} = \frac{\Gamma^2(1+2\alpha)}{(384)^{\alpha} \Gamma^2(1+\alpha)}.
\end{aligned}$$

Es decir, para que p sea una función de densidad de probabilidad generalizadas debe ocurrir que

$$c^{\alpha} = \frac{\Gamma^2(1+2\alpha)}{(384)^{\alpha} \Gamma^2(1+\alpha)}.$$

Para calcular $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$ se usa la definición de la siguiente manera

$$P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=1}^2 \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{y=2}^3 \frac{r^2(1+2\alpha)}{(384^4)^\alpha \Gamma^1(1+\alpha)} x^\alpha y^\alpha (dx)^\alpha (dy)^\alpha \\
&= \frac{\Gamma^2(1+2\alpha)}{(384)^\alpha \Gamma^2(1+\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=1}^2 \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{y=2}^3 x^\alpha y^\alpha (dx)^\alpha (dy)^\alpha \\
&= \frac{\Gamma^2(1+2\alpha)}{(384)^\alpha \Gamma^2(1+\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=1}^2 \frac{x^\alpha \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} y^{2\alpha} \Big|_2^3 (dx)^\alpha \\
&= \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{(384)^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=1}^2 5^\alpha x^\alpha (dx)^\alpha \\
&= \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{(384)^\alpha \Gamma(1+\alpha)} \frac{5^\alpha \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+2\alpha)} x^{2\alpha} \Big|_1^2 \\
&= \left(\frac{5}{384} \right)^\alpha (2^{2\alpha} - 1^\alpha) \\
&= \left(\frac{5}{384} \right)^\alpha (4^\alpha - 1^\alpha) \\
&= \left(\frac{5}{384} \right)^\alpha (3^\alpha) \\
&= \left(\frac{15}{384} \right)^\alpha \\
&= \left(\frac{5}{128} \right)^\alpha .
\end{aligned}$$

De forma analoga se calcula $P(x \geq 3, y \leq 2)$,

$$\begin{aligned}
&P(X \geq 3, Y \leq 2) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=3}^4 \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{y=1}^2 \frac{\Gamma^2(1+2\alpha)}{(384)^\alpha \Gamma^2(1+\alpha)} x^\alpha y^\alpha (dx)^\alpha (dy)^\alpha \\
&= \left(\frac{7}{128} \right)^\alpha .
\end{aligned}$$

Es natural ofrecer una generalización para el caso de de tres variables aleatorias X, Y y Z .

Definición 4.2.2 Sean X, Y y Z tres variables aleatorias continuas, se definen:

1. La función t al que

$$P : [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow [0^\alpha, 1^\alpha]$$

- 1) $p(x, y, z) \geq 0^\alpha$

$$\text{II)} \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)(dx)^{\alpha}(dy)^{\alpha}(dz)^{\alpha} = 1^{\alpha},$$

se denomina función de densidad de probabilidad conjunta generalizada de X y Y y Z

2. La probabilidad de que X esté entre a y b y Y esté entre c y d mientras Z esté entre e y f está dada por

$$\begin{aligned} & P(a < X < b, c < Y < d, e < Z < f) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x=a}^b \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{y=c}^d \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{z=e}^f p(x, y, z)(dx)^{\alpha}(dy)^{\alpha}(dz)^{\alpha}. \end{aligned}$$

3. La función de distribución acumulativa generalizada de X, Y y Z está dada por

$$\begin{aligned} & P_{r_{\alpha}}(X \leq x, Y \leq y, Z \leq z) = F_{\alpha}(x, y, z) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{u=-\infty}^x \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{v=-\infty}^y \frac{1}{\Gamma(a+\alpha)} \int_{w=-\infty}^z p(u, v, w)(du)^{\alpha}(dv)^{\alpha}(dw)^{\alpha} \end{aligned}$$

4. Las funciones de distribución acumulativas generalizadas de X, Y y Z están dadas por

$$\begin{aligned} & P_{r_{\alpha}}(X \leq x) = F_{1\alpha}(x) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{u=-\infty}^x \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(a+\alpha)} \int_{w=-\infty}^{\infty} p(u, v, w)(du)^{\alpha}(dv)^{\alpha}(dw)^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_{r_{\alpha}}(Y \leq y) = F_{2\alpha}(y) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{v=-\infty}^y \frac{1}{\Gamma(a+\alpha)} \int_{w=-\infty}^{\infty} p(u, v, w)(du)^{\alpha}(dv)^{\alpha}(dw)^{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & P_{r_{\alpha}}(Z \leq z) = F_{3\alpha}(z) \\ &:= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{u=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{v=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(a+\alpha)} \int_{w=-\infty}^z p(u, v, w)(du)^{\alpha}(dv)^{\alpha}(dw)^{\alpha} \end{aligned}$$

respectivamente.

4.3. Esperanza matemática generalizada

En esta sección se introducen las definiciones de esperanza matemática generalizada, varianza generalizada y p -momento generalizado sobre conjunto fractales y se demuestran alguna de sus propiedades.

Definición 4.3.1 Sea X una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad generalizada $p(X)$. Se definen

1. La esperanza matemáticas generalizada está dada por

$$\mu_\alpha = E^\alpha(X) := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha p(t)(dt)^\alpha.$$

2. La varianza generalizada generalizada está dada por

$$\text{Var}_\alpha(X) = \sigma_{\mu_\alpha}^2(X) := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_\alpha)^{2\alpha} P(t)(dt)^\alpha.$$

3. La p -momento generalizado alrededor de μ_α es

$$E_p^\alpha(X) := \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mu_\alpha)^{p\alpha} p(t)(dt), \text{ con } p \in \mathbb{N}$$

Observación 4.3.1

- I. Si $\mu_\alpha = 0$, entonces

$$E_p^\alpha(X) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t^{p\alpha} p(t)(dt)^\alpha$$

- II. Si $\alpha = 1$ se obtienen las definiciones clásicas de esperanza matemática, varianza y p -momento.

El siguiente teorema presenta algunas propiedades de la esperanza matemática generalizada

Teorema 4.3.1 Sean X y Y variables aleatorias y $k^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$, entonces

- I) $E^\alpha(k^\alpha X) = k E^\alpha(X).$

- II) $E^\alpha(X + k^\alpha) = E(X) + k^\alpha.$

$$\text{III)} \quad E^\alpha(X + Y) = E^\alpha(X) + E^\alpha(Y).$$

$$\text{IV)} \quad E^\alpha(XY) = E^\alpha(X)E^\alpha(Y), \text{ si } X \text{ y } Y \text{ son variables independientes.}$$

Demostración. Aplicando la definición de esperanza matemática generalizada se obtiene los siguientes resultados:

I)

$$\begin{aligned} E^\alpha(k^\alpha x) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} k^\alpha t^\alpha p(t)(dt)^\alpha \\ &= k^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t^\alpha p(t)(dt)^\alpha \\ &= k^\alpha E^\alpha(X). \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} E^\alpha(X + k^\alpha) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} (t + k^\alpha) p(t)(dt)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t p(t)(dt)^\alpha + k^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} p(t)(dt)^\alpha \\ &= E^\alpha(X) + k^\alpha, \end{aligned}$$

$$\text{debido a que } \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} p(t)(dt)^\alpha = 1.$$

III) Por las igualdades (4.2.6) y (4.2.7) se obtiene

$$\begin{aligned} E^\alpha(X + Y) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) p(x, y)(dx)^\alpha(dy)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, y)(dx)^\alpha(dy)^\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} y p(x, y)(dx)^\alpha(dy)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} x P_{1\alpha}(x)(dx)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} y P_{2\alpha}(y)(dy)^\alpha \\ &= E^\alpha(X) + E^\alpha(Y) \end{aligned}$$

IV)

$$\begin{aligned}
E^\alpha(XY) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(x,y)(dx)^\alpha(dy)^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} xyP_{1\alpha}(x)P_{2\alpha}(y)(dx)^\alpha(dy)^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(xP_{1\alpha}(x) \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} yP_{2\alpha}(y)(dy)^\alpha \right) (dx)^\alpha \\
&= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} xP_{1\alpha}(X)E(Y)(dx)^\alpha \\
&= E^\alpha(X)E^\alpha(Y).
\end{aligned}$$

□

Corolario 4.3.1 Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son n variables aleatorias continuas, entonces

- I) $E^\alpha(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E^\alpha(X_1) + E^\alpha(X_2) + \dots + E^\alpha(X_n)$, si cada $E^\alpha(X_i)$, con $i = 1, 2, \dots, n$, existen.
- II) $E^\alpha(X_1, X_2 \dots X_n) = E^\alpha(X_1) E^\alpha(X_2) \dots E^\alpha(X_n)$, si las variables aleatorias son independientes.

Proposición 4.3.1 Sea X una variable aleatoria continua y $k^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$, entonces

- I) $\text{Var}_\alpha(X + k^\alpha) = \text{Var}_\alpha(X)$.
- II) $\text{Var}_\alpha(k^\alpha X) = k^{2\alpha} \text{Var}_\alpha(X)$.
- III) $\text{Var}_\alpha(X) = \text{Var}_\alpha(X^2) - [E^\alpha(X)]^2$.

Demostración. Los resultados se obtienen aplicando la definición 4.3.1.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

En este capítulo se exponen las conclusiones obtenidas del desarrollo de la investigación y algunas posibles líneas de investigación que esta puede inspirar.

5.1. Conclusiones

En el transcurso de este análisis sobre las propiedades de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades, se concluye que:

- En cuanto a la función de densidad de probabilidad generalizada para variables aleatorias continuas, cuya definición se da en la ecuación (4.2.1) en el intervalo $[a, b]$, facilitó las condiciones fundamentales de no negatividad y normalización. En el mismo orden, la función de distribución acumulativa generalizada en la ecuación (4.2.2), resultó ser un recurso valioso para calcular la probabilidad de que la variable aleatoria se sitúe en intervalos específicos.
- Se presentan resultados importantes a partir de la función de distribución acumulativa generalizada, siendo las ecuaciones (4.2.3), (4.2.4) y (4.2.5) representativas de derivadas y funciones acumulativas específicas para variables individuales. Lo cual resulta ser esencial para comprender y aplicar de manera efectiva el método de Laplace en el cálculo de probabilidades.
- Los resultados teóricos obtenidos se pueden aplicar para resolver ejemplos prácticos la determinación de la constante c^α para una función sea de densidad de probabilidad, lo cual se muestra en la ecuación (4.2.6). Además se aplicaron con éxito los conceptos teóricos a otras situaciones concretas. El cálculo de $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$ mediante la ecuación (4.2.7), evidenció la utilidad y aplicabilidad directa de las fórmulas establecidas.
- En el caso de dos variables aleatorias, las ecuaciones (4.2.8) y (4.2.9) representan funciones de distribución acumulativa generalizadas para X e Y , respectivamente, lo cual enriqueció la comprensión teórica en contextos más complejos.

- Los conceptos de función de densidad de probabilidad generalizada, función de distribución acumulativa generalizada, de probabilidad se pueden extender para n variables aleatorias continuas

En cuanto a como se puede usar la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades, se han presentado las definiciones y propiedades de la esperanza matemática generalizada, la varianza y el momento generalizado p en conjuntos fractales para variables aleatorias continuas, más precisamente se concluye que:

- A partir de la definición 4.2.1, se establecieron las expresiones para la esperanza matemática generalizada, la varianza generalizada y el momento generalizado alrededor de μ_α , las mismas se representaron por las ecuaciones (4.3.1), (4.3.2) y (4.3.3) respectivamente, y se demostró que, cuando $\mu_\alpha = 0$, el momento generalizado $E_p^\alpha(X)$ toma una forma específica, como se indicó en la ecuación (4.3.4).
- El teorema 4.2.1 presentó propiedades importantes de la esperanza matemática generalizada, tales como la linealidad, desplazamiento y aditividad de la esperanza en conjuntos fractales. Estos hallazgos fueron esenciales para comprender el comportamiento de las variables aleatorias continuas en contextos más complejos.
- Los resultados presentados en el capítulo 4 generalizan resultados clásicos de la teoría de probabilidad, ya que corresponden al particular $\alpha = 1$.

5.2. Líneas futuras de investigaciones.

Tras analizar este tema de investigación sobre el análisis de la regla de Laplace aplicado al cálculo de la probabilidad, se presentan algunas líneas de investigación para futuros trabajos:

- Aplicación de Técnicas Modernas de Estadística Bayesiana para Mejorar la Precisión en la Estimación de Probabilidades usando la Regla de Laplace.

- Evaluación Crítica de la Aplicación de la Regla de Laplace en Problemas de Probabilidad en Grandes Conjuntos de Datos.

Referencias

- Alonso D. (2019). Diseño de la investigación. Con-Ciencia Serrana Boletín Científico de la Escuela Preparatoria Ixtlahuaco, 1(2), 19-20.
- Barbier, J., & Macris, N. (2019). The adaptive interpolation method: a simple scheme to prove replica formulas in Bayesian inference. *Probability theory and related fields*, 174, 1133-1185.
- Bernabeu, M. D. C. B., Arroyo, R. Á., Solís, L. A. H., & Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA*, 15(4), 267-288.
- Calderón T., D., García, J. I., Fernández C., N., y Hernández A., (2022). Cálculo de probabilidades en tablas de contingencia por estudiantes chilenos de primer año medio. *Revista de estudios y experiencias en educación*, 21(47), 50-74.
- Calderón Torres, D., García-García, J. I., Fernández Coronado, N., & Hernández Arredondo, E. (2022). Cálculo de probabilidades en tablas de contingencia por estudiantes chilenos de primer año medio. *Revista de estudios y experiencias en educación*, 21(47), 50-74.
- Campos Bonilla, B. (2018). BEIR1819-Probabilidad.
- Dynkin, E., Prokhorov, Y. y Bernstein, S. (1925). *Probability*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Esteban Nieto, N. (2018). Tipos de investigación. Artículo/ UNISDG-Institucional, Universidad Santo Domingo de Guzmán
- Evans, M. J. (2018). *Probabilidad y estadística: la ciencia de la incertidumbre*.

- Fernández Bravo, J. A. (2019). Enseñar desde el cerebro del que aprende. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*.
- Gutiérrez, H. C. (2021). *Los elementos de investigación*. Magisterio. 2da Ed.
- Hernández R., Sampieri, R., y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*.
- Inacio, E. J. H. (2019). *Método de investigación*. Artículo Vol. 9, 3ra Ed.
- Knight, F. (1651). The Ethics of Competition. *Revista de Economía Institucional*, 4(7), 133-164.
- Luna, B. M., & Vaca, L. L. (2019). *Estadística y probabilidad (FPB CA II-Matemáticas 2)*. Editex.
- Mandelbrot, B. B. *The fractal Geometry of Nature*, Macmillan, New York, NY, USA, 1983.
- Markov, A. A., Bernstein S. N. y Hinchin, F.(1912). On a question by D. I. Mendelev. *Zap. Imp. Akad. Nauk SPb.*, 62(1890), 1-24. (Russian)
- Maxwell, J. A. (2019). *Diseño de investigación cualitativa (Vol. 241006)*. Editorial Gedisa.
- Miller, I., & Freund, J. E. (2021). *Probabilidad y estadística para ingenieros*. Reverté.
- Mode, E. B. (2021). *Elementos de probabilidad y estadística*. Reverte.
- Morales, G., M. (2002). Historia de la probabilidad (desde sus orígenes a Laplace) y su relación con la historia de la teoría de la decisión. *Historia de la probabilidad y de la estadística/AHEPE*, 1-18.
- Nieto, E. (2018). *Tipos de investigación*. Universidad Santo Domingo de Guzmán, 2.

Oberti, A., & Bacci, C. (2021). Metodología de la Investigación

Ortega, A. O. (2018). Enfoques de investigación. Artículo Vol. 21 - 7ma edición.

Rojas, A., y Guzmán, I. (2018). Probabilidad, desde lo coloquial a lo formal. Sección 2/propuestas para la enseñanza de las matemáticas. Vol 31, número 2. Universidad de los Lagos. (Chile)

Sanguino, N. C. (2020). Fenomenología como método de investigación cualitativa: preguntas desde la práctica investigativa. Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social, (20), 7-18.

Vidal, P. y Szabó, P. (2021). Enfoques de enseñanza para aprender probabilidad en educación básica. Didáctica de la matemática para primer ciclo de educación básica.

Yang, X. J. Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications, World Science, New York, NY, USA, 2012.

Anexos

Anexo A. Símbolos Matemáticos

Tabla de Símbolos Matemáticos:

Símbolo	Significado
$p(A)$	Probabilidad del suceso A
$\frac{\text{Casos favorables a que ocurra } A}{\text{Casos posibles}}$	Fórmula de probabilidad de Laplace
N° de elementos de A	Número de elementos en el suceso A
N° de elementos de E	Número de elementos en el espacio muestral E
$0 \leq p(A) \leq 1$	La probabilidad siempre es un número entre 0 y 1
$A = \{C, X\}$	Suceso seguro en el lanzamiento de una moneda
Ω	Espacio muestral
$p(\emptyset)$	Probabilidad del suceso imposible (conjunto vacío)
$A \cup B$	Unión de sucesos A y B
$A \cap B$	Intersección de sucesos A y B
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$	Probabilidad de la unión de dos sucesos
A^C o $\bar{A}$	Suceso contrario o complementario de A
$p(A^C) = 1 - p(A)$	Probabilidad del suceso contrario
$A - B = A \cap B^C$	Diferencia de dos sucesos A y B
$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$	Probabilidad de la diferencia de sucesos

Símbolo	Significado
$p(A/B)$	Probabilidad de A condicionada a B
$\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$	Fórmula de probabilidad condicionada
$p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)$	Fórmula alternativa para $p(A \cap B)$
$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$	Probabilidad de B condicionada a A
$p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A)$	Relación entre las probabilidades condicionadas
Sucesos independientes	$p(A/B) = p(A)$ y $p(B/A) = p(B)$
$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$	Probabilidad de sucesos independientes
Teorema de la probabilidad total	$P(A) = P(A_1) \cdot P(A/A_1) + P(A_2) \cdot P(A/A_2)$
Fórmulas de Bayes	$P(A_1/A) = \frac{P(A_1) \cdot P(A/A_1)}{P(A)}$, $P(A_2/A) = \frac{P(A_2) \cdot P(A/A_2)}{P(A)}$
$E(X)$	Esperanza matemática de la variable aleatoria X
$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$	Fórmula de esperanza para variables discretas
$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Fórmula de esperanza para variables continuas
$E(X^r)$	Momento de orden r de la variable aleatoria X
$\text{Var}(X)$	Varianza de la variable aleatoria X
$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2]$	Definición de varianza
$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	Expresión alternativa para la varianza

Anexo B. Cronograma

La realización de esta investigación requirió la creación y el seguimiento de un cronograma de estudios detallado. La elaboración de este cronograma no solo brindó un marco organizativo esencial, sino que también garantizó la coherencia y la progresión lógica en el desarrollo de cada etapa de la investigación.

Cronograma de estudios	
Entrega del anteproyecto.	10-12 Noviembre, 2023.
Evaluación del Anteproyecto.	13-15 Noviembre, 2023.
Observaciones de los jurados.	16-23 Noviembre, 2023.
Elaboración del proyecto completo	26 Diciembre, 2023.
Entrega de tesis a los jurados	27-28 Diciembre, 2023.
Presentación de tesis	4-5 Enero, 2023
Entrega de tesis	9-12 Febrero, 2023