

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemáticas

Título

Funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

Sustentante

Candy María Rosario Díaz

Asesor

Dr. Víctor José Galán Céspedes

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico 2024.

TÍTULO

FUNCIONES CUASI-CONVEXAS GENERALIZADAS SOBRE CONJUNTOS
FRACTALES.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, serán responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

Trabajo de Postgrado presentado por **Candy María Rosario Díaz** para optar por el título de Maestría en Matemáticas

Composición del tribunal

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Jurado de metodología

MA. Jesús Manuel Viloría

Jurado de Redacción

Wilfran Rosario

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Agradecimientos	VI
Dedicatorias	VII
Resumen.....	IX
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	2
1.2.2 Antecedentes académicos	5
1.3 Planteamiento del problema.	9
1.4 Justificación.	10
1.5 Objetivos.	11
1.5.1 General.	11
1.5.2 Específicos.	11
1.6 Alcances y límites.	11
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.	12
2.1 Introducción.	12
2.2 Marco teórico.	12
2.2.1 Conjuntos Fractales.	12
2.2.2 Funciones cuasi-convexas generalizadas.	14
2.2.3 Desigualdades del tipo Hermite-Hadamard y Fejér	21
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA	26
3.1 Introducción	26
3.2 Marco metodológico	26
3.2.1 Diseño	26
3.2.2 Método	26
3.2.3 Tipo	26
3.2.4 Enfoque	27
3.3 Procedimientos	27

CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	29
4.1 Introducción	29
4.2 Propiedades algebraicas y topológicas de las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.	29
4.3 Desigualdades del tipo Fejér para las funciones cuasi-convexas genera- lizadas sobre conjuntos fractales.	34
4.4 Desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para las funciones cuasi- convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.	37
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	42
5.1 Introducción	42
5.2 Análisis de los resultados	42
5.3 Conclusiones	43
5.4 Líneas futuras de investigación	44
Referencias	45
Anexos	48

Agradecimientos.

A Dios: Por darme la vida, guiarme por el buen camino y darme la fuerza de seguir hacia delante, por ayudarme en cada momento de mi vida, por ser mi fortaleza y apoyo, que con tu gracia y misericordia he llegado a cumplir uno de mis sueños más anhelados, gracias, mi Dios.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO). Por abrirme las puertas y brindarme la oportunidad de avanzar en mi carrera profesional lugar para cambiar de estatus y tener miras a un mejor futuro.

Al excoordinador Efraín Martínez. Le doy las gracias por siempre estar dispuesto ayudarme y guiarme durante esta trayectoria, aunque no terminó de coordinar esta maestría, siempre estaré agradecida de usted por su esfuerzo y dedicación.

Al coordinador Arismendy Batista. Gracias por continuar con el grupo, por estar pendiente y preocuparse para que de una manera u otra el grupo continuara bien.

A mi asesor Dr. Víctor Galan. Por su dedicación en la asesoría de mi trabajo final de postgrado, por su desempeño y labor en el transcurso de estos meses, además por ser un buen maestro durante el trayecto.

A los docentes. Por su dedicación a la hora de impartir la docencia, además les agradezco de todo corazón las enseñanzas brindadas por todos y cada uno de ustedes.

Dedicatorias.

A Dios: Porque sin el no soy nada, por ser mi guía, mi amigo, mi fortaleza y el que me das las fuerzas necesarias para seguir adelante.

A mis padres: Luz María Díaz y Suriel y José Rafael Rosario, agradezco su apoyo incondicional por siempre estar para mí en cada momento, por ser mis consejeros y ser uno de los motivos para lograr mi sueño, porque nunca se me negaron a nada-los amo.

A mi esposo: Willy Gómez por apoyarme y estar ahí cuando más te he necesitado, por guiarme y aconsejarme a seguir hacia delante, y por nunca dejarme sola, por decirme sigue hacia adelante, no te rindas, tu puedes. Gracias, mi amor por siempre ser mi fuerza para seguir, por demostrarme que siempre estás ahí para mí, gracias amor por ser parte de este sueño.

A mi hija: Chantal Gómez, por darme esas fuerzas que necesito para seguir adelante, cada vez que te veo sabes que cada logro es por ti.

A mis hermanos: Jennifer y Rafael Luis. Les agradezco no solo por estar presentes aportando buenas cosas a mi vida, sino por los grandes lotes de felicidad y diversas emociones que siempre me han causado, gracias por su cariño y apoyo incondicional durante todo este proceso. Los quiero mucho.

A mi asesor Víctor Galán. Por su asesoría, dedicación y entrega en este trabajo, por sus consejos que me ayudaron a seguir hacia adelante.

A los profesores: Leomar Reyes, Wilson Lucilo Heredia Amparo, Víctor Galán, Rainier Sánchez, Danny Manzueta y demás, por todo el apoyo brindado a lo largo de esta trayectoria, por su tiempo y dedicación para compartir sus conocimientos y experiencias.

A mis amigas: Anyelina, Sorivel, Lucía, Marileyda, Julissa y Rosa, porque siempre estuvieron en esos momentos triste y alegres de la maestría, por ser mi pañito de lagrimas y estar para mi cuando tarde de la noche recurría a ustedes para que juntas lográramos salir adelante en cada asignatura, el mejor grupito de la maestría, sin dudas. Gracias, chicas!

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante

Candy María Rosario Díaz

Asesor

Dr. Víctor José Galán Céspedes

RESUMEN

En esta tesis se presenta un análisis de las funciones cuasi convexas generalizadas en conjuntos fractales, en donde se describen las propiedades algebraicas y topológicas de estas funciones, además de establecer y demostrar desigualdades del tipo Fejér y Hermite-Hadamard en el marco de los conjuntos fractales como dominio de definición de las funciones.

La metodología de esta investigación es no experimental y transversal, empleando un enfoque analítico-deductivo para descomponer y examinar el tema. Se caracteriza por ser explicativa y descriptiva, utilizando un enfoque cualitativo y documental para analizar y fundamentar las funciones en conjuntos fractales.

Esta investigación concluye que las propiedades de cuasi-convexidad se preservan bajo la composición, multiplicación por un escalar y la suma de funciones definidas sobre conjuntos fractales. Las desigualdades establecidas incorporan la segunda derivada y consideran la cuasi-convexidad de esta derivada, enfatizando cómo el promedio de los valores en los extremos se compara con integrales ponderadas de una función a otra.

Palabras claves: Funciones cuasi convexas. Desigualdades tipo Fejér. Desigualdades Hermite-Hadamard. Conjuntos fractales.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción.

En este capítulo se presentan los aspectos preliminares de la investigación. En este sentido, se abordan los antecedentes históricos y académicos relacionados con los fundamentos de la teoría de las funciones cuasi convexas y los conjuntos fractales, además de establecer el planteamiento del problema, los objetivos de la investigación, la justificación de su realización y la delimitación que marcarán los alcances y limitaciones de este proceso.

1.2. Antecedentes

El desarrollo de las funciones cuasi-convexas generalizadas y los conjuntos fractales está estrechamente ligado al desarrollo de la matemática moderna, abriendo nuevas perspectivas en el estudio de estructuras y formas complejas. Estos conceptos surgieron como una extensión y generalización de las funciones cuasi-convexas y los conjuntos fractales clásicos, superando las limitaciones de las funciones convexas y los conjuntos euclidianos en la descripción de fenómenos matemáticos y científicos.

A lo largo del tiempo, se ha demostrado que las funciones cuasi-convexas generalizadas son herramientas poderosas en el análisis de optimización no lineal, teoría de juegos y modelos económicos, ya que capturan la interacción entre elementos subyacentes y permiten una flexibilidad en la modelización de fenómenos con características no convexas. Por otro lado, los conjuntos fractales proporcionan una representación matemática precisa de estructuras altamente irregulares y auto-similares que se encuentran en fenómenos naturales. Es precisamente por esto, que en este apartado se presentan los antecedentes históricos y académicos que han marcado el desarrollo de las funciones cuasi convexas generalizadas y los conjuntos fractales.

1.2.1. Antecedentes históricos

1.2.1.1. Antecedentes históricos de los conjuntos fractales

El origen de la teoría de los fractales se remonta al siglo XVII, cuando Gottfried Leibniz, reconocido matemático y filósofo de la época, contempló la autosemejanza recursiva y utilizó el término “exponentes fraccionarios” para referirse a las propiedades de escala. Aunque Leibniz consideraba que solo una línea recta era autosimilar, en la comprensión moderna no se le considera un fractal. Sin embargo, el interés por los fractales disminuyó después de Leibniz, y aquellos que estudiaron el tema los llamaron “monstruos matemáticos” (Pickover, 2009).

En la Real Academia de Ciencias de Prusia, Karl Weierstrass descubrió una función especial que hoy lleva su nombre. Esta función es continua en todas partes pero no diferenciable en ninguna parte. Georg Cantor, un estudiante de Weierstrass que se convertiría en matemático, asistió a sus conferencias y estudió subconjuntos de la línea real, que ahora se conocen como conjuntos de Cantor. Estos conjuntos exhiben autosimilaridad y siguen un patrón de eliminación de secciones. A finales del siglo XIX, Henri Poincaré y Felix Klein descubrieron los fractales “autoinversos” que conocemos en la actualidad. Posteriormente, en 1904, Helge von Koch, influenciado por las ideas de Poincaré, propuso una definición geométrica de los fractales. Creó imágenes del copo de nieve de Koch, un patrón repetitivo idéntico dibujado a mano (Mandelbrot, 1982).

La geometría fractal tuvo sus orígenes a finales del siglo XIX, cuando los matemáticos comenzaron a cuestionar los principios establecidos por Euclides. En 1919, el matemático alemán Hausdorff se aventuró a explorar la idea de dimensiones fraccionarias y su relación con la estructura a pequeña escala de las formas matemáticas. Esta noción fue complementada posteriormente por la dimensión propuesta por el matemático ruso Besicovitch, sentando así las bases para la dimensión fractal. Sin embargo, en sus inicios, esta idea revolucionaria no fue ampliamente aceptada por otros matemáticos contemporáneos, quienes consideraban estas formas extrañas co-

mo “patología” sin importancia (Spinadel, 2002).

Aunque los conceptos clave asociados con los fractales han sido estudiados durante años por matemáticos, y muchos ejemplos, como la curva de Koch o el “copo de nieve”, han sido conocidos desde hace mucho tiempo, fue Mandelbrot quien señaló por primera vez que los fractales podrían ser una herramienta ideal en matemáticas aplicadas para modelar una variedad de fenómenos, desde objetos físicos hasta el comportamiento del mercado de valores. Desde su introducción en 1975, el concepto de fractal ha dado lugar a un nuevo sistema de geometría que ha tenido un impacto significativo en campos tan diversos como la química física, la fisiología y la mecánica de fluidos (Britannica, 2022).

Según Gutierrez y Hott (2004), la teoría de los fractales no surge como una teoría ajena a las demás disciplinas matemáticas ya existentes, sino que es el resultado del desarrollo de las matemáticas en el siglo pasado. El concepto más relevante que contribuyó al desarrollo de esta teoría fue el de dimensión, el cual resultó fundamental en el estudio de conjuntos de puntos, superficies y volúmenes. A medida que se desarrollaba este importante concepto, se logró la creación de conjuntos de puntos o curvas que desafiaban las definiciones establecidas por George Cantor, Waclaw Sierpinski, Helge Von Koch, Giuseppe Peano y David Hilbert. Estos destacados matemáticos contribuyeron al desarrollo del concepto de dimensión en el plano euclidiano, sin darse cuenta de que sentaron las bases para la creación de esta nueva teoría que hoy conocemos como “Teoría de los fractales”.

1.2.1.2. Antecedentes históricos de las funciones cuasi convexas

La teoría de la convexidad abarca un extenso trayecto histórico. En la obra “Los Elementos” de Euclides (300 A.C.), ya se encuentran diversas aportaciones a este campo, en particular en lo referente a las propiedades de los polígonos y poliedros. Sin embargo, fue Arquímedes de Siracusa (278-212 A.C.) en “Sobre la esfera y el cilindro” quien estableció la primera definición rigurosa de una curva o superficie

convexa. Entre las contribuciones de Arquímedes, resaltan aquellas referentes a los postulados y resultados acerca del centro de gravedad de conjuntos planos y su descripción de los trece poliedros semirregulares. Dichos poliedros, también conocidos como sólidos arquimedianos, fueron redescubiertos considerablemente más tarde por Johannes Kepler (1571-1630) en “*Harmonices Mundi*” (1619), donde confirmó que sólo podían existir trece de estos sólidos (Materano, 2015).

En la transición entre finales del siglo XIX y principios del XX, la teoría de la convexidad fue estudiada por diversos matemáticos, incluyendo a Otto Hölder. En 1889, Hölder probó la versión discreta de la desigualdad de Jensen, asumiendo una mayor regularidad para la función f' . Esto implica que la segunda derivada es no negativa en su dominio, es decir, $f''(x) > 0$ para todo $x \in \text{Dom } f$ (Jensen, 1905).

Más allá de estas contribuciones, a finales del siglo XIX surgieron diversos resultados de gran relevancia en la convexidad gracias al trabajo de matemáticos destacados como Brunn y Minkowski. No obstante, el interés específico en la geometría convexa es relativamente reciente, dado que el primer estudio sistemático no se encuentra hasta 1934 en “*Theorie der Konvex Körper*” de T. Bonnesen y W. Fenchel. Durante las décadas de 1940 y 1950, se descubrieron numerosas aplicaciones importantes de los conjuntos convexos, especialmente en el área de la optimización geométrica, intensificando el interés en esta teoría (Materano, 2015).

Un logro importante en las funciones convexas es la denominada desigualdad de Hermite-Hadamard, presentada por Hadamard en 1883. Esta desigualdad, que se aplica a funciones con derivadas crecientes en un intervalo cerrado de la recta real, fue desarrollada en un período en el que el concepto de función convexa todavía estaba en proceso de construcción. En 1883, Charles Hermite demostró el lado derecho de la desigualdad, lo que condujo a la actualmente conocida desigualdad de Hermite-Hadamard.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

En 1893, el matemático francés Jaques Hadamard logró establecer una desigualdad para funciones cuya derivada es creciente en el intervalo $[a, b]$. Por otro lado, Johan Ludwig William Jensen utilizó la siguiente desigualdad para definir funciones convexas:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x)+f(y))$$

Además, Jensen proporcionó el primer resultado de una larga serie que, junto con esta desigualdad, establece la continuidad de la función f .

El estudio de las funciones cuasi-cóncavas y cuasi-convexas tiene sus raíces en la teoría de optimización y análisis convexo. Estas funciones son generalizaciones de las funciones convexas y cóncavas, respectivamente, y desempeñan un papel importante en diversas áreas de las matemáticas aplicadas, como la economía, la teoría de juegos y la programación matemática.

Las funciones cuasiconvexas aparecen en la literatura en 1949, por Finetti, quien fue una de las primeras personas en reconocer algunas de las características de las funciones con conjuntos de nivel convexas. No dió nombre a esta clase, pero señaló que incluye todas las funciones convexas y algunas funciones no convexas (Materano, 2015). No obstante, Fenchel fue uno de los pioneros en formalizar, nombrar y desarrollar la clase de funciones cuasi-convexas. Una de las primeras generalizaciones que reconocieron la estructura inherente de las funciones cuasi-convexas fue la generalización de Nikaido en 1954, del teorema minimax de Von Neumann utilizando el teorema del punto fijo de Brower (Greenberg y Pierskalla, 1971).

1.2.2. Antecedentes académicos

En el artículo publicado por Daniilidis y Hadjisavvas (1999), titulado “Characterization of nonsmooth semistrictly quasiconvex and strictly quasiconvex functions”,

se introducen nuevos conceptos de cuasimonotonidad semiestricta y cuasimonotonidad estricta para mapas multivaluados. Se muestra que un mapa local de Lipschitz es (semi) estrictamente cuasiconvexo si y solo si su subdiferencial de Clarke es (semi) estrictamente cuasimonótono. Finalmente, se obtiene un resultado de existencia para el problema de desigualdad variacional correspondiente.

Por otro lado, Villena (2019) en su artículo titulado “Convergencia y eficiencia de un método de subgradiente para minimización de funciones Cuasi-Convexa”, estudió un Método de Subgradiente Proyectado general para minimizar una función objetivo cuasi-convexa sujeta a un subconjunto de restricciones convexo de un espacio de Hilbert. Su punto de partida es debido a que se considera la función objetivo semicontinua superiormente en su dominio, el cual no necesariamente tiene que ser abierto, y así mismo considera diferentes subdiferenciales que podrán ser utilizados con todo esto, extendiendo los resultados obtenidos de R^n a espacio de Hilbert, y demostrando la convergencia del método en los valores objetivos y la solución generalizada para establecer tamaños de paso clásico.

Conforme al artículo publicado por Wen-bing (2019), titulado “Integral inequalities for generalized harmonically quasi-convex functions on fractal sets”, el autor introduce el concepto de funciones generalizadas armónicamente cuasiconvexas en conjuntos fractales R_α ($0 < \alpha \leq 1$) de números reales, y establece desigualdades de tipo Hermite-Hadamard y Simpson generalizadas para funciones generalizadas armónicamente cuasiconvexas. Se presentan algunas aplicaciones para los medios especiales de tipo α de números reales en línea.

García (2022), presenta en la conferencia IMCA, una “Caracterización de la cuasiconvexidad del ínfimo de una familia de traslaciones de funciones cuasiconvexas”. En esta presentación se introduce la noción de familia cuasiconvexa y se establecen varias caracterizaciones de dicho concepto: una de ellas es la cuasiconvexidad del ínfimo puntual de las traslaciones arbitrarias de funciones cuasiconvexas en la familia;

otra es la convexidad de la unión de dos cualesquiera de sus conjuntos de subniveles; una tercera es la cuasiconvexidad de la suma de las funciones cuasiconvexas, compuesta por funciones arbitrarias no decrecientes. Como subproducto, cualquiera de las caracterizaciones antes mencionadas, además de proporcionar la cuasiconvexidad de la suma, también implica la cuasiconvexidad semiestricta de la suma si todas las funciones de la familia tienen la misma propiedad.

Por su parte, en el artículo publicado por (Goberna et al., 2020), se presentan algunas de las principales propiedades de los conjuntos uniformemente convexos y las funciones uniformemente cuasiconvexas, proporcionando caracterizaciones adicionales de los conjuntos uniformemente convexos y algunos resultados para las funciones uniformemente cuasiconvexas.

Por otro lado, Stenger, Gamboa y Keller (2021), en su publicación titulada “Optimization of quasi-convex function over product measure sets”, consideran una generalización del principio máximo de Bauer. Muestran que el máximo de una función semicontinua inferior cuasi-convexa en este espacio producto se alcanza en el producto tensorial de mezclas finitas de puntos extremos, considerándose su trabajo como una extensión del principio máximo de Bauer en tres aspectos diferentes. Primero, asumir que el funcional objetivo es cuasi-convexo. En segundo lugar, la optimización se realiza sobre un espacio construido como producto de conjuntos de medidas. Finalmente, la suposición habitual de compacidad se reemplaza por la existencia de una representación integral en los puntos extremos. Se muestra además, que una representación integral en los puntos extremos está disponible para tales espacios y que se extiende a su producto tensorial.

En el artículo publicado por Lara (2022), titulado “On strongly quasiconvex functions: existence results and proximal point algorithms”, se prueba que toda función fuertemente cuasiconvexa es 2-supercoercitiva (en particular, coercitiva). Además, se investigan las propiedades habituales de los operadores proximales para funciones

fuertemente cuasiconvexas. En particular, se demuestra que el conjunto de puntos fijos del operador proximal coincide con el único minimizador de una función fuertemente cuasiconvexa semicontinua inferior. Como consecuencia, se implementa el algoritmo del punto proximal para encontrar la solución única del problema de minimización de una función fuertemente cuasiconvexa usando una secuencia positiva de parámetros acotados desde 0 y, en particular, revisamos el caso general cuasiconvexo. Además, de este análisis se deriva una nueva caracterización para funciones convexas.

Por otro lado, en el artículo “Corrected Dual-Simpson-Type Inequalities for Differentiable Generalized Convex Functions on Fractal Set”, se proporcionan varias desigualdades tipo Simpson duales corregidas para funciones cuyas derivadas fraccionarias locales son convexas generalizadas. Con ese fin, se deriva una nueva identidad integral fraccionaria local como resultado auxiliar. Usando esa nueva identidad junto con la desigualdad de Hölder generalizada y la desigualdad de medias de poder generalizada, se establecen algunas variantes nuevas de desigualdades integrales de tipo Simpson dual corregidas con fractales. Además, se ofrecen algunas aplicaciones para estimaciones de error de fórmulas de cuadratura, así como algunos medios especiales que involucran medias aritméticas y p -logarítmicas para demostrar la eficacia de los hallazgos (Lakhdari et al., 2022).

En Meftah et al., (2023), se presenta un estudio titulado “Some New Fractal Milne-Type Integral Inequalities via Generalized Convexity with Applications”, donde se construyen algunas nuevas desigualdades integrales de tipo Milne para funciones cuyo módulo de las derivadas fraccionarias locales es convexo en el conjunto fractal. Con ese fin, se desarrolla una nueva identidad integral generalizada que involucra derivadas generalizadas de primer orden. Finalmente, como aplicaciones, se derivan algunas estimaciones de error para la fórmula de cuadratura tipo Milne y nuevas desigualdades para la aritmética generalizada y medias p -logarítmicas.

1.3. Planteamiento del problema.

Los conjuntos fractales son estructuras que han cautivado el interés de los matemáticos e investigadores multidisciplinares durante décadas, porque estos conjuntos, con su auto-similitud y complejidad, desafían las fronteras del análisis matemático tradicional. Su naturaleza intrínseca, que se repite en todas las escalas, permite un análisis de fenómenos que se manifiestan en una diversidad de disciplinas, desde la Física y la Biología, hasta la economía y la ciencia de datos, lo que hace que el estudio de estos conjuntos sea fundamental, no sólo desde una perspectiva teórica, sino también por su potencial para realizar innovaciones significativas en diversos campos de aplicación.

Por otro lado, las funciones cuasi convexas son una herramienta matemática de gran utilidad en la teoría de la optimización y la toma de decisiones, ya que a diferencia de las funciones convexas tradicionales, estas no requieren la suposición de linealidad, lo que implica que no está restringida a que la línea que conecta dos puntos en su gráfica se encuentre completamente por encima de la función. Al no requerir la linealidad en su estructura, estas funciones pueden representar de manera más precisa las relaciones entre variables en problemas más complejos, incluso aquellas situaciones, cuya representación requiere del cálculo de múltiples mínimos locales.

Tanto las funciones cuasi convexas como los conjuntos fractales, derivan en una gran cantidad de aplicaciones tanto desde una perspectiva puramente matemática, como en diversas áreas que requieren la representación y análisis de estructuras más complejas. Es por esto, que la generalización de estas funciones considerando como dominio de definición, los conjuntos fractales, puede aperturar nuevos campos de aplicación y teorías de gran relevancia dentro de las matemáticas puras.

En el campo de las matemáticas, particularmente en el estudio de la optimización y el análisis de funciones, las condiciones de Fejér y Hermite-Hadamard juegan un papel crucial al proporcionar un marco para la convergencia de secuencias y funciones.

Estas condiciones, que tradicionalmente se han aplicado a contextos más convencionales, presentan una nueva frontera de investigación cuando se consideran en relación con los conjuntos fractales y las funciones cuasi-convexas, ya que ofrecen un dominio de estudio único y con una estructura irregular.

En tal sentido, esta propuesta investigativa pretende responder a la interrogante de ¿Cómo se puede analizar las funciones cuasi convexas generalizadas en conjuntos fractales?

Dar respuesta a esta cuestionante, implicará también responder las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cuáles son las propiedades algebraicas y topológicas de las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales?
2. ¿Cuáles condiciones del tipo Fejér caracterizan las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales?
3. ¿Cómo demostrar las desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales?

1.4. Justificación.

Las funciones cuasi-convexas generalizadas en conjuntos fractales permiten modelar y describir fenómenos y sistemas complejos que no pueden ser abordados adecuadamente con herramientas matemáticas tradicionales. Por ejemplo, las funciones cuasi-convexas generalizadas tienen aplicaciones en problemas de optimización y control en contextos no lineales, por lo que analizar estas funciones en conjuntos fractales, puede propiciar el desarrollo de métodos y algoritmos más eficientes para la resolución situaciones problemáticas en estas áreas.

Además, esta investigación se considera relevante porque las funciones objeto de estudio, son funciones no lineales que presentan propiedades interesantes del análisis matemático, lo cual permite profundizar en propiedades como la convexidad generalizada, la continuidad, la derivabilidad y la existencia de soluciones en ecuaciones

diferenciales no lineales y situaciones afines.

Este estudio procuró establecer un marco de referencia para futuras investigaciones, dado que es una temática que ha recibido escasa atención en la comunidad científica de la República Dominicana, y en particular de la Universidad UTECO, con miras a que los resultados puedan ser aplicables en la resolución de problemas en la modelización matemática y en la generación de algoritmos informáticos.

1.5. Objetivos.

1.5.1. General.

Analizar las funciones cuasi convexas generalizadas en conjuntos fractales.

1.5.2. Específicos.

1. Describir las propiedades algebraicas y topológicas de las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.
2. Establecer desigualdades del tipo Fejér para las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.
3. Demostrar desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

1.6. Alcances y límites.

La presente investigación se enmarca dentro de las matemáticas puras, ya que en lugar de enfocarse en la generación gráfica de fractales utilizando métodos iterativos basados en funciones cuasi-convexas generalizadas, este estudio estuvo centrado en caracterizar y demostrar propiedades específicas de las funciones cuasi-convexas generalizadas en conjuntos fractales.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.

2.1. Introducción.

El presente capítulo expone los fundamentos conceptuales, abarcando definiciones, proposiciones, teoremas y algunas demostraciones relevantes en el marco de las funciones cuasi convexas generalizadas y los conjuntos fractales, que establecieron la base teórica de esta investigación.

2.2. Marco teórico.

2.2.1. Conjuntos Fractales.

Definición 2.1 Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$, la dimensión de Hausdorff (Afonso, 2018) de F , es el número

$$\dim_H(F) = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

De ahí que si, $\sup \emptyset = 0$, se tiene:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F) \end{cases}$$

Si $s = \dim_H(F)$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser igual a $0, \infty$, o $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Proposición 2.2.1 La dimensión de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:

1. Monotonía: Si $E \subseteq F$, entonces $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$.
2. Estabilidad numerable: Si $\{F_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{ \dim_H(F_i) \}.$$

3. Dimensión de conjuntos numerables: Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es numerable, entonces $\dim_H(F) = 0$.

4. Dimensión de conjuntos abiertos: Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\dim_H(F) = n$.

Demostración.

1. Por propiedades de medida, si $E \subseteq F$, entonces

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}^+.$$

Por lo tanto, si $\mathcal{H}^s(F) = 0$, se concluye que $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Por lo tanto,

$$\dim_H(E) \leq \dim_H(F).$$

2. De la propiedad de monotonía, para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\dim_H(F_j) \leq \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right).$$

Por otra parte, si $s > \dim_H(F_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$. Así, por propiedades de medida,

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) = 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$, lo cual implica que

$$s \geq \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right),$$

y en consecuencia,

$$\sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\} = \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right).$$

3. Sea $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, donde cada F_i contiene un único punto. Entonces $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$.

Por lo tanto, $\dim_H(F_i) = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, de la estabilidad numerable se concluye que

$$\dim_H(F) = 0.$$

4. Primero se observa que una bola en $\mathbb{R}^n$ de radio $r > 0$ tiene dimensión igual a n . Luego, por estabilidad numerable es suficiente considerar conjuntos $F \subseteq \mathbb{R}^n$, abiertos y acotados. Sin embargo, todo conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado es la unión numerable de bolas B_i , con $i \geq 1$, en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Nuevamente, por la propiedad de estabilidad numerable,

$$\dim_H(F) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \{B_i\} = n.$$

Definición 2.2 Un subconjunto no vacío S de $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión topológica k si cada punto de éste tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras intersectan S en un conjunto de dimensión $k - 1$, siendo k el menor entero no negativo con esta propiedad (Afonso, 2018).

Definición 2.3 Un conjunto se dice autosimilar si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo (Afonso, 2018).

Definición 2.4 Un fractal es un conjunto autosimilar con dimensión de Hausdorff mayor que su dimensión topológica. (Cooper, 2011)

Definición 2.5 La dimensión fractal es el cociente

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

donde N es el número de veces que se reproduce el objeto inicial en la primera generación y ε es la escala a la que se encuentran las dimensiones de las reproducciones.

2.2.2. Funciones cuasi-convexas generalizadas.

Definición 2.6 De acuerdo con Materano (2015), sean D y $\mathbb{X}$ conjuntos contenidos en los reales, una función $f : D \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ en un subconjunto convexo $\mathbb{X}$ es cuasi-

convexa si

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

y f es cuasi-cóncava si $f(tx + (1 - t)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$ $t \in (0, 1)$.

Proposición 2.2.2 Una función f es cuasi-convexa si y sólo si $-f$ es cuasi-cóncava.

Demostración. Sea f una función convexa, si se multiplica por -1 ambos lados se obtiene

$$-f(tx + (1 - t)y) \geq -tf(x) - (1 - t)f(y)$$

es decir

$$(-f)(tx + (1 - t)y) \geq t(-f)(x) + (-f)(y)$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$ esto permite deducir que f es convexa si y sólo si $-f$ es cóncava.

Proposición 2.2.3 Toda función f convexa o monótona es cuasiconvexa.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, considerando $x, y \in I$ tal que $x \leq y$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, suponer que f es monótona creciente para $t \in [0, 1]$ entonces

$$x \leq tx + (1 - t)y \leq y$$

así mismo

$$\min\{f(x), f(y)\} = f(x) \leq f(tx + (1 - t)y) \leq f(y) = \max\{f(x), f(y)\} \quad (2.1)$$

luego por (2.1) se cumple que

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

por lo que en consecuencia f es cuasiconvexa. Para el caso en que f es cóncava, la demostración es análoga.

Teorema 2.1 Teorema de separación para funciones cuasi-convexas o también conocido como teorema del sandwich (Förg-Rob et al., 1996). Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo arbitrario y $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones dadas. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (a) Existe una función monótona $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \leq h \leq g$.
- (b) Existen funciones $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, h_1 -cuasi cóncava, h_2 -cuasi convexa, tal que $f \leq h_1 \leq g$ y $f \leq h_2 \leq g$.
- (c) Existen funciones $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, h_1 -cuasi cóncava, h_2 -cuasi convexa, tal que $f \leq h_1 \leq h_2 \leq g$.
- (d) Para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$, las siguientes desigualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq \max\{g(x), g(y)\} \\ g(tx + (1-t)y) &\geq \min\{f(x), f(y)\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Demostración. $(a) \Rightarrow (d)$. Esto se deduce del hecho de que toda función monótona es simultáneamente cuasi-cóncava y cuasiconvexa, como se demostró en la proposición (2.2.3).

$(d) \Rightarrow (c)$

Considerando las funciones $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$h_1(u) = \sup \{ \min \{ f(x), f(y) \} : x \leq u \leq y, \quad x, y \in I \} \tag{2.3}$$

$$h_2(u) = \inf \{ \max \{ g(x), g(y) \} : x \leq u \leq y, \quad x, y \in I \} \tag{2.4}$$

Por la desigualdad (2.2) $h_1(u), h_2(u)$ están bien definidas y

$$\begin{aligned} f(u) &\leq h_2(u) \\ h_1(u) &\leq g(u) \end{aligned} \tag{2.5}$$

para todo $u \in I$. Por otra parte, $f \leq h_1$ y $h_2 \leq g$. Se demostrará que $h_1 \leq h_2$, h_1 es cuasicóncava y h_2 es cuasi-convexa. Suponiendo lo contrario, que existe $w \in I$ tal

que $h_1(w) > h_2(w)$. Entonces existirá $x \leq w \leq y$ y $u \leq w \leq v$ tal que

$$\min\{f(x), f(y)\} > \max\{g(u), g(v)\} \quad (2.6)$$

Si $x \leq u$, entonces de (2.3) y (2.6) se deduce que

$$h_1(u) \geq \min\{f(x), f(y)\} > g(u)$$

lo que contradice a (2.5). Esas contradicciones muestran que $h_1 \leq h_2$. Ahora se demostrará que h_2 es cuasi-convexa (la demostración de cuasi-concavidad de h_1 es análoga). Considerando que es falso, entonces existe $x \leq u \leq y$ tal que $h_2(u) > \max\{h_2(x), h_2(y)\}$. Por las definiciones de h_2 se consigue que $\alpha \leq x \leq \beta$ y $\gamma \leq y \leq \delta$ tal que

$$h_2(u) > \max\{g(\alpha), g(\beta), g(\gamma), g(\delta)\} \quad (2.7)$$

sin embargo $\alpha \leq u \leq \delta$, lo que implica que

$$h_2(u) \leq \max\{g(\alpha), g(\delta)\}$$

esto contradice (2.7) y demuestra que h_2 es cuasi-convexa.

(c) $\Rightarrow$ (b)

Por hipótesis se tiene que $f \leq h_1 \leq h_2 \leq g$ entonces $f \leq h_1 \leq g$ y también satisface para $f \leq h_2 \leq g$, es decir, que existen funciones $h_1, h_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, h_1 -cuasi-cóncava y h_2 -cuasi-convexa, tal que $f \leq h_1 \leq g$ y $f \leq h_2 \leq g$.

(b) $\Rightarrow$ (a)

Asumiendo primero que $\sup\{f(z) : z \leq x\} < \infty$ y $\inf\{g(z) : z \leq x\} > -\infty$ para cada $x \in I$. Definiendo $m_1, m_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$m_1 := \sup\{f(z) : z \leq x\}$$

$$m_2 := \inf\{g(z) : z \leq x\}.$$

Es notable que $f \leq m_1, m_2 \leq g$, m_1 es no decreciente y m_2 es no creciente.

Se demostrará que al menos una de estas funciones separa a las funciones f y g . Sumiendo lo contrario, entonces existen $a, b \in I$ tal que $m_1(a) > g(a)$ y $m_2(b) < f(b)$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $a \leq b$. Sea

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min \{m_1(a) - g(a), f(b) - m_2(b)\} \quad (2.8)$$

Por la definición de m_1, m_2 , existen $x_1, x_2 \in I, x_1 \leq a, x_2 \leq b$ tal que

$$\begin{aligned} f(x_1) &> m_1(a) - \epsilon \\ g(x_2) &< m_2(b) + \epsilon. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si $x_1 \leq x_2$, entonces $x_2, a \in [x_1, b]$ por hipótesis (2.8) y (2.9) se tiene

$$\begin{aligned} h_1(x_2) &\leq g(x_2) < m_2(b) + \epsilon \\ h_2(a) &\leq g(a) < g(a) + \epsilon \end{aligned}$$

y

$$h_2(x_1) \geq f(x_1) > m_1(a) - \epsilon > g(a) + \epsilon$$

lo que contradice la cuasi-convexidad de h_2 sobre $[x_2, a]$. Así en cualquier caso se llega a la contradicción que demuestra que al menos una de las funciones m_1, m_2 separa a las funciones f y g .

Ahora se trata la existencia de las funciones m_1, m_2 . Como f está acotada superiormente por h_2 y por lo tanto también está acotado superiormente por el $\max \{h_2(\alpha), h_2(\beta)\}$ en cada intervalo compacto $[\alpha, \beta] \subset I$ (y de manera similar g por h_1 inferiormente), la única posibilidad para la inexistencia de m_1 (o m_2) se da si f (respectivamente g) es no acotado por el lado izquierdo de I . Se deben considerar los siguientes tres casos

- (i) Suponer que existe un $x \in I$ tal que $\sup\{f(z) : z \leq x\} = \infty$ y $\inf\{g(z) : z \leq x\} = -\infty$. Entonces, según los argumentos mencionados anteriormente, para cualquier $y \leq x$ se cumple que $\sup\{f(z) : z \leq y\} = \infty$ y $\inf\{g(z) : z \leq$

$y\} = -\infty$. Por lo tanto, existe un punto $z_1 \leq x$ tal que $f(z_1) > 0$. Además, puede encontrar un punto $z_2 < z_1$ tal que $g(z_2) < 0$ y un punto $z_3 < z_2$ tal que $f(z_3) > 0$. Dado que $f < h_1 < g$, esto contradice la cuasiconvexidad de h_1 .

- (ii) Suponer que $\sup\{f(z) : z \leq x\} = \infty$ para algún $x \in I$ y que m_2 existe. Se toma un $x_0 \in I$ y se elige $y_0 < x_0$ de manera que $f(y_0) > g(x_0)$. Para cualquier $y \in I$ con $y \leq y_0$, se puede restringir m_2 al intervalo $[y, \infty] \cap I$ y definir m_1 . Dado que $y_0 < x_0$ y $f(y_0) > g(x_0)$, la función m_1 no puede separar a las funciones f y g , por lo tanto, solo la restricción de m_2 funciona como una separación sobre $[y, \infty] \cap I$. Esto es válido para cualquier $y \in I$ con $y \leq y_0$, concluyendo que m_2 separa a las funciones f y g sobre I .
- (iii) El caso donde m_1 existe pero $\inf\{g(z) : z \leq x\} = -\infty$ para algún $x \in I$ puede ser tratado como en el caso (ii).

Proposición 2.2.4 Una función $f : D \subseteq \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es cuasi-convexa, si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$f^{-1}(-\infty, \alpha] = \{x : f(x) \leq \alpha\} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

es un conjunto convexo.

Demostración. Suponer que f es cuasi-convexa, y sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x, y \in L_{\alpha(f)} = \{x : f(x) \leq \alpha\}$, entonces

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha, \quad t \in (0, 1)$$

así resulta que $L_{\alpha(f)}$ es convexo.

Recíprocamente, asumiendo que $L_{\alpha(f)}$ es convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y considerando $x, y \in \mathbb{X}$ entonces $x, y \in L = L_{\max\{f(x), f(y)\}}(f)$, luego $tx + (1-t)y \in L$, con $t \in (0, 1)$. De donde resulta que f es cuasi-convexa.

Teorema 2.2 Sea f una función estrictamente cuasiconvexa definida en un conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente, con $f(S) \subseteq A$. Entonces:

- (i) $kf, k > 0$ es estrictamente cuasiconvexa en S ;
- (ii) $g \circ f$ es estrictamente cuasiconvexa en S .

Teorema 2.3 Sea $g(x) = Ax + b$, donde A es una matriz $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, y sea f una función cuasiconvexa en un conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces, $z(x) = f(Ax + b)$ es cuasiconvexa en S .

Demostración. Se tiene que $z(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = f(\lambda(Ax_1 + b) + (1 - \lambda)(Ax_2 + b)) \leq \max\{f(Ax_1 + b), f(Ax_2 + b)\} = \max\{z(x_1), z(x_2)\}, \forall \lambda \in [0, 1]$.

Teorema 2.4 Sea f una función cuasiconvexa definida en un conjunto convexo $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función no decreciente, con $f(S) \subseteq A$. Entonces:

- (i) $kf, k > 0$ es cuasiconvexa en S ;
- (ii) $g \circ f$ es cuasiconvexa en S .

Demostración.

- (i) Para la positividad de k y la cuasiconvexidad de f tenemos $(kf)(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) = kf(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) \leq k \max\{f(x_1), f(x_2)\} = \max\{kf(x_1), kf(x_2)\}$.
- (ii) Sea $x_1, x_2 \in S$ con $f(x_1) \geq f(x_2)$. Entonces, $f(x_1 + \lambda(x_2 - x_1)) \leq f(x_1)$, para todo $\lambda \in [0, 1]$. Como g es

Definición 2.7 De acuerdo con Cambini (2008), sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$, para cualquier $x_1, x_2 \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$. Si se cumple la siguiente desigualdad:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \sup\{f(x), f(y)\},$$

entonces f se denomina una función cuasi convexa generalizada en I .

Proposición 2.2.5 Operaciones que conservan la cuasi-convexidad (Fernández, 2011).

- (a) Máximo ponderado con pesos no negativos. La función $f = \text{maax} \{w_1 f_1, \dots, w_m f_m\}$ es cuasi-convexa si $w_i \geq 0$ y f_i son cuasiconvexas. Esta propiedad se extiende al supremo puntual

$$f(x) = \sup_{y \in \mathcal{C}} (w(y)g(x, y)), \quad w(y) \geq 0$$

donde $g(x, y)$ es cuasi-convexa en x para cualquier valor de y .

- (b) Composición. Si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es cuasi-convexa y $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es no decreciente, entonces $f = h \circ g$ es cuasi-convexa.
- (c) Minimización. Si $f(x, y)$ es conjuntamente cuasi-convexa en x y en y , y $\mathcal{C}$ es un conjunto convexo, entonces la función $g(x) = \inf_{y \in \mathcal{C}} f(x, y)$ es cuasi-convexa.

2.2.3. Desigualdades del tipo Hermite-Hadamard y Fejér

Teorema 2.5 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ es integrable y simétrica respecto a $\frac{a+b}{2}$, entonces de acuerdo con Tseng et al., (2017), estando definidas en $[0, 1]$, se cumple que:

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{1}{2} \left[f \left(ta + (1-t) \frac{a+b}{2} \right) + f \left(tb + (1-t) \frac{a+b}{2} \right) \right]; \\ H(t) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f \left(tx + (1-t) \frac{a+b}{2} \right) dx; \\ H_g(t) &= \int_a^b f \left(tx + (1-t) \frac{a+b}{2} \right) g(x) dx; \\ L(t) &= \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b [f(ta + (1-t)x) + f(tb + (1-t)x)] dx; \\ &\text{y} \\ L_g(t) &= \frac{1}{2} \int_a^b [f(ta + (1-t)x) + f(tb + (1-t)x)] g(x) dx. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Definición 2.8 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \tag{2.11}$$

es conocida como la desigualdad de Hermite-Hadamard (Tseng et al., 2017).

En Dragomir (1992), se establece el siguiente teorema que refina la desigualdad (2.10):

Teorema 2.6 Suponga que $f, H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas, entonces H es convexa, creciente en $[0, 1]$, y para todo $t \in [0, 1]$ se tiene que:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = H(0) \leq H(t) \leq H(1) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (2.12)$$

Teorema 2.7 Suponga que $f, H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas, entonces:

1) Se cumple la siguiente desigualdad:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{2}{b-a} \int_0^{a+\frac{3b}{4}} f(x)dx \quad (2.13)$$

$$\leq \int_0^1 H(t)dt \quad (2.14)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right]. \quad (2.15)$$

2) Si f es diferenciable en $[a, b]$, entonces, para todo $t \in [0, 1]$, se tienen las desigualdades:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - H(t) \\ &\leq (1-t) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

y

$$0 \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - H(t) \leq \frac{f'(b) - f'(a)}{4} (b-a).$$

Teorema 2.8 Suponga que $f, H, G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas, entonces:

1) G es convexa y creciente en $[0, 1]$.

2) Se tiene que:

$$\inf_{t \in [0,1]} G(t) = G(0) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

y

$$\sup_{t \in [0,1]} G(t) = G(1) = f(a) + f(b).$$

3) La siguiente desigualdad es válida para todo $t \in [0, 1]$:

$$H(t) \leq G(t)$$

4) Se cumple la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \frac{2}{b-a} \int_{a+\frac{3b}{4}}^b f(x)dx &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \right] \\ &\leq \int_0^1 G(t)dt \\ &\leq \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) + f(b) \right]. \end{aligned}$$

5) Si f es diferenciable en $[a, b]$, entonces, para todo $t \in [0, 1]$, se cumple:

$$0 \leq H(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq G(t) - H(t)$$

Teorema 2.9 Suponga que $L, G, f, H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas, entonces:

1) L es convexa en $[0, 1]$.

2) Se tiene la siguiente desigualdad:

$$G(t) \leq L(t) \leq \frac{1-t}{b-a} \int_a^b f(x)dx + t \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

para todo $t \in [0, 1]$ y

$$\sup_{t \in [0, 1]} L(t) = \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

3) Para todo $t \in [0, 1]$, se cumplen las desigualdades:

$$H(1-t) \leq L(t) \quad \text{y} \quad H(t) + H(1-t) \leq L(t).$$

Teorema 2.10 Suponga que $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas, entonces:

$$\frac{f(a+b)}{2} \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(x)dx$$

se conoce como la desigualdad de Fejér.

Teorema 2.11 Suponga que $f, g, H_g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son convexas, entonces, H_g es convexa, creciente en $[0, 1]$, y para todo $t \in [0, 1]$, se tiene:

$$\int_a^b \frac{f(a+b)}{2} g(x) dx = H_g(0) \leq H_g(t) \leq H_g(1) = \int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (2.16)$$

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos de la investigación; los cuales hacen referencia al método, diseño, tipo, enfoque y procedimientos requeridos para el desarrollo de la misma.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño

El diseño que contempla esta investigación es el no experimental, ya que como lo plantea Hernández et al. (2014), las variables no se manipulan de forma intencionada. Según el tiempo de estudio, el diseño es transversal, el cual es definido por el mismo autor como aquel en el que se recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único.

3.2.2. Método

Este estudio se fundamenta en la aplicación del método analítico-deductivo, cuyo objetivo general es analizar las funciones cuasi convexas generalizadas en conjuntos fractales. Espinoza (2020) describe el método analítico como una técnica de investigación que implica descomponer un todo en sus partes constituyentes con el fin de examinar sus causas, naturaleza y efectos. Además, se empleó un método deductivo en este estudio, el cual permitió establecer conclusiones significativas a partir de los hallazgos, lo que facilitó la verificación de los objetivos propuestos en esta investigación (Rodríguez et al., 2017).

3.2.3. Tipo

De acuerdo a las características, esta investigación es de tipo exploratoria, explicativa y descriptiva. Es exploratoria ya que se examinó y recopiló datos de diferentes fuentes, para posteriormente analizarlos y presentarlos para comprender su estruc-

tura y aplicabilidad. Es explicativa porque se centró en identificar y en comprender las relaciones entre variables al determinar cómo interactúan entre sí. Es descriptiva porque implicó detallar y presentar datos tal como son, sin influir en ellos o buscar relaciones causales (Ramos-Galarza, 2020).

3.2.4. Enfoque

Debido a que en este estudio no se busca medir las variables, el enfoque utilizado es el cualitativo, porque su desarrollo estuvo basado en un análisis de las funciones cuasi convexas cuando estas se aplican a conjuntos fractales (Ortega, 2018).

3.3. Procedimientos

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso de realización de este trabajo de investigación hasta la etapa del proyecto:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, sobre los fundamentos de las formas modulares y la conjetura de Ramanujan.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos constitutivos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada del borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.
8. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.

9. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia y pertinencia de la misma.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

La teoría de los fractales ha atraído la atención de muchos científicos, ya que tiene muchas aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento. En este sentido, Yang (2011) estableció una caracterización en la que $0 < \alpha \leq 1$, son conjuntos fractales de tipo α :

- Z^α se define como el conjunto de números enteros de tipo α , representados por $\{0^\alpha, \pm 1^\alpha, \pm 2^\alpha, \dots, \pm n^\alpha, \dots\}$.
- Q^α se refiere al conjunto de números racionales de tipo α , que se expresan como $\left\{m^\alpha = \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$.
- J^α denota el conjunto de números irracionales de tipo α , definidos como $\left\{m^\alpha \neq \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$.
- Finalmente, R^α se define como la unión de Q^α y J^α , representando así los números reales de tipo α .

Siendo R^α un conjunto fractal y todo subconjunto posible de él. Se hace esta observación, porque los diferentes resultados que se muestran en este capítulo están basados en conjuntos fractales de esta forma.

4.2. Propiedades algebraicas y topológicas de las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

Teorema 4.1 Sea $h : [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}$ y $r : [0, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$, con el rango de h contenido en $[0, b_1]$. Si h es una función cuasi convexa generalizada y r es una función cuasi convexa generalizada y además r es una función creciente, entonces la composición $r \circ h$ es una función cuasi convexa generalizada en $[0, b^*]$.

Demostración. Para demostrar que la composición $r \circ h$ es una función cuasi convexa generalizada, considérese dos puntos cualesquiera $x, y \in [0, b^*]$ y $\lambda \in [0, 1]$.

Dado que h es cuasi convexa generalizada, se tiene que:

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \sup\{h(x), h(y)\}.$$

Ahora, como r es creciente, entonces para cualquier par de valores u, v donde $u \leq v$, se tiene $r(u) \leq r(v)$. Aplicando esto, se obtiene:

$$r(h(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq r(\sup\{h(x), h(y)\}).$$

Supóngase sin pérdida de generalidad que $h(x) \geq h(y)$. Entonces $\sup\{h(x), h(y)\} = h(x)$, y por lo tanto:

$$r(h(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq r(h(x)).$$

Debido a que r es también cuasi convexa generalizada, y $h(x)$ y $h(y)$ están en su dominio, se debe cumplir que:

$$r(\lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)) \leq \sup\{r(h(x)), r(h(y))\}.$$

Y como r es creciente, la aplicación de r mantiene el orden, lo que significa que:

$$r(h(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq r(\lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)).$$

Combinando las dos últimas desigualdades, se concluye que:

$$r(h(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq \sup\{r(h(x)), r(h(y))\},$$

demostrando que $r \circ h(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ está acotada por el supremo de $r \circ h(x)$ y $r \circ h(y)$, cumpliendo con la definición de cuasi convexidad generalizada:

$$(r \circ h)(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \sup\{(r \circ h)(x), (r \circ h)(y)\}.$$

Teorema 4.2 Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ una función que cumple con la propiedad de

cuasi convexidad generalizada, entonces para cualquier escalar positivo λ , la función escalada λf también cumple con la propiedad de cuasi convexidad generalizada en el mismo intervalo I .

Demostración. Considérese un escalar positivo λ y sean $x, y \in I$ dos puntos arbitrarios en el intervalo I , con $t \in [0, 1]$ como un parámetro de combinación convexa. De acuerdo con la propiedad de cuasi convexidad generalizada de la función f , se tiene que:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{f(x), f(y)\}.$$

Al multiplicar ambos lados de la inequidad por λ^α , se sigue que:

$$\lambda^\alpha f(tx + (1 - t)y) \leq \lambda^\alpha \sup\{f(x), f(y)\}.$$

Utilizando la propiedad de homogeneidad del supremo con respecto a la multiplicación por un escalar, se puede escribir:

$$\lambda^\alpha f(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{\lambda^\alpha f(x), \lambda^\alpha f(y)\}.$$

Esto demuestra que la función λf satisface la desigualdad característica de las funciones cuasi convexas generalizadas, y por lo tanto, λf también es una función cuasi convexa generalizada en I .

Teorema 4.3 Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ una función cuasi convexa generalizada. Entonces, la función $h : I \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, donde $g : I \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ es también una función cuasi convexa generalizada, es a su vez una función cuasi convexa generalizada en I .

Demostración. La demostración se lleva a cabo verificando que la función h , definida como el máximo de dos funciones cuasi convexas generalizadas f y g , satisface la propiedad de cuasi convexidad generalizada para cualquier par de puntos y cualquier combinación convexa de estos.

Sean $x, y \in I$ dos puntos arbitrarios en el dominio de f y g , y sea $t \in [0, 1]$ un número real que representa el peso en una combinación convexa de x y y . Por la propiedad de cuasi convexidad generalizada de f , se cumple que:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{f(x), f(y)\}.$$

De manera similar, la misma propiedad aplicada a g indica que:

$$g(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{g(x), g(y)\}.$$

La función h , que toma el valor máximo entre f y g en cualquier punto, se evalúa en la combinación convexa de x y y :

$$h(tx + (1 - t)y) = \max\{f(tx + (1 - t)y), g(tx + (1 - t)y)\}.$$

Aplicando las desigualdades obtenidas para f y g , y utilizando la propiedad de que el máximo de dos números no es mayor que el supremo de esos números, se obtiene:

$$h(tx + (1 - t)y) \leq \max\{\sup\{f(x), f(y)\}, \sup\{g(x), g(y)\}\}.$$

Finalmente, el supremo de la unión de dos conjuntos no es más que el supremo de todos sus elementos, lo que lleva a la conclusión de que:

$$h(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{h(x), h(y)\}.$$

Esta última desigualdad es precisamente la definición de una función cuasi convexa generalizada. Por lo tanto, se ha demostrado que h preserva la propiedad de cuasi convexidad generalizada.

Teorema 4.4 Sea $\lambda \in (0, 1]$ y sean f, g dos funciones definidas en el intervalo I que satisfacen la propiedad de cuasi convexidad generalizada. Entonces, la función compuesta h definida como $h(x) = f(x) + g(x)$ también satisface la propiedad de cuasi convexidad generalizada en I .

Demostración. Dadas dos funciones f, g que cumplen con la cuasi convexidad generalizada y para dos valores λ_1, λ_2 con $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$, se puede mostrar que $f + g$ también es cuasi convexa generalizada utilizando la propiedad de la cuasi convexidad individual de f y g .

Considerando dos puntos cualesquiera $x, y \in I$ y un parámetro $t \in [0, 1]$, se tiene que:

$$(f + g)(tx + (1 - t)y) = f(tx + (1 - t)y) + g(tx + (1 - t)y)$$

Aplicando la propiedad de cuasi convexidad generalizada a f y g por separado, se obtiene:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{f(x), f(y)\}$$

y

$$g(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{g(x), g(y)\}.$$

Al sumar estas desigualdades, resulta:

$$(f + g)(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{f(x), f(y)\} + \sup\{g(x), g(y)\}.$$

Dado que el supremo de la suma es menor o igual a la suma de los supremos, se puede escribir:

$$\sup\{f(x), f(y)\} + \sup\{g(x), g(y)\} \leq \sup\{f(x) + g(x), f(y) + g(y)\}.$$

Esto lleva a concluir que:

$$(f + g)(tx + (1 - t)y) \leq \sup\{(f + g)(x), (f + g)(y)\}.$$

Por lo tanto, $f + g$ es cuasi convexa generalizada en I .

4.3. Desigualdades del tipo Fejér para las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

Teorema 4.5 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ una función que es cuasi convexa generalizada en el intervalo $[a, b]$ con $a < b$. Supóngase que $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ es una función no negativa, integrable y simétrica con respecto a $\frac{a+b}{2}$. Entonces, se cumplen las siguientes desigualdades para las integrales fraccionales:

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \frac{1}{a^\alpha + g(b)} \int_{a+g(a)}^b f(g) + \frac{1}{a^\alpha - g(a)} \int_{b-g(a)}^a f(g(a)) \quad (4.1)$$

$$\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_{a+g(a)}^{b-g(a)} f(g) + \int_{b-g(a)}^a f(g(a)) \quad (4.2)$$

para todo $\alpha > 0$.

Demostración: Considerando que f es cuasi convexa generalizada, para cada $t \in [0, 1]$ se tiene que:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{t(a + (1-t)b) + t(b + (1-t)a)}{2}\right) \quad (4.3)$$

$$\leq \frac{f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)}{2} \quad (4.4)$$

Al multiplicar ambos lados de la desigualdad por $2t^{\alpha-1}g(tb + (1-t)a)$ y luego integrar con respecto a t sobre $[0, 1]$, se obtiene:

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 t^{\alpha-1} g(tb + (1-t)a) dt \quad (4.5)$$

$$\leq \int_0^1 t^{\alpha-1} [f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)] g(tb + (1-t)a) dt \quad (4.6)$$

$$= \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + (1-t)b) g(tb + (1-t)a) dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tb + (1-t)a) g(tb + (1-t)a) dt. \quad (4.7)$$

Para la demostración de la segunda desigualdad, se nota primero que si una función f es cuasi convexa generalizada, entonces, para todo t en el intervalo $[0, 1]$, se tiene

$$f(ta + (1 - t)b) + f(tb + (1 - t)a) \leq f(a) + f(b).$$

Multiplicando ambos lados de esta desigualdad por $t^{\alpha-1}g(tb+(1-t)a)$ e integrando la resultante con respecto a t sobre el intervalo $[0, 1]$, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{\alpha-1} f(ta + (1 - t)b) g(tb + (1 - t)a) dt + \int_0^1 t^{\alpha-1} f(tb + (1 - t)a) g(tb + (1 - t)a) dt \\ \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 t^{\alpha-1} g(tb + (1 - t)a) dt \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\Gamma(\alpha) \left[\frac{1}{(b-a)^\alpha} \left(\int_a^b f(g)(b) + \int_a^b f(g)(a) \right) \right] \leq \Gamma(\alpha) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(b) + \int_{b-a}^{b-a} g(a) \right]$$

Teorema 4.6 Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ una función diferenciable en I^0 y $f' \in L[a, b]$ con $a < b$. Si $|f'|$ es cuasi convexa generalizada en $[a, b]$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ es continua y simétrica a $(a + b)/2$, entonces la siguiente desigualdad para integrales fraccionarias se mantiene:

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g) \right| \leq \frac{(b-a)^{\alpha+1} \|g'\|_\infty}{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)} \left(1 - \frac{1}{2^\alpha} \right) |f'(a) + f'(b)|$$

con $\alpha > 0$.

Demostración. Dado que $|f'|$ es cuasi convexa generalizada en $[a, b]$, se sabe que para

$$t \in [a, b]$$

$$|f'(t)| = \left| f' \left(\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b \right) \right| \leq \frac{b-t}{b-a}|f'(a)| + \frac{t-a}{b-a}|f'(b)|, \quad (4.8)$$

y dado que $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ es simétrica a $\frac{a+b}{2}$, se puede escribir

$$\int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s) ds = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-s)^{\alpha-1} g(a+b-s) ds = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-s)^{\alpha-1} g(s) ds, \quad (4.9)$$

entonces se tiene

$$\left| \int_a^t (b-s)^{\alpha-1} g(s) ds - \int_t^b (s-a)^{\alpha-1} g(s) ds \right| = \left| \int_t^{\frac{a+b}{2}} (b-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right| \leq \int_t^{\frac{a+b}{2}} (b-s)^{\alpha-1} |g(s)| ds \quad (4.10)$$

$$\text{para } t \in \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \text{ y } \int_{\frac{a+b}{2}}^t (b-s)^{\alpha-1} |g(s)| ds \quad \text{para } t \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right].$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(g) \right| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^{a+\frac{b-a}{2}} \left(\int_t^{a+\frac{b+t}{2}} \left(\frac{b-s}{b-a} \right)^{\alpha-1} g(s) ds \right) \\ &\quad \times \left(\frac{b-t}{b-a} f'(a) + \frac{t-a}{b-a} f'(b) \right) dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a+\frac{b-a}{2}}^b \left(\int_{a+\frac{b+t}{2}}^t \left(\frac{b-s}{b-a} \right)^{\alpha-1} g(s) ds \right) \\ &\quad \times \left(\frac{b-t}{b-a} f'(a) + \frac{t-a}{b-a} f'(b) \right) dt \\ &\leq \frac{\|g\|_\infty}{(b-a)(\alpha+1)} \times \\ &\quad \int_a^{a+\frac{b-a}{2}} [((b-t)^\alpha - (t-a)^\alpha) ((b-t)f'(a) + (t-a)f'(b))] dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dado que

$$\int_a^{a+\frac{b-a}{2}} [(b-t)^\alpha - (t-a)^\alpha] (b-t) dt = \int_{a+\frac{b-a}{2}}^b [(t-a)^\alpha - (b-t)^\alpha] (t-a) dt$$

se tiene que

$$= \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \left(\frac{\alpha+1}{2^{\alpha+1}} - 1 \right)$$

y

$$\int_a^{a+\frac{b-a}{2}} [(b-t)^\alpha - (t-a)^\alpha] (t-a) dt = \int_{a+\frac{b-a}{2}}^b [(t-a)^\alpha - (b-t)^\alpha] (b-t) dt$$

se tiene que

$$\int_a^{a+\frac{b-a}{2}} [(b-t)^\alpha - (t-a)^\alpha] (t-a) dt = \frac{(b-a)^{\alpha+2}}{(\alpha+1)} (\alpha+2) \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{2^{\alpha+1}} \right)$$

4.4. Desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales.

Las desigualdades de tipo Hermite-Hadamard son una de las desigualdades integrales más importantes y tienen una fuerte relación con las funciones convexas en sentido general. Para cualquier función cuasi convexa $f : [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$, se sostiene la desigualdad

$$\frac{f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}{8} \leq \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx \leq \frac{f(\alpha_1) + f(\alpha_2)}{2},$$

Lema 4.1 Suponga que $f : J \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ es una función diferenciable tal que $\alpha_1, \alpha_2 \in J$ con $\alpha_1 < \alpha_2$. Si $f'' \in L[\alpha_1, \alpha_2]$, entonces

$$\begin{aligned} & \frac{f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}{8} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f''\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \\ &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \left[\int_0^1 t^3 f''\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-t)\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 (t-1)^3 f''\left(\frac{\alpha_2 + (1-t)\alpha_1}{2}\right) dt \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Demostración. El lema se demuestra aplicando la integración por partes en tres ocasiones. Para el primer término J_1 , se tiene:

$$J_1 = \int_0^1 t^3 f''\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-t)\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) dt$$

Esto es equivalente a:

$$\frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^3} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) - \frac{6}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \int_0^1 t^2 f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-t) \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) dt$$

y continúa como:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(\alpha_2 - \alpha_1)^3} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) - \frac{12}{(\alpha_2 - \alpha_1)^3} f' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \\ & + \frac{48}{(\alpha_2 - \alpha_1)^3} \int_0^1 f' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-t) \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La utilización de un cambio de variable $x = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-t) \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ para t en $[0, 1]$ y multiplicando ambos lados por $\frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} J_1 &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{48} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \\ & - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{8} f' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \frac{1}{8} f \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}} f(x) dx \end{aligned} \quad (4.14)$$

De forma análoga, se deduce para J_2 :

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} - \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{96} \int_0^1 (t-1)^3 f'' \left(\frac{\alpha_2 + (1-t)\alpha_1}{2} \right) dt \\ &= \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{48} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{8} f' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \\ & + \frac{1}{8} f \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}}^{\alpha_2} f(x) dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Finalmente, al sumar J_1 y J_2 y aplicar las anteriores igualdades, se llega a la identidad requerida.

Teorema 4.7 Sea $f : J \subseteq \mathbb{R}^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ una función diferenciable cuya segunda derivada, f'' , pertenece a $L[\alpha_1, \alpha_2]$. Aquí, α_1 y α_2 son elementos de J con $\alpha_1 < \alpha_2$. Si el valor absoluto de f'' es una función cuasi-convexa generalizada en el intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$, entonces se establece la siguiente desigualdad:

$$\frac{f \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right)}{8} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right)$$

$$\leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{384} K,$$

donde $K = \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|, |f'''(\alpha_1)| \right\} + \max \left\{ \left| f''' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|, |f'''(\alpha_2)| \right\}.$

Demostración. Utilizando el lema (4.1) y considerando que el valor absoluto de f'' es una función cuasi-convexa generalizada, se establece que:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right)}{8} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \int_0^1 t^3 \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-t) \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right| dt \\ & \quad + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \int_0^1 (t-1)^3 \left| f'' \left(\frac{\alpha_2 + (1-t)\alpha_1}{2} \right) \right| dt \\ & \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \int_0^1 t^3 \max \left\{ \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|, |f''(\alpha_1)| \right\} dt \\ & \quad + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \int_0^1 (1-t)^3 \max \left\{ \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|, |f''(\alpha_2)| \right\} dt \\ & \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{384} \left[\max \left\{ \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|, |f''(\alpha_1)| \right\} + \max \left\{ \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|, |f''(\alpha_2)| \right\} \right]. \end{aligned}$$

Lo cual concluye la prueba.

Teorema 4.8 Sea $f : J \subseteq \mathbb{R}^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ una función diferenciable tal que f'' está en $L[\alpha_1, \alpha_2]$, donde $\alpha_1, \alpha_2 \in J$ con $\alpha_1 < \alpha_2$. Si $|f''|$ es una función cuasi-convexa generalizada en $[\alpha_1, \alpha_2]$ y $q > 1$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces se cumple que

$$\left| \frac{f \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right)}{8} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right| \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96(3p+1)^{\frac{1}{p}}} K_q,$$

donde $K_q = \left(\max \left\{ \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|^q, |f''(\alpha_1)|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\max \left\{ \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|^q, |f''(\alpha_2)|^q \right\} \right)^{\frac{1}{q}}.$

Demostración. Sea $p > 1$. Entonces, a partir del lema (4.1) y utilizando la desigualdad de Hölder, se puede deducir que

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}{8} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f''\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \left(\int_0^1 t^3 |f''(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-t)\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \quad + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \left(\int_0^1 (1-t)^3 |f''(\frac{\alpha_2 + (1-t)\alpha_1}{2})|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

La cuasi-convexidad generalizada de $|f''|$ en $[\alpha_1, \alpha_2]$ implica que

$$\left(\int_0^1 |f''(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-t)\alpha_1)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \max \left\{ \left| f''(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}) \right|, |f''(\alpha_1)| \right\}$$

y

$$\left(\int_0^1 |f''(\frac{\alpha_2 + (1-t)\alpha_1}{2})|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \max \left\{ \left| f''(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}) \right|, |f''(\alpha_2)| \right\}$$

Por lo tanto, se obtiene que

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}{8} - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f''\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \right| \\
& \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{384} \left(\max \left\{ \left| f''(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}) \right|, |f''(\alpha_1)| \right\} + \max \left\{ \left| f''(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}) \right|, |f''(\alpha_2)| \right\} \right)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde se usaron las identidades

$$\int_0^1 t^{3p} dt = \int_0^1 (1-t)^{3p} dt = \frac{1}{3p+1}$$

Así, se completa la demostración.

Teorema 4.9 Sea $f : \mathbb{R}^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^\alpha$ una función diferenciable tal que f'' pertenece a $L[\alpha_1, \alpha_2]$, donde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ con $\alpha_1 < \alpha_2$. Si f'' es una función cuasi-convexa generalizada en $[\alpha_1, \alpha_2]$ y q es mayor o igual a 1 con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces se tiene que:

$$\left| \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right| \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{384} K_f,$$

Demostración. A partir del lema (4.1), las propiedades del módulo y la desigualdad media potencial, se tiene que:

$$\begin{aligned} & \left| \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right| \\ & \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \int_0^1 \left| r^3 f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-r)\alpha_1 \right) + (1-r)^3 f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + r\alpha_2 \right) \right| dr \\ & \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \left(\int_0^1 r^3 dr \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-r)\alpha_1 \right) \right|^q dr \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{96} \left(\int_0^1 (1-r)^3 dr \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + r\alpha_2 \right) \right|^q dr \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Luego, utilizando la cuasi-convexidad generalizada de f'' en $[\alpha_1, \alpha_2]$, se tiene que:

$$\left(\int_0^1 \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + (1-r)\alpha_1 \right) \right|^q dr \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{4} \max \left\{ \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|^q, |f''(\alpha_1)|^q \right\},$$

y

$$\left(\int_0^1 \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + r\alpha_2 \right) \right|^q dr \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{4} \max \left\{ \left| f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right|^q, |f''(\alpha_2)|^q \right\}.$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\left| \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) - \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{24} f'' \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \right) \right| \leq \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^3}{384} K_f.$$

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de las funciones cuasi convexas generalizadas en conjuntos fractales, a los fines de destacar los resultados más relevantes de acuerdo a los objetivos planteados. Además, se establecen las conclusiones y algunas líneas futuras que se pueden generar a partir de las mismas.

5.2. Análisis de los resultados

Con relación al objetivo 1, de describir las propiedades algebraicas y topológicas de las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales, se muestra que las propiedades de cuasi-convexidad se preservan a través de varias operaciones matemáticas fundamentales aplicadas a funciones. Inicialmente, se examina la composición de dos funciones cuasi-convexas generalizadas, demostrando que tal composición también resulta ser cuasi-convexa.

Además, se presenta que las propiedades de las funciones cuasi convexas se extienden a otras operaciones en terminos de los conjuntos fractales, como la escalación y la suma de funciones. Se demuestra que al multiplicar una función cuasi-convexa por un escalar positivo, la función resultante conserva la cuasi-convexidad. De manera similar, la adición de dos funciones cuasi-convexas también produce una función cuasi-convexa.

Con respecto al objetivo 2, de establecer desigualdades del tipo Fejér para las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales, se presentaron teoremas que conectan las propiedades de cuasi-convexidad de una función f con el comportamiento integral de otra función g , que es no negativa, integrable y simétrica con respecto al punto medio del intervalo de un conjunto fractal. La cuasi-convexidad. Las desigualdades presentadas muestran una relación fundamental entre los valores

de f en los extremos del intervalo y las integrales que involucran tanto f como g . Específicamente, la desigualdad compara el promedio de los valores de f en los extremos del intervalo con una combinación de integrales de f ponderadas por g .

Conforme al objetivo 3, de demostrar desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para las funciones cuasi-convexas generalizadas sobre conjuntos fractales, se exploran generalizaciones de estas desigualdades considerando la inclusión de términos derivados de la función. Se incorpora la segunda derivada de la función y se considera el caso de funciones cuya segunda derivada es cuasi-convexa generalizada. Estas generalizaciones permiten establecer límites superiores más precisos y proporcionan estimaciones de error más detalladas. Además, se hace uso de herramientas analíticas como la desigualdad de Hölder y propiedades que de las funciones cuasi convexas generalizadas en conjuntos fractales.

5.3. Conclusiones

En correspondencia con los objetivos planteados en esta investigación, a continuación se plantean las conclusiones más importantes que se derivan de la presentación y análisis de los resultados:

1. La cuasi-convexidad se preserva en operaciones fundamentales como la composición, la escalación y la suma de funciones definidas sobre conjuntos fractales.
2. Se establecen condiciones que vinculan la cuasi-convexidad de una función f con el comportamiento integral de otra función g , siendo esta última no negativa, integrable y simétrica. Las desigualdades establecidas revelan una relación entre los valores extremos de f y las integrales que involucran tanto a f como a g , destacando cómo el promedio de los valores de f en los extremos del intervalo se compara con integrales ponderadas de f mediante g .
3. Se exploran generalizaciones que incluyen términos derivados, especialmente la segunda derivada de la función. Al considerar funciones cuya segunda derivada es cuasi-convexa generalizada, se logra establecer límites superiores más precisos y detallados estimaciones de error.

En respuesta al objetivo general, la investigación ha demostrado que las propiedades de cuasi-convexidad se mantienen como la composición, la escalación y la suma de funciones definidas sobre conjuntos fractales. Las desigualdades establecidas incorporan la segunda derivada y consideran la cuasi-convexidad de esta derivada, enfatizando cómo el promedio de los valores en los extremos se compara con integrales ponderadas de una función a otra.

5.4. Líneas futuras de investigación

Partiendo de los resultados de esta investigación, a continuación se proponen diferentes líneas para profundizar el estudio de las funciones cuasi convexas en conjuntos fractales.

1. Extensión de la teoría de funciones cuasi-convexas generalizadas a espacios métricos fractales.
2. Investigación de funciones cuasi-convexas generalizadas en sistemas dinámicos fractales.
3. Análisis de la convexidad y cuasi-convexidad en fractales generados por sistemas de funciones iteradas.
4. Desarrollo de técnicas de interpolación basadas en funciones cuasi-convexas en fractales.
5. Análisis de la estabilidad y convergencia de algoritmos basados en funciones cuasi-convexas en fractales.

Referencias

- Afonso C., A. (2018). Medida, dimensión y fractales. Universidad de la Laguna.
- Bracamonte, M. (2016). Desigualdades del tipo Hermite-Hadamard y Fejér para funciones fuertemente armónicas convexas. *Revista MATUA* ISSN: 2389-7422, 3(2).
- Britannica, T. Editors of Encyclopaedia. (2022). Fractales: Enciclopedia Britannica. <https://www.britannica.com/science/fractal>
- Cambini, A., & Martein, L. (2008). Generalized convexity and optimization: Theory and applications (Vol. 616). Springer Science & Business Media.
- Cooper, F. (2011). Introduction to Fractals and Julia Sets. Universidad de Warwick.
- Daniilidis, A., & Hadjisavvas, N. (1999). Characterization of nonsmooth semistrictly quasiconvex and strictly quasiconvex functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102, 525-536.
- Dragomir, SS (1992). Dos mapeos en relación con las desigualdades de Hadamard. *J. Matemáticas. Anal. Appl*, 167(1), 49-56.
- Espinoza Freire, E. E. (2020). La investigación cualitativa, una herramienta ética en el ámbito pedagógico. *Conrado*, 16(75), 103-110.
- Fernández, E. (2011). Herramientas de optimización convexa y aplicaciones en telecomunicaciones. PCF, Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés.
- Förg-Rob, W., Nikodem, K., & Páles, Z. (1996). Separation by monotonic functions. *Mathematica Pannonica*, 7(2), 191-196.
- Garcia, Y. (2022). Caracterización de la cuasiconvexidad del ínfimo de una familia de traslaciones de funciones cuasiconvexas. *Conferencias IMCA 25 años*, Lima-Perú.
- Goberna, M. A., Rodríguez Álvarez, M., & Vicente-Perez, J. (2020). Evenly convex sets, and evenly quasiconvex functions, revisited. Departamento de Matemáticas, Universidad de Alicante, España.

- Greenberg, H. J., & Pierskalla, W. P. (1971). A review of quasi-convex functions. *Operations research*, 19(7), 1553-1570.
- Gutierrez, P., & Hott, E. (2004). *Introducción al mundo fractal: matemática*. 4to medio matemático.
- Hernández, J. E., Gómez, J. F. (2018). Desigualdades de tipo Hermite-Hadamard, procesos estocásticos convexos y la integral fraccionaria de Katugampola. *Revista Integración*, 36(2), 133-149.
- Lakhdari, A., Saleh, W., Meftah, B., & Iqbal, A. (2022). Corrected Dual-Simpson-Type Inequalities for Differentiable Generalized Convex Functions on Fractal Set. *Fractal and Fractional*, 6(12), 710.
- Lara, F. (2022). On strongly quasiconvex functions: existence results and proximal point algorithms. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 192(3), 891-911.
- Mandelbrot, B. (1982). *La geometría fractal de la naturaleza*, colección.
- Materano, J. (2015). *Funciones Convexas, Cuasi-Convexas, Lipschitz y la Desigualdad de Simpson*. Universidad Central De Venezuela.
- Meftah, B., Lakhdari, A., Saleh, W., & Kiliçman, A. (2023). Some New Fractal Milne-Type Integral Inequalities via Generalized Convexity with Applications. *Fractal and Fractional*, 7(2), 166.
- Ortega, A. O. (2018). *Enfoques de investigación. Métodos para el diseño urbano—Arquitectónico*, 1.
- Pickover, C. A. (2009). *El Libro de las matemáticas: de Pitágoras a la 57 dimensión*, 250 hitos de la historia de las matemáticas. Sterling.
- Ramos-Galarza, CA (2020). Los alcances de una investigación. *CienciaAmérica*, 9(3), 1-6.
- Spinadel, V. (2002). Geometría fractal y geometría euclidiana. *Revista Educación y Pedagogía*, 15(35), 84-91.
- Stenger, J., Gamboa, F., & Keller, M. (2021). Optimization of quasi-convex function over product measure sets. *SIAM Journal on Optimization*, 31(1), 425-447.
- Tseng, KL, Hwang, SR y Dragomir, SS (2017). Desigualdades tipo Fejér (II). *Mathe-*

- matica Slovaca, 67(1), 109-120.
- Villena Aire, J. H. (2019). Convergencia y eficiencia de un método de subgradiente para minimización de funciones Cuasi-Convexa. Universidad Nacional del Callao.
- Wen-bing, S. U. N. (2019). Integral inequalities for generalized harmonically quasi-convex functions on fractal sets. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2019(4), 62.
- Yang, X. J. (2011). Análisis funcional fraccional local y sus aplicaciones. Asian Academic Publisher Limited.

ANEXOS

Anexo A. Informe de gastos en la realización de la tesis.

Este apartado contempla un resumen de los recursos económicos invertidos en el proceso de realización de esta tesis.

Descripción de aspectos	Monto
Transporte, combustible y viáticos	6,500.00
Impresión	7,500.00
Encuadernado, empastado y CDs	3,000.00
Fotocopias	3,000.00
Materiales e insumos	5,400.00
Imprevistos	4,300.00
Total	29,700.00

Anexo II. Cronograma de trabajo de la investigación.

En este apartado se describen las diferentes etapas del proceso de elaboración de esta investigación y sus respectivas fechas de ejecución.

Descripción	Periodos de ejecución
Solicitud de título	Abril, 2023
Aprobación del título	Mayo, 2023
Elaboración y entrega del anteproyecto.	Noviembre, 2023
Evaluación del Anteproyecto	Noviembre-diciembre, 2023
Elaboración de capítulo IV y V	Diciembre, 2023
Defensa ante los jurados	Enero, 2024
Entrega de proyecto completo a la Facultad	Enero, 2024
Graduación	Febrero, 2024

Anexo C. Propiedades de las funciones convexas generalizadas.

Teorema 5.1 Sea $f : I \rightarrow R^\alpha$. Entonces, f es una función convexa generalizada si y solo si se cumple la desigualdad

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)^\alpha} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)^\alpha}$$

para cualquier $x_1, x_2, x_3 \in I$ con $x_1 < x_2 < x_3$.

Demostración. De hecho, tomando $\lambda = (x_3 - x_2) / (x_3 - x_1)$, entonces $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Y por la convexidad generalizada de f , se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leq \lambda^\alpha f(x_1) + (1 - \lambda)^\alpha f(x_3) \\ &= \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right)^\alpha f(x_1) + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right)^\alpha f(x_3). \end{aligned}$$

A partir de la fórmula anterior, es fácil ver que

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{(x_1 - x_2)^\alpha} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)^\alpha}.$$

Recíprocamente, para cualquier par de puntos x_1, x_3 ($x_1 < x_3$) en $I \subseteq R$, se toma $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$ para $\lambda \in (0, 1)$. Entonces $x_1 < x_2 < x_3$ y $\lambda = (x_3 - x_2) / (x_3 - x_1)$. Usando el proceso inverso anterior, se tiene

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) \leq \lambda^\alpha f(x_1) + (1 - \lambda)^\alpha f(x_3).$$

Por lo tanto, f es una función convexa en $I \subseteq R$. De la misma manera, se puede demostrar que f es una función convexa generalizada en $I \subseteq R$ si y solo si

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^\alpha} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{(x_3 - x_1)^\alpha} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)^\alpha},$$

para cualquier $x_1, x_2, x_3 \in I$ con $x_1 < x_2 < x_3$.

Teorema 5.2 Si $f \in D_\alpha(I)$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es una función convexa generalizada en I ,

2. $f^{(\alpha)}$ es una función creciente en I ,
3. para cualquier $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f^{(\alpha)}(x_1)}{\Gamma(1+\alpha)} (x_2 - x_1)^\alpha.$$

Demostración. $(1 \rightarrow 2)$ Sea $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Y toma $h > 0$ suficientemente pequeño tal que $x_1 - h, x_2 + h \in I$. Dado que $x_1 - h < x_1 < x_2 < x_2 + h$, entonces usando el (5.1), se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma(1+a) \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h^\alpha} \\ \leq \Gamma(1+a) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^\alpha} \\ \leq \Gamma(1+a) \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h^\alpha}. \end{aligned}$$

Dado que $f \in D_\alpha(I)$, al dejar que $h \rightarrow 0^+$, se sigue que

$$f^{(\alpha)}(x_1) \leq \Gamma(1+a) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)^\alpha} \leq f^{(\alpha)}(x_2).$$

Por lo tanto, $f^{(\alpha)}$ es creciente en I . $(2 \rightarrow 3)$ Tomando x_1 y x_2 en I , se asume, sin pérdida de generalidad, que $x_1 < x_2$. Considerando que $f^{(\alpha)}$ es una función creciente en el intervalo I , se aplica el teorema generalizado de Taylor local fraccional, lo cual lleva a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{f^{(\alpha)}(\xi)}{\Gamma(1+a)} (x_2 - x_1)^\alpha \\ &\geq \frac{f^{(\alpha)}(x_1)}{\Gamma(1+a)} (x_2 - x_1)^\alpha, \end{aligned}$$

donde $\xi \in (x_1, x_2)$. En otras palabras, se obtiene la desigualdad:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f^{(\alpha)}(x_1)}{\Gamma(1+a)} (x_2 - x_1)^\alpha.$$

$(3 \rightarrow 1)$ Para cualquier x_1 y x_2 en I , se toma $x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, donde $0 < \lambda < 1$. Es fácil observar que $x_1 - x_3 = (1 - \lambda)(x_1 - x_2)$ y $x_2 - x_3 = \lambda(x_2 - x_1)$.

Luego, utilizando la tercera condición, se tiene:

$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_3) + \frac{f^{(\alpha)}(x_3)}{\Gamma(1+\alpha)} (x_1 - x_3)^\alpha \\ &= f(x_3) + (1-\lambda)^\alpha \frac{f^{(\alpha)}(x_3)}{\Gamma(1+\alpha)} (x_1 - x_2)^\alpha, \end{aligned}$$

Al multiplicar λ^α y $(1-\lambda)^\alpha$ en las dos fórmulas anteriores, respectivamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha f(x_1) + (1-\lambda)^\alpha f(x_2) \\ \geq f(x_3) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que f es una función convexa generalizada en I .

Proposición 5.4.1 Si $f \in D_{2\alpha}(a, b)$, entonces f es una función convexa generalizada (o una función cóncava generalizada) si y solo si se cumple la siguiente desigualdad:

$$f^{(2\alpha)}(x) \geq 0 \quad \left(\text{o } f^{(2\alpha)}(x) \leq 0 \right),$$

para cualquier $x \in (a, b)$.

Teorema 5.3 Sea f una función convexa generalizada en $[a, b]$. Entonces, para cualquier $x_i \in [a, b]$ y $\lambda_i \in [0, 1]$ (con $i = 1, 2, \dots, n$) y $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, se cumple la siguiente desigualdad:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha f(x_i).$$

Demostración. Cuando $n = 2$, la desigualdad es obviamente verdadera. Supongase que la desigualdad también es verdadera para $n = k$. Entonces, para cualquier $x_1, x_2, \dots, x_k \in [a, b]$ y $\gamma_i > 0$ (con $i = 1, 2, \dots, k$) y $\sum_{i=1}^k \gamma_i = 1$, se tiene:

$$f\left(\sum_{i=1}^k \gamma_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \gamma_i^\alpha f(x_i)$$

Si $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{(k+1)} \in [a, b]$ y $\lambda_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, k+1$ con $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, se define $\gamma_i = \lambda_i / (1 - \lambda_{k+1})$, para $i = 1, 2, \dots, k$. Es fácil ver que $\sum_{i=1}^k \gamma_i = 1$. Por lo

tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}
& f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}) \\
&= f\left((1 - \lambda_{k+1}) \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k}{1 - \lambda_{k+1}} + \lambda_{k+1} x_{k+1}\right) \\
&\leq (1 - \lambda_{k+1})^\alpha f(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \cdots + \gamma_k x_k) + \lambda_{k+1}^\alpha f(x_{k+1}) \\
&\leq (1 - \lambda_{k+1})^\alpha [\gamma_1^\alpha f(x_1) + \gamma_2^\alpha f(x_2) + \cdots + \gamma_k^\alpha f(x_k)] \\
&\quad + \lambda_{k+1}^\alpha f(x_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^k \lambda_i^\alpha f(x_i).
\end{aligned}$$

Lo cual concluye la demostración.