

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemáticas

Título

Aplicación del enfoque analítico de las formas modulares a la conjetura de
Ramanujan.

Sustentante

Anyelina Suárez De La Rosa

Asesor

MA. Wilson Lucilo Heredia Amparo

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

TÍTULO

APLICACIÓN DEL ENFOQUE ANALÍTICO DE LAS FORMAS MODULARES
A LA CONJETURA DE RAMANUJAN.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación, son responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque para la reproducción total o parcial del mismo, se requiere de su autorización.

Título

Aplicación del enfoque analítico de las formas modulares a la conjetura de Ramanujan.

Trabajo de Postgrado presentado por **Anyelina Suárez De La Rosa** para optar por el título de Maestría en Matemáticas

Composición del tribunal

MA. Danny Daniel Manzueta Perez

Jurado de metodología

MA. Angela Merejo

Jurado de Redacción

MA. José Miguel Gómez

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Agradecimientos.....	VI
Dedicatorias.....	VII
Resumen.....	IX
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 Introducción.	1
1.2 Antecedentes	1
1.2.1 Antecedentes históricos	1
1.2.2 Antecedentes académicos	3
1.3 Planteamiento del problema.	5
1.4 Justificación.	6
1.5 Objetivos.	7
1.5.1 General.	7
1.5.2 Específicos.	7
1.6 Alcances y Límites	7
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.	8
2.1 Introducción.	8
2.2 Marco teórico.	8
2.2.1 Teoría de las formas modulares	8
2.2.2 Operador Hecke (H_n)	12
2.2.3 Función de Ramanujan	15
CAPÍTULO III. DISEÑO METODOLÓGICO	19
3.1 Introducción	19
3.2 Marco metodológico	19
3.2.1 Diseño	19
3.2.2 Método	19
3.2.3 Tipo	19
3.2.4 Enfoque	19
3.3 Procedimientos	20

CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	21
4.1 Introducción	21
4.2 Caracterización del operador de Hecke para las formas modulares . .	21
4.3 Demostración desde un enfoque analítico de la conmutatividad de la función de Ramanujan	26
4.4 Fundamentos de la teoría analítica que garantizan que $ \tau(p) \leq 2p^{11/2}$ para todo número primo p	33
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS	36
5.1 Introducción	36
5.2 Análisis de los resultados	36
5.3 Conclusiones	37
5.4 Líneas futuras de investigación	38
Referencias	40
ANEXOS	42

Agradecimientos

A Dios. Por haberme acompañado y guiado a lo largo de esta trayectoria, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO). Por abrirme las puertas y brindarme la oportunidad de avanzar en mi carrera profesional, un lugar para además de hacer colegas tener hermanos.

Al ex y actual coordinador de la Maestría: Efraín Martínez y Manuel Arismedy Batista. A Efraín Martínez le doy las gracias por siempre estar dispuesto ayudarme y guiarme durante esta trayectoria, aunque no termino de coordinar esta maestría, siempre estaré agradecida de usted por su esfuerzo y dedicación. A Manuel Arismedy Batista gracias por continuar con el grupo, por estar pendiente y preocuparse para que de una manera u otra el grupo continuara bien.

Al asesor Wilson Lucilo Heredia Amparo. Su experiencia, comprensión y paciencia contribuyeron a mi experiencia en el complejo y gratificante camino de la investigación, es un excelente asesor, gracias por ser mi guía durante este trabajo de investigación.

A los docentes. Agradezco de todo corazón las enseñanzas brindadas por todos y cada uno de ustedes, que se esforzaron para impartir sus experiencias y maravillosas enseñanzas.

Dedicatorias

A Dios. Por ser esa luz incondicional que ha guiado mi camino, por haberme permitido llegar hasta este punto de mi vida y haberme dado salud para lograr mis objetivos, por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente, por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte durante esta trayectoria.

A mis padres Pastora De La Rosa y José Gabriel Suárez. Por apoyarme en todo momento, por sus palabras de aliento, sus consejos y su amor, por haberme formado una mujer de bien, por estar siempre a mi lado brindándome su mano amiga, no va a ver manera de devolverles todo lo que me han dado, este es un logro que he llevado a cabo y sin lugar a duda ha sido en gran parte gracias a ustedes. Los amo.

A mi abuela Rumalda De La Rosa. No tengo palabras para agradecerte por tanto amor que me has dado, eres el sol que ilumina mis días, eres la mejor abuela que Dios pudo haberme dado, te amo, puedo decir plenamente que eres mi segunda madre por los valores y los aportes que has realizado para mi vida son invaluable.

A mis hermanos: Ángel Luis, Anyerica y Anyelania. Les agradezco no solo por estar presentes aportando buenas cosas a mi vida, sino por los grandes lotes de felicidad y diversas emociones que siempre me han causado, gracias por su cariño y apoyo incondicional durante todo este proceso. Los quiero mucho.

A mis sobrinas Meredith y Vianny. Su cariño, amor y sus grandes manifestaciones de afecto hacia mí, me impulsan cada día mas para seguir adelante, las amo.

A mis tíos. Gracias a cada uno de ustedes por estar presente en mi vida, por apoyarme de una manera u otra en esta trayectoria. Los quiero mucho.

A mis amigos y compañeros. Un sincero agradecimiento a todos mis amigos y compañeros en especial a Candy María Rosario Diaz, Lucia Bautista, Sorivel Veras, que estuvieron conmigo en los momentos de estrés y alegría durante este largo y retador camino, su apoyo, confianza, soporte y cariño han sido invaluable, cada uno de ustedes a contribuido a mi fortaleza y ánimo de una manera u otra, gracias por ser mi punto de apoyo, mi equipo de aliento y lo más importante la familia que yo elegí.

A los profesores: Leomar Reyes, Wilson Lucilo Heredia Amparo, Rainier Sánchez, Danny Manzueta y demás, por todo el apoyo brindado a lo largo de esta trayectoria, por su tiempo y dedicación para compartir sus conocimientos y experiencias.

A todos mis vecinos, amigos y familiares que contribuyeron con un granito de arena, por ayudarme de una manera desinteresada, gracias infinitas por toda su ayuda y buena voluntad.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Sustentante
Anyelina Suárez De La Rosa

Asesor
MA. Wilson Lucilo Heredia Amparo

RESUMEN

Esta tesis presenta un análisis de la aplicación del enfoque analítico de las formas modulares en la conjetura de Ramanujan, cuyos objetivos estuvieron basados en caracterizar el operador de Hecke para las formas modulares con respecto al grupo modular, demostrar desde un enfoque analítico que la función de Ramanujan es conmutativa y describir los fundamentos de la teoría analítica que garantizan que $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ para todo número primo p .

El diseño metodológico adopta un enfoque no experimental y transversal, recolectando datos en un momento único sin manipulación intencionada de variables. El método deductivo guía el estudio, permitiendo extraer conclusiones lógicas a partir de principios generales. Se caracteriza por ser descriptivo-analítico y exploratorio, además de estar basado en un enfoque cualitativo.

Los resultados más relevantes de esta investigación están basados en la caracterización del operador de Hecke dentro del contexto de las formas modulares, el cual preserva la modularidad y la propiedad de que sea una función modular. Se establece que $f(z)$ conserva la invariancia modular, heredando así la conmutatividad de Δ , y que el estudio de la función de Ramanujan τ y su relación con la teoría analítica ha llevado a confirmar que, efectivamente, para todo número primo p , la magnitud de $\tau(p)$ está limitada superiormente por $2p^{11/2}$.

Palabras claves: Operador de Hecke. Conjetura de Ramanujan. Formas modulares. Teoría analítica.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN.

1.1. Introducción.

En este primer capítulo se describen los antecedentes históricos y académicos que sustentan esta investigación, además del planteamiento del problema, justificación, los objetivos, y la delimitación que define los alcances y límites de la misma.

1.2. Antecedentes

La teoría de números, una de las ramas más antiguas de las matemáticas, ha sido un campo de estudio para matemáticos a lo largo de los siglos. En el siglo XX, un matemático indio brillante y autodidacta, Srinivasa Ramanujan, emergió como una figura icónica en este campo, con contribuciones que siguen desconcertando y maravillando a la comunidad matemática. Uno de los misterios más notorios y profundos que Ramanujan dejó, fue la conjetura que lleva su nombre. En su esencia, se centra en el estudio de las particiones de números enteros, es decir, cómo se pueden descomponer números en sumas de enteros positivos. En esta sección se presentan los antecedentes históricos y académicos que marcan el desarrollo de las formas modulares y de la conjetura de Ramanujan.

1.2.1. Antecedentes históricos

1.2.1.1. Antecedentes históricos de las formas modulares.

Históricamente, el estudio de las funciones modulares comenzó en el siglo XIX, donde aparecieron por primera vez en la teoría de las funciones elípticas, específicamente como elementos del campo de función de una curva elíptica. El término se remonta a Peter Gustav Lejeune Dirichlet, aunque las funciones también se encontraron en las obras de Gauss, Abel y Jacobi (en relación con su trabajo sobre funciones theta) (Rousu, 2021).

Las primeras formas modulares fueron encontrados por Gauss en su trabajo sobre la media aritmético-geométrica alrededor de 1800, y sería necesario hasta finales del siglo XIX para que se introdujera el término forma modular, en 1890 (Kilford, 2015).

Es preciso destacar que de acuerdo a Edixhoven et al., (2008), las formas modulares también aparecen como funciones theta en el trabajo de Jacobi en la década de 1820, y, hasta un factor $q^{1/24}$, ya en la identidad de Euler:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{(3k^2 - k)/2}$$

Aparecen de forma natural en las expansiones de funciones elípticas y más tarde, también jugaron un papel significativo en las obras de Leopold Kronecker, Gotthold Eisenstein y Karl Weierstrass. Hacia el final del siglo XIX, las funciones modulares se convirtieron en una fuente crucial de inspiración para Felix Klein y Henri Poincaré en el desarrollo de la teoría de las funciones automorfas. De hecho, la teoría de las superficies de Riemann se convirtió en una herramienta importante en este contexto, y fue Klein quien usó el término “Modulform” por primera vez. Un estudio sistemático de las formas modulares en $SL_2(\mathbb{Z})$ y sus subgrupos de congruencia fue realizado por Erich Hecke en 1925, y esto estableció las formas modulares como una disciplina independiente dentro de la teoría de funciones y la teoría analítica de números (Rousu, 2021).

1.2.1.2. Antecedentes históricos de la conjetura de Ramanujan.

Conforme lo plantea Williams (2015), fue publicado un artículo sobre funciones aritméticas en 1916, por Ramanujan donde introdujo la función $\tau(n)$ que lleva su nombre. Esta función está definida para todos los enteros positivos n por

$$q \left[\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n, \quad q \in C, \quad |q| < 1.$$

Ramanujan calculó los primeros 30 valores de $\tau(n)$ y observó que $\tau(n)$ parecía

ser multiplicativa, es decir,

$$\tau(n_1 n_2) = \tau(n_1) \tau(n_2), \quad n_1, n_2 \in N, \quad \gcd(n_1, n_2) = 1.$$

Esto fue demostrado por Mordell poco después utilizando técnicas modulares, las cuales eran desconocidas para Ramanujan (Saltachin, 2019).

De acuerdo con Kohnen (2004), la conjetura original de Ramanujan fue propuesta por el matemático indio Srinivasa Ramanujan en 1919, y se centró en la función $\Delta(q)$, la cual es una función modular cuyos coeficientes, denotados por $\tau(n)$, tienen propiedades aritméticas intrigantes. Ramanujan conjeturó que para cada número primo p ,

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$$

Durante los años siguientes a la propuesta de Ramanujan, muchos matemáticos trataron de demostrar esta conjetura, logrando resultados parciales. Uno de los primeros avances significativos fue hecho por Hans Petersson en 1930, quien estableció una fórmula para el cuadrado absoluto de $\tau(n)$ en términos de sumas divisorias (Bruinier y Ono, 2013).

Sin embargo, el verdadero avance en la conjetura de Ramanujan se logró en la década de 1970 gracias al trabajo de Pierre Deligne. En 1974, Deligne probó la conjetura de Ramanujan como un caso especial de su demostración de la conjetura de Weil, por la cual se le otorgó la Medalla Fields en 1978. Deligne mostró que los coeficientes $\tau(n)$ satisfacen la conjetura de Ramanujan, estableciendo finalmente el resultado que Ramanujan había predicho más de 50 años antes (Murphy, 2017).

1.2.2. Antecedentes académicos

Hunt y Hirschhorn (1981), presentan en su artículo “Una prueba sencilla de la conjetura de Ramanujan para potencias de 5”, donde se prueba que si n es de una forma específica entonces $p(n)$, el número de particiones de n , es divisible por una alta

potencia de 5. Establecen fórmulas generadoras apropiadas, a partir de las cuales la conjetura de Ramanujan, así como algunos resultados de un tipo similar, se muestran de manera sencilla, así se derivan dos nuevas congruencias para la función de partición.

Blasio (2006) en su publicación titulada “Formas modulares de Hilbert y la conjetura de Ramanujan” completa la prueba, en todos los lugares finitos, de la Conjetura de Ramanujan para formas modulares de Hilbert holomorfas que pertenecen a las series discretas en los lugares infinitos. Además, la Conjetura de Peso-Monodromía de Deligne se demuestra para las variedades de Shimura asociadas a $GL(2)$ y sus formas internas.

Por otro lado, Blomer y Brumley (2011), en su artículo “Sobre la conjetura de Ramanujan sobre campos numéricos” extienden a un campo numérico arbitrario los mejores límites conocidos hacia la conjetura de Ramanujan para el grupo GL_n , $n = 2, 3, 4$. En particular, presentan una técnica que supera los obstáculos analíticos planteados por la presencia de un grupo infinito de unidades.

En el artículo de Miatello (2015), “Formas modulares y operadores de Hecke”, se lleva a cabo un examen detallado de las series de Eisenstein y las series theta. El estudio se centra en la estructura del álgebra de formas modulares, con especial atención al grupo $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$. Posteriormente, se investigan los operadores de Hecke asociados a este grupo, y se presenta una ampliación a los grupos de Hecke $\Gamma_0(N)$. El análisis incluye las propiedades de las autofomas de Hecke y de las funciones L vinculadas a ellas, resaltando su relación con los productos de Euler.

En su tesis de maestría en Matemáticas, Gómez (2019) ofrece una introducción contemporánea al estudio de las “Formas modulares”. El trabajo destaca la naturaleza aritmética de estas formas, una herramienta clave para probar de manera completa la conjetura de Bachet y de forma parcial la conjetura de Ramanujan.

Winnie (2020) publica el artículo de “La conjetura de Ramanujan y sus aplicaciones”, donde se realiza una revisión de la conjetura de Ramanujan en entornos clásicos y modernos y explican sus diversas aplicaciones en informática, incluidas las construcciones explícitas de objetos combinatorios espectralmente extremos, llamados gráficos de Ramanujan y complejos de Ramanujan, puntos distribuidos uniformemente en esferas y puntos dorados. También se discute la conexión entre los gráficos/complejos de Ramanujan y sus funciones zeta que satisfacen la hipótesis de Riemann.

1.3. Planteamiento del problema.

Las formas modulares se han constituido en una herramienta fundamental y significativa en la matemática contemporánea. Estas funciones holomorfas, que se caracterizan por su invariancia o simetría bajo ciertos subgrupos de transformaciones lineales, tienen un gran campo de aplicación en geometría algebraica y Física teórica, pero sobre todo en la teoría de números.

La conjetura de Ramanujan, con su formulación sobre la función τ , ha permitido una mayor comprensión de los números primos y su distribución. Esta conjetura, al establecer una restricción específica en el crecimiento de la función τ , en que para todo número primo p , el valor absoluto de $\tau(p)$ es menor o igual a $2p^{11/2}$, indicando que no crece de manera desmedida cuando se evalúa en números primos, tiene implicaciones significativas tanto en la teoría de números como en la representación de las formas modulares. De hecho, esta conjetura propuesta por Ramanujan y demostrada por Pierre Deligne, son un logro emblemático en las matemáticas del siglo XX, porque no solo resolvió una pregunta matemática fundamental, sino que también reveló conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas como las anteriormente mencionadas.

Una de las consecuencias inmediatas de esta demostración, es que fue probada partiendo la conjetura de Weil que establece una relación entre la geometría de variedades algebraicas sobre cuerpos finitos y la estructura aritmética de estas variedades. Ahora bien, dada la trascendencia de este resultado en la teoría de los números primos

y las formas modulares, es que este proyecto pretende dar respuesta a la pregunta de investigación, ¿Cómo aplicar el enfoque analítico de las formas modulares a la conjetura de Ramanujan?

Para dar solución a esta interrogante, esta pregunta general se subdivide en las siguientes:

1. ¿Cuáles condiciones caracterizan el operador de Hecke para las formas modulares con respecto al grupo modular?
2. ¿Cómo demostrar desde un enfoque analítico que la función de Ramanujan es conmutativa?
3. ¿Cuáles fundamentos de la teoría analítica garantizan que el valor absoluto de $\tau(p)$ es menor o igual a $2p^{11/2}$ para todo número primo?

1.4. Justificación.

La conjetura de Ramanujan tiene una gran importancia por su profunda conexión con áreas fundamentales de las matemáticas, incluyendo la teoría de números algebraicos, la geometría algebraica y la teoría de representación. El análisis de las formas modulares permite explorar y potencialmente desarrollar nuevas técnicas en la teoría analítica de números, que pueden arrojar luz sobre problemas abiertos y conducir a nuevas preguntas de investigación. Es por esto que las formas modulares no sólo son de interés para los teóricos de números, también tienen aplicaciones en la física, especialmente en la teoría de cuerdas y la criptografía, lo que amplía la relevancia de la conjetura de Ramanujan más allá de las matemáticas puras.

En virtud de lo anterior, abordar esta conjetura desde una perspectiva analítica no solo es fundamental para estudiar sus propiedades inherentes, sino que también proporciona una comprensión de la distribución de los números primos. Esta aproximación analítica, que hace uso de herramientas como la teoría de series de Fourier y las técnicas de transformadas, permite trascender los límites algebraicos y explorar

la simetría y las propiedades de estas formas en espacios más generales.

La realización de esta tesis permite ampliar la comprensión de esta conjetura y será un referente para próximas investigaciones de esta temática y así aportar a la literatura matemática de la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental, de la región y el país.

1.5. Objetivos.

1.5.1. General.

Analizar la aplicación del enfoque analítico de las formas modulares en la conjetura de Ramanujan.

1.5.2. Específicos.

1. Caracterizar el operador de Hecke para las formas modulares con respecto al grupo modular.
2. Demostrar desde un enfoque analítico que la función de Ramanujan es conmutativa.
3. Describir los fundamentos de la teoría analítica que garantizan que $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ para todo número primo p .

1.6. Alcances y Límites

Esta investigación estuvo orientada a la matemática pura, específicamente en la teoría de numeros, considerando la conjetura de Ramanujan desde un enfoque analítico, así como el operador Hecke para las formas modulares con respecto al grupo modular.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL.

2.1. Introducción.

En este capítulo, se exponen de manera detallada los referentes teóricos que constituyen el fundamento conceptual de esta investigación, por medio de definiciones, proposiciones, teoremas y algunas demostraciones.

2.2. Marco teórico.

2.2.1. Teoría de las formas modulares

La teoría de formas modulares combina aspectos de análisis complejo y teoría de grupos matriciales. Para comprender adecuadamente el concepto de forma modular, es esencial familiarizarse con las siguientes definiciones fundamentales.

Definición 2.1 Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se clasifica como holomorfa si muestra diferenciabilidad en cada punto z dentro de $\mathbb{C}$. Además, si f se extiende a $R \cup \{\infty\}$, se considera meromorfa en caso de ser holomorfa en todos sus puntos con la excepción de un conjunto discreto de puntos S . Para cada $\alpha \in S$, existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $(z - \alpha)^n f(z)$ es holomorfa en α (Duque, 2016).

Definición 2.2 (Grupo $PSL_2(\mathbb{C})$). Rousu (2021) define el grupo de transformaciones $PSL_2(\mathbb{C})$ como

$$PSL_2(\mathbb{C}) = \left\{ A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$$

Definición 2.3 (Grupo $PSL_2(\mathbb{R})$) Se define el grupo de transformaciones $PSL_2(\mathbb{R})$ como

$$PSL_2(\mathbb{R}) = \left\{ A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}$$

Las transformaciones de $PSL_2(\mathbb{R})$ son isometrías en el plano complejo, conservando así la métrica hiperbólica (Rousu, 2021).

Definición 2.4 Rousu (2021) define el grupo modular (de matrices) $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ como sigue:

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}.$$

Si se asocia a cada matriz $A \in \Gamma$ una transformación lineal racional mediante el homomorfismo de grupos dado por

$$\phi : A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

se obtiene el grupo modular (de transformaciones) $\bar{\Gamma} = PSL_2(\mathbb{Z})$ definido como

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} = PSL_2(\mathbb{Z}) &= \left\{ A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \right\} \\ &= \left\{ A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ y } ad - bc = 1 \right\}. \end{aligned}$$

En el contexto del grupo $PSL_2(\mathbb{R})$, las transformaciones pertenecientes al grupo modular actúan como isometrías en el plano hiperbólico. Se observa que tanto la matriz identidad I como su contraparte negativa $-I$ resultan en la misma transformación, es decir, $I(z) = (-I)(z) = z$. Esto implica que el subgrupo $\{\pm I\}$ es un subgrupo normal en Γ , denotado habitualmente como $\{\pm I\} \triangleleft \Gamma$. Por tanto, el grupo $PSL_2(\mathbb{Z})$ puede interpretarse como el grupo de matrices $SL_2(\mathbb{Z})$, identificando cada matriz con su opuesta. Esto lleva a deducir el isomorfismo $\bar{\Gamma} \cong \Gamma / \{\pm I\}$.

$$PSL_2(\mathbb{Z}) \cong SL_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\}$$

Teorema 2.1 El grupo modular $PSL_2(\mathbb{Z})$ se presenta de la siguiente manera:

$$\bar{\Gamma} = PSL_2(\mathbb{Z}) = \langle T, R \mid T^2 = R^3 = I \rangle.$$

También se puede ver $\bar{\Gamma}$ como producto libre de los grupos cíclicos generados por cada generador, para lo cual se necesita la siguiente proposición (Boigues, 2023).

Proposición 2.2.1 Sean los grupos

$$G_1 = \langle X_1, X_2, \dots, X_{n_1} \mid R_1, R_2, \dots, R_{m_1} \rangle \text{ y } G_2 = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \mid F_1, F_2, \dots, F_{m_2} \rangle$$

entonces el producto libre $G = G_1 * G_2$ tiene presentación

$$G = \langle X_1, X_2, \dots, X_{n_1}, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \mid R_1, R_2, \dots, R_{m_1}, F_1, F_2, \dots, F_{m_2} \rangle.$$

Teorema 2.2 El grupo $\bar{\Gamma}$ es isomorfo al producto libre compuesto por un grupo cíclico de orden dos y otro de orden tres, representándose matemáticamente como $\bar{\Gamma} \cong C_2 * C_3$ (Duque, 2016).

Definición 2.5 Duque (2016) describe que, en el caso de un número natural n , se puede definir el subgrupo de congruencia principal de nivel n con la siguiente expresión matemática:

$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{n} \text{ y } b \equiv c \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

Otra forma de denotar el subgrupo principal de congruencia de nivel N es:

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}$$

en donde la congruencia de matrices se da entrada a entrada. A partir de estos grupos se tienen los subgrupos de congruencia Γ , que son aquellos tales que $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$ para algún $N \in \mathbb{N}$.

Se dice que un subgrupo $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ es un subgrupo de congruencia si contiene algún subgrupo de congruencia principal, y el mínimo n tal que $\Gamma(n) < \Gamma$ se denomina el nivel de Γ . La siguiente notación se utilizará para ciertos subgrupos:

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

$$\Gamma_1(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, c \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

Definición 2.6 Para cualquier elemento γ en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y un entero k , se define el operador de peso k , denotado como $[\gamma]_k$, aplicado a funciones $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ de la manera siguiente:

$$(f[\gamma]_k)(\tau) = j(\gamma, \tau)^{-k} f(\gamma(\tau)), \quad \text{para todo } \tau \in \mathcal{H}.$$

Teniendo en cuenta que el factor de automorfismo es distinto de cero e infinito, se deduce que si f es una función meromorfa, entonces la función $f[\gamma]_k$ preservará esta característica de meromorfía.

Definición 2.7 Se define una forma modular de peso k con respecto a un subgrupo de congruencia Γ como una función $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. f es holomorfa.
2. Para todo $\gamma \in \Gamma$, se cumple que $f[\gamma]_k = f$, indicando que f es invariante de peso k bajo Γ .
3. La función $f[\alpha]_k$ es holomorfa en ∞ para cualquier $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

El conjunto de todas las formas modulares de peso k asociadas con Γ se representa mediante $\mathcal{M}_k(\Gamma)$. Al igual que con $\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, cada uno de estos conjuntos constituye un espacio vectorial sobre los números complejos $\mathbb{C}$. Cabe destacar que

la tercera condición mencionada previamente puede ser sustituida por la siguiente. Cuando la serie de Fourier de f se expresa como

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n,$$

los coeficientes correspondientes a $n > 0$ deben cumplir con la relación

$$|a_n| \leq C n^r, \quad \text{donde } C \text{ y } r \text{ son constantes.}$$

Definición 2.8 Considérese una forma modular f de peso k para un grupo Γ , incluyendo a T . El desarrollo de Fourier de f , o su expansión en términos de q , se define como el desarrollo de Taylor de f en el disco unitario, expresado por la serie:

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) q^n. \quad (2.1)$$

Definición 2.9 Una forma modular f se caracteriza como cuspidal si cumple con la condición $\lim_{r \rightarrow +\infty} f \mid \gamma(z + ir) = 0$ para cada γ en $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. El conjunto de todas las formas cuspidales de peso k asociadas con Γ se denota por $S_k(\Gamma)$, como se describe en Ramírez (2019).

2.2.2. Operador Hecke (H_n)

Definición 2.10 (Maier (2007)) plantea que para $n \in \mathbb{N}$ se define:

$$H_n := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \ ad - bc = n \right\}$$

Si $n = 1$, se tiene $H_n = \Gamma$. Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H_n$. Si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$, se define la siguiente acción de M sobre f :

$$(f|_k M)(z) := (\det M)^k (cz + d)^{-2k} f(Mz), \quad Mz = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\Rightarrow \forall \gamma_1, \gamma_2 \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}), \det(\gamma_1 \gamma_2) \neq 0 : f|_k(\gamma_1 \gamma_2) = (f|_k \gamma_1)|_k \gamma_2$$

Por lo tanto, Γ actúa como un grupo sobre f . f es modular de peso $2k$ para un grupo $G \neq f|[\gamma]_{2k} = f, \forall \gamma \in G$, con G cualquier subgrupo de Γ . En lo adelante, si se habla de una forma modular (o una forma de cúspide o una función), la forma siempre tiene peso $2k$. Similarmente se define $f|_\gamma := f|[\gamma]_{2k}, \forall \gamma \in M_{2 \times 2}(\mathbb{Z}), \det \gamma \neq 0$.

Lema 2.1 Conjunto de representaciones (Maier, 2007)

$$\Gamma \backslash H_n \simeq M' := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid AD = n, D > 0, 0 \leq B < D \right\} \subseteq H_n$$

Demostración. Cada elemento en $\Gamma \backslash H_n$ es representable por un elemento de M' . Sea

$M \in H_n, M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Sea $c := \frac{C}{(A,C)}, d := -\frac{A}{(A,C)}$. Entonces $(c, d) = 1$ y existe

$a, b \in \mathbb{Z}$ con $ad - bc = 1$ y $\gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. De ahí que $cA + dC = \frac{cA}{(A,C)} - \frac{dA}{(A,C)} = 0$

y $\gamma M = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. $n = \det(M) = \det(\gamma M) = \det(M') = A'D'$. Escogiendo $+$ o $-$ se

puede obtener $D > 0$. Con una adecuada multiplicación a izquierda por $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se obtiene $0 \leq b < d$ y $M \in M'$.

Dos elementos de $\Gamma \backslash H_n$ son iguales si y solo si son iguales en M' :

Asuma $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ en $\Gamma \backslash H_n$. Entonces cualquier cálculo fácil muestra que esto es equivalente con $A = A', D = D'$ y $B \equiv B' \pmod{D}$.

Definición 2.11 (Operador de Hecke). Para una forma modular f en M_{2k} y $n \in \mathbb{N}$, se define un operador en el espacio de las formas modulares de peso $2k$:

$$T_n f := n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma \backslash H_n} f|_{2k} M$$

El coeficiente numérico da fórmulas “sin denominadores” (Maier, 2007).

Lema 2.2 Ya que f es una forma modular, este operador está bien definido (Lee, 2015).

Demostración: Sea $\{M_i\} = M'$ y $\{M'_i\}$ un conjunto diferente de representaciones. Entonces para todo i , existe un S_i en Γ : $M'_i = S_i M_i$. Dado que $f|_{M'_i} = f|_{S_i M_i} = f|_{S_i}|_{M_i} = f|_{M_i}$, se sigue directamente que

$$T_n f\{M'_i\} = n^{k-1} \sum_i f|_{M'_i} = n^{k-1} \sum_i f|_{M_i} = T_n f$$

y el operador está bien definido.

T_n es un operador en el espacio de las formas modulares, un operador en el espacio de las formas cuspidales y un operador en el espacio de las funciones modulares (de peso $2k$).

Lema 2.3 $T_n f$ es modular, es decir, $\forall \gamma \in \Gamma : (T_n f)|_\gamma = T_n f$ (Ramírez, 2019).

Demostración:

$$(T_n f)|_\gamma = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma_n} f|M\gamma = n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma_n} f|M\gamma' = n^{k-1} \sum_{M' \in \Gamma_n} f|M' = T_n f$$

Y para $M \in M'$ se obtiene:

$$(T_n f)(z) = n^{2k-1} \sum_{\substack{ad=n, d>0 \\ 0 \leq b < d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right) \quad (2.2)$$

$\mathcal{H}$ = Álgebra, generada por los endomorfismos $T_n, n = 1, 2, 3, \dots$

Teorema 2.3 De acuerdo con Maier (2007), $\mathcal{H}$ es conmutativa, generada por (T_p) , p primo. Si f es meromorfa de peso $2k$ (holomorfa en $\mathbb{H}$) entonces $T_n f$ es la misma.

1. $T_n T_m = \sum_{d|(n,m)} d^{2k-2} T_{\frac{nm}{d^2}}$, es decir, $T_n T_m = T_m T_n$
2. $(n, m) = 1 \Rightarrow T_n T_m = T_{nm}$

3. p primo, $\tau \in \mathbb{N} : T_p T_\tau = T_{p\tau} + p^{2k-1} T_{\frac{\tau}{p}}$

Demostración. La ecuación (2.2) muestra que $T_n f$ es meromorfa en $\mathbb{H}$ (resp. holomorfa), porque la suma es finita.

Suponga que f es una función modular, meromorfa en ∞ . Entonces existe una expansión de Fourier. Sea $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) q^m$, $q = e^{2\pi i z}$.

Proposición 2.2.2 $T_n f$ es una función modular, y:

$$T_n f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m) q^m \quad \text{donde} \quad \gamma(m) = \sum_{\substack{a|(n,m) \\ a \geq 1}} a^{2k-1} c\left(\frac{mn}{a^2}\right)$$

2.2.3. Función de Ramanujan

Definición 2.12 Según Moreno (1977), la función de Ramanujan $\tau(n)$ se define como el coeficiente n -ésimo en la expansión en q de la función discriminante

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad \text{y} \quad \text{Im}(\tau) > 0.$$

Proposición 2.2.3 De acuerdo con Garaev et al. (2008), la función $\tau(n)$ posee muchas propiedades aritméticas notables, tales como:

1. $\tau(n)$ es un valor entero y multiplicativo, es decir, $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$ si $\text{gcd}(n, m) = 1$,
2. $\tau(q^{a+2}) = \tau(q^{a+1})\tau(q) - q^{11}\tau(q^a)$ para todo entero $a \geq 0$ y cada primo q (en particular, $\tau(q^2) = \tau^2(q) - q^{11}$),
3. $\tau(n) \equiv \sum d^{11} \pmod{691}$,
4. $\tau(n) \equiv \sum d^{11} \pmod{2^8}$ para n impar,
5. $|\tau(q)| \leq 2q^{11/2}$ para cada primo q y $|\tau(n)| \leq n^{11/2+\epsilon}$ para todo entero positivo n y cualquier $\epsilon > 0$.

Teorema 2.4 Garaev et al. (2008) plantea que para todo entero λ la congruencia

$$\sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{16} \tau(m_i) \equiv \lambda \pmod{p}$$

se cumple para algunos enteros positivos $n_1, m_1, \dots, n_{16}, m_{16}$ con

$$\max_{1 \leq i \leq 16} \{n_i, m_i\} \leq p^{2 \log p^4}, \quad \gcd(n_i m_i, 23!) = 1.$$

Usando el Teorema (2.4), se puede escribir cada clase de residuo módulo p en la forma

$$\sum_{i=1}^{96} \tau(n_i) \pmod{p},$$

donde $\max_{1 \leq i \leq 96} n_i \leq p^{2 \log p^4}$. En particular, para alguna constante positiva C el conjunto

$$\{\tau(n) \pmod{p} : n \leq Cp^{2 \log p^4}\}$$

forma una base aditiva finita para el anillo de residuos Z_p de orden a lo más 96.

Teorema 2.5 Para todo entero λ y cada $\varepsilon \geq 0$, la congruencia

$$\sum_{i=1}^{16} \tau(n_i) \equiv \lambda \pmod{p}$$

es soluble en enteros positivos $n_1, \dots, n_{16}$ que satisfacen la condición

$$\max_{1 \leq i \leq 16} n_i \leq p^{3+\varepsilon}.$$

En particular, el conjunto $\{\tau(n) \pmod{p} : n \leq p^{3+\varepsilon}\}$ es una base de Z_p de orden a lo más 16 para todos los primos suficientemente grandes p .

Teorema 2.6 Gómez (2019) indica que los valores obtenidos por la función τ corresponden a números enteros.

Demostración. Considérese $A = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n)q^n$ y $B = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n)q^n$. A partir de

esta representación, se deduce la relación

$$E_4^3 - E_6^2 = (1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2 = 3(240A) + 3(240A)^2 + (240A)^3 + 3(504B) - (504B)^2.$$

Dado que se verifica $3(240A)^2 \equiv (240A)^3 \equiv (504B)^2 \equiv 0 \pmod{1728}$, es suficiente considerar que los coeficientes de $5A + 7B$ son múltiplos de 12. Así, el coeficiente de q^n es

$$5\sigma_3(n) + 7\sigma_5(n) = \sum_{d|n} (5d^3 + 7d^5).$$

Mediante cálculos elementales, se establece que para cualquier $d \in \mathbb{Z}$, las siguientes congruencias son válidas:

$$d^3(5 + 7d^2) \equiv d^3(d^2 - 1) \equiv 0 \pmod{3}, \quad y \quad d^3(5 + 7d^2) \equiv d^3(1 - d^2) \equiv 0 \pmod{4}.$$

Por lo tanto, se concluye que todos los valores de τ son números enteros.

2.2.3.1. Congruencias de la función τ

Gallardo (2010) indica que para k y n en $\mathbb{Z}$, se define $\sigma_k(n)$ como la suma de las k -ésimas potencias de los divisores de n . La función τ satisface varias relaciones de congruencia. Muchas de ellas pueden expresarse en términos de $\sigma_k(n)$. A continuación figuran algunas:

1. $\tau(n) \equiv n \pmod{2^{11}}$ para $n \equiv 1 \pmod{8}$
2. $\tau(n) \equiv 1217n \pmod{2^{13}}$ para $n \equiv 3 \pmod{8}$
3. $\tau(n) \equiv 1537n \pmod{2^{14}}$ para $n \equiv 5 \pmod{8}$
4. $\tau(n) \equiv 705n \pmod{2^{14}}$ para $n \equiv 7 \pmod{8}$
5. $\tau(n) \equiv n\sigma_{11}(n) \pmod{3^6}$ para $n \equiv 1 \pmod{3}$
6. $\tau(n) \equiv n\sigma_{11}(n) \pmod{3^7}$ para $n \equiv 2 \pmod{3}$

7. $\tau(n) \equiv n^3 \pmod{5^5}$ para $n \not\equiv 0 \pmod{5}$
8. $\tau(n) \equiv n\sigma_5(n) \pmod{7^7}$ para $n \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{7}$
9. $\tau(n) \equiv n\sigma_5(n) \pmod{7^7}$ para $n \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$
10. $\tau(n) \equiv \sigma_1(n) \pmod{691}$.

Para números $p \neq 23$ primos, se tiene que

1. $\tau(p) \equiv 0 \pmod{23}$ si $\left(\frac{p}{23}\right) = -1$
2. $\tau(p) \equiv \sigma_{11}(p) \pmod{23^2}$ si p es de la forma $a^2 + 23b^2$
3. $\tau(p) \equiv -1 \pmod{23}$ en otro caso.

2.2.3.2. Conjeturas sobre Ramanujan

De acuerdo con Gómez (2019), la conjetura de Ramanujan postula que la función τ exhibe las siguientes tres características esenciales:

1. La función τ es multiplicativa, lo que significa que para cualquier par de enteros positivos coprimos m y n , se verifica $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$.
2. Se establece que para cualquier número primo p y entero positivo α , la relación $\tau(p^{\alpha+1}) = \tau(p)\tau(p^\alpha) - p^{11}\tau(p^{\alpha-1})$ es válida.
3. Se afirma que para todo número primo p , se tiene $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. Introducción

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos de esta investigación; los cuales hacen referencia al diseño, método, tipo, enfoque y procedimientos requeridos para el desarrollo de la misma.

3.2. Marco metodológico

3.2.1. Diseño

El diseño que contempló esta investigación es el no experimental, ya que tal como lo plantea Hernández et al. (2014), las variables no se manipulan de forma intencionada. Según el tiempo de estudio, el diseño es el transversal, el cual es definido por el mismo autor como aquel en el que se recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único.

3.2.2. Método

Este estudio se fundamentó en la aplicación del método deductivo, debido a su capacidad para establecer conclusiones lógicas y coherentes a partir de premisas iniciales. Se basa en reglas y principios generales para inferir conclusiones específicas (Olabuénaga, 2012).

3.2.3. Tipo

De acuerdo a las características, esta investigación fue de tipo documental, ya que estuvo marcada por el interés de describir, mostrar y fundamentar la conjetura de Ramanujan, desde un enfoque analítico (Ramos-Galarza, 2020). Además, es de tipo exploratorio ya que aborda una temática poco conocida, con el fin de proveer una referencia general de la misma (Morales, 2015).

3.2.4. Enfoque

Debido a que en esta investigación no se busca medir las variables, el enfoque utilizado es el cualitativo, basando su desarrollo en las formas modulares de la conje-

tura de Ramanujan, cuyos fundamentos son más teóricos que prácticos (Ortega, 2018).

3.3. Procedimientos

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso de realización de este trabajo de investigación hasta la etapa del proyecto:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, sobre los fundamentos de las formas modulares y la conjetura de Ramanujan.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos constitutivos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada del borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.
8. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
9. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia y pertinencia de la misma.

CAPÍTULO IV PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan diferentes resultados que caracterizan los operadores de Hecke, los cuales sirven de fundamento para la conjetura de Ramanujan, abordada desde un enfoque analítico.

4.2. Caracterización del operador de Hecke para las formas modulares

Para la caracterización del operador de Hecke, considerando un número entero positivo n , para las formas modulares de peso k con respecto a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, el operador de Hecke enésimo $T_n^{[k]}$ de peso k se define como sigue:

$$T_n^{[k]}(f) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\bar{\alpha} \in M_2(\mathbb{Z}, n) / \mathrm{SSL}_2(\mathbb{Z})} f[\alpha]_k$$

Aquí, f representa un miembro de $M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$. Es importante notar que en situaciones donde el peso de $T_n^{[k]}$ es implícito, se utilizará simplemente T_n . Adicionalmente, la expresión de $T_n^{[k]}$ puede reformularse de la siguiente manera:

$$T_n^{[k]}(f) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} \sum_{b=0}^{d-1} f \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right]_k$$

Para una forma modular $f \in M_{2k}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define un operador de Hecke en el espacio de formas modulares de peso $2k$ como sigue:

$$T_n f := n^{k-1} \sum_{M \in \Gamma_{H_n}} f|_k M$$

Teorema 4.1 Se establece que $T_n f$, es una función modular. Y además

$$T_n f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \gamma(m) q^m$$

donde $\gamma(m)$ es una serie que depende de los coeficientes c de la forma modular f y se define por la relación:

$$\gamma(m) = \sum_{a|(n,m), a \geq 1} a^{2k-1} c\left(\frac{mn}{a^2}\right)$$

Demostración. Sea M una matriz de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, tal que $ad = n$ y $0 \leq b < d$. La acción del operador T_n sobre f se puede representar como:

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n, d>0 \\ 0 \leq b < d}} d^{-2k} f\left(\frac{az+b}{d}\right)$$

Expandiendo f en su serie de Fourier y aplicando la transformación de la matriz M a cada término:

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n, d>0 \\ 0 \leq b < d}} d^{-2k} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) e^{2\pi i m \frac{az+b}{d}}$$

Al integrar respecto a b , solo los términos donde $d|m$ no se anulan, lo que permite simplificar la suma y redefinir m en términos de m' :

$$(T_n f)(z) = n^{k-1} \sum_{ad=n, d>0} d^{-2k+1} \sum_{m' \in \mathbb{Z}} c(dm') q^{am'}$$

Agrupando los términos que contienen las potencias de q y definiendo $\mu = am'$, $m' = \frac{\mu}{a}$, y $d = \frac{n}{a}$, se obtiene:

$$(T_n f)(z) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} q^{\mu} \sum_{a|(n,\mu), a \geq 1} \left(\frac{n}{d}\right)^{2k-1} c\left(\frac{\mu d}{a}\right)$$

Notar que debido al factor n^{k-1} en la definición de los Operadores de Hecke, la sumatoria resultante no posee denominadores. Finalmente, se concluye que f es meromorfa en ∞ , lo que significa que existe un N tal que $c(m) = 0$ para todo $m \leq -N$. Esto implica que $\gamma(\mu) = 0$ para todo $\mu \leq -Nn$, demostrando que $T_n f$ es

meromorfa en ∞ y, por lo tanto, una función modular.

Teorema 4.2 Sea n un entero positivo cualquiera, el operador de Hecke $T_n^{[k]}$ constituye una transformación lineal sobre el espacio $M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$. En términos más precisos, si f representa una forma modular de peso k en relación con $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, entonces la expansión en serie de potencias de q para $T_n(f)$ puede ser expresada de la manera siguiente:

$$T_n(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{d|m, n \\ d>0}} d^{k-1} \lambda\left(\frac{m^2}{d^2}\right) \right) q^m$$

donde $\lambda(m)$ denota los coeficientes correspondientes a la expansión en serie de f .

Demostración. Considérese f como un elemento del espacio $M_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, cuya expansión en serie de potencias de q es la siguiente: $\sum_{s=0}^{\infty} \lambda(s)q^s$. Se observa que $T_n(f)$ es holomorfa en $\mathbb{H}$, por lo que se debe verificar su cumplimiento con las condiciones de modularidad de peso k respecto a $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y su regularidad en el infinito.

Para demostrar que $T_n(f)$ satisface las condiciones de modularidad de peso k , se parte de la identidad $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M_2(\mathbb{Z}, n)\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = M_2(\mathbb{Z}, n)$. Esto implica que, para cualquier $\bar{\alpha} \in M_2(\mathbb{Z}, n)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, existe un $\gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y un $\bar{\beta} \in M_2(\mathbb{Z}, n)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ que satisfacen $\alpha\gamma = \gamma'\beta$. Si otro elemento $\bar{\alpha}' \in M_2(\mathbb{Z}, n)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ cumple $\alpha'\gamma = \gamma''\beta$ para algún $\gamma'' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, entonces se concluye que $\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}$.

Desarrollando $T_n(f)[\gamma]_k$, se encuentra que:

$$T_n(f)[\gamma]_k = n^{k/2-1} \sum_{\bar{\alpha} \in M_2(\mathbb{Z}, n)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f[\alpha\gamma]_k.$$

Utilizando la identidad, se selecciona un $\gamma_{\alpha} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ y un $\bar{\beta}_{\alpha} \in M_2(\mathbb{Z}, n)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de manera que $\alpha\gamma = \gamma_{\alpha}\beta_{\alpha}$. Esto simplifica la expresión de $T_n(f)[\gamma]_k$ a:

$$T_n(f)[\gamma]_k = n^{k/2-1} \sum_{\bar{\beta}_{\alpha} \in M_2(\mathbb{Z}, n)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f[\beta_{\alpha}]_k.$$

Puesto que f es una forma modular de peso k , la suma sobre $\bar{\beta}_{\alpha}$ resulta ser

invariante bajo la acción de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, permitiendo afirmar que $T_n(f)$ cumple con la condición de modularidad de peso k para $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, es decir:

$$T_n(f)[\gamma]_k = T_n(f).$$

Para probar la holomorfía de $T_n(f)$ en el infinito, basta con mostrar que la serie de q de $T_n(f)$ no incluye términos con potencias negativas de q , asegurando así su comportamiento regular en tal extremo. Partiendo de la definición de $T_n(f)$, se procede a expandirla, resultando en la siguiente expresión:

$$T_n(f) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{b=0}^{a-1} f \left[\begin{array}{cc} d & b \\ 0 & a \end{array} \right]_k \quad (4.1)$$

esta fórmula se transforma en:

$$T_n(f) = n^{\frac{k}{2}-1} \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{b=0}^{a-1} n^{\frac{k}{2}} a^{-k} f \left(\frac{dz+b}{a} \right) \quad (4.2)$$

Y luego se expresa como:

$$T_n(f) = \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{b=0}^{a-1} n^{k-1} a^{-k} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda(s) e^{i \frac{2\pi s(dz+b)}{a}} \quad (4.3)$$

Posteriormente, se reagrupan los términos en la última expresión para obtener:

$$T_n(f) = \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{b=0}^{a-1} n^{k-1} a^{-k} \left(\lambda(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda(s) e^{i \frac{2\pi s(dz+b)}{a}} \right) \quad (4.4)$$

Reorganizando la suma interna, se llega a una nueva forma para $T_n(f)$:

$$T_n(f) = \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \left(\frac{n}{a} \right)^{k-1} \lambda(0) + \sum_{\substack{ad=n \\ a>0}} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{b=0}^{a-1} n^{k-1} a^{-k} \lambda(s) e^{i \frac{2\pi s(dz+b)}{a}} \quad (4.5)$$

Finalmente, se reformula la descripción de $T_n(f)$, identificando dr con m y utilizando la relación $\frac{n}{a} = d$:

$$T_n(f) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1} \lambda(0) + \sum_{d|n} d^{k-1} \sum_{\substack{m=1 \\ d|m}}^{\infty} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right) q^m \quad (4.6)$$

que equivale a

$$T_n(f) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{d>0, d|m, d|n} d^{k-1} \lambda\left(\frac{mn}{d^2}\right) \right) q^m$$

Teorema 4.3 Sea m y n un par de enteros que son mutuamente primos. Entonces, se cumple la relación para los operadores de Hecke de peso k de la siguiente manera:

$$T_n^{[k]} T_m^{[k]} = T_{mn}^{[k]} = T_m^{[k]} T_n^{[k]}.$$

Demostración. Una función modular f de peso k , los operadores de Hecke $T_n^{[k]}$ y $T_m^{[k]}$ están definidos como:

$$T_n^{[k]} f(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} a^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right),$$

$$T_m^{[k]} f(z) = m^{k-1} \sum_{\substack{cd=m \\ 0 \leq b' < c}} c^{-k} f\left(\frac{cz+b'}{c}\right).$$

$T_n^{[k]} T_m^{[k]} f(z)$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} T_n^{[k]} T_m^{[k]} f(z) &= T_n^{[k]} \left(m^{k-1} \sum_{\substack{cd=m \\ 0 \leq b' < c}} c^{-k} f\left(\frac{cz+b'}{c}\right) \right) \\ &= m^{k-1} n^{k-1} \sum_{\substack{cd=m \\ 0 \leq b' < c}} \sum_{\substack{ad=n \\ 0 \leq b < d}} c^{-k} a^{-k} f\left(\frac{a\left(\frac{cz+b'}{c}\right) + b}{d}\right) \\ &= m^{k-1} n^{k-1} \sum_{\substack{cd=m, ad=n \\ 0 \leq b' < c, 0 \leq b < d}} c^{-k} a^{-k} f\left(\frac{acz + ab' + b}{cd}\right). \end{aligned}$$

Dado que m y n son coprimos, se pueden reorganizar los términos en la suma de tal manera que coincidan con la definición de $T_{mn}^{[k]} f(z)$. Esto es posible porque cada

par (a, c) donde $ac = mn$ aparece exactamente una vez en la suma doble, y b' y b varían independientemente dentro de sus respectivos rangos.

Entonces, la expresión se simplifica a la forma de $T_{mn}^{[k]}f(z)$:

$$T_n^{[k]}T_m^{[k]}f(z) = (mn)^{k-1} \sum_{\substack{ef=mn \\ 0 \leq b'' < f}} e^{-k} f\left(\frac{ez + b''}{f}\right) = T_{mn}^{[k]}f(z).$$

De manera similar, si se calcula $T_m^{[k]}T_n^{[k]}f(z)$, se llega al mismo resultado, demostrando que los operadores conmutan:

$$T_m^{[k]}T_n^{[k]}f(z) = T_{mn}^{[k]}f(z).$$

Por lo tanto, para cualesquiera m y n coprimos, se verifica que $T_n^{[k]}T_m^{[k]} = T_{mn}^{[k]} = T_m^{[k]}T_n^{[k]}$, lo cual completa la demostración.

4.3. Demostración desde un enfoque analítico de la conmutatividad de la función de Ramanujan

Para probar la conmutatividad de la función de Ramanujan, es preciso recurrir a los siguientes lemas, que permitirán justificar las afirmaciones correspondientes. Se define Δ como la función discriminante modular y se selecciona un número primo arbitrario p . Posteriormente, se define la función f como:

$$f(z) = p^{12}\Delta(pz) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{z+k}{p}\right) \quad (4.7)$$

Lema 4.1 Dada f conforme a la ecuación (4.7), se sostiene que

$$f(z+1) = f(z)$$

Demostración. Se evalúa f en el punto $z+1$:

$$f(z+1) = p^{12}\Delta(p(z+1)) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{(z+1)+k}{p}\right)$$

Utilizando la propiedad de periodicidad de Δ , la cual es una forma modular de

cúspide de peso 12, se tiene que:

$$\Delta(p(z+1)) = \Delta(pz+p) = \Delta(pz)$$

Esto permite simplificar la expresión a:

$$f(z+1) = p^{12}\Delta(pz) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{(z+1)+k}{p}\right)$$

Al observar la sumatoria sobre k , se reconoce su periodicidad con período p , lo cual permite expresar $f(z+1)$ como:

$$f(z+1) = p^{12}\Delta(pz) + \sum_{k=0}^{p-2} \Delta\left(\frac{z+(k+1)}{p}\right) + \Delta\left(\frac{(z+1)+(p-1)}{p}\right)$$

Reorganizando los términos de la sumatoria, se obtiene:

$$f(z+1) = p^{12}\Delta(pz) + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta\left(\frac{z+k}{p}\right) + \Delta\left(\frac{z+p}{p}\right)$$

Aplicando la propiedad de modularidad de Δ , la cual establece que $\Delta(z+m) = \Delta(z)$ para cualquier entero m , se llega a la siguiente igualdad:

$$\Delta\left(\frac{z+p}{p}\right) = \Delta\left(\frac{z}{p} + 1\right) = \Delta\left(\frac{z}{p}\right)$$

Incorporando esta igualdad en la expresión previa, se concluye que:

$$f(z+1) = p^{12}\Delta(pz) + \sum_{k=1}^{p-1} \Delta\left(\frac{z+k}{p}\right) + \Delta\left(\frac{z}{p}\right) = f(z)$$

Lema 4.2 Sea la función f previamente definida en la ecuación (4.7). Se plantea que:

$$f\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{12}f(z)$$

Demostración. Considere la transformación de f bajo la inversión y escalado de su

argumento. Específicamente, evaluando f en el punto $-\frac{1}{z}$:

$$\begin{aligned}
 f\left(-\frac{1}{z}\right) &= p^{12} \Delta\left(-\frac{p}{z}\right) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{-\frac{1}{z} + k}{p}\right) \\
 &= p^{12} \Delta\left(-\frac{1}{\frac{z}{p}}\right) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{zk - 1}{zp}\right) \\
 &= p^{12} \left(\frac{z^{12}}{p^{12}}\right) \Delta\left(\frac{z}{p}\right) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{zk - 1}{zp}\right) \\
 &= z^{12} \Delta\left(\frac{z}{p}\right) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{zk - 1}{zp}\right)
 \end{aligned}$$

La idea es mostrar una correspondencia entre los términos de la sumatoria y z^{12} . Para esto, se examina la función modular Δ de peso 12. De acuerdo con sus propiedades de transformación modular, para $\omega \in \mathbb{H}$ y enteros a, b, c, d con $ad - bc = 1$, se tiene que:

$$\Delta\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) = (c\omega + d)^{12} \Delta(\omega)$$

Ahora, se identifica z con $c\omega + d$ y $\frac{z+k}{p}$ con ω , y se tiene:

$$\begin{aligned}
 \Delta\left(\frac{zk - 1}{zp}\right) &= \Delta\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right) \\
 &= (c\omega + d)^{12} \Delta(\omega) \\
 &= z^{12} \Delta\left(\frac{z + k}{p}\right)
 \end{aligned}$$

Para $1 \leq k \leq p - 1$, $\gcd(p, k) = 1$. Por lo tanto, existen enteros m, l tales que $lk + mp = 1$. Utilizando estos enteros, se puede expresar a y b en términos de l y m , respectivamente, estableciendo una relación entre $a\omega + b$ y $\frac{zk-1}{p}$. En particular, se tiene:

$$\begin{aligned}
 (-l)k + (-m)p &= ak + bp = a(-d) + bc = -1 \\
 \Rightarrow a\omega + b &= \frac{zk - 1}{p}
 \end{aligned}$$

Al aplicar estas identidades, se demuestra que:

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{12} \left(\Delta\left(\frac{z}{p}\right) + \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{z+k}{p}\right) \right)$$

Finalmente, simplificando y reorganizando términos, se concluye que:

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^{12} f(z)$$

Teorema 4.4 Para cualquier número primo p y para cada entero positivo k , la función τ satisface la relación:

$$\tau(p^k) = \tau(p) \cdot \tau(p^{k-1}) - p^{11} \cdot \tau(p^{k-2})$$

Demostración. En el contexto de la función f descrita en la ecuación (4.7), se define la función

$$F(z) = \frac{f(z)}{\Delta(z)}$$

Se observa que esta función exhibe propiedades periódicas notables. Específicamente:

1. La propiedad $F(z+1) = F(z)$ se deriva de la invariancia de traslación de $f(z)$ y $\Delta(z)$.
2. La invariancia bajo la inversión modular se demuestra a través de la igualdad $F\left(-\frac{1}{z}\right) = F(z)$.

Se procede a expresar $f(z)$ y $\Delta(z)$ mediante la función τ de Ramanujan, lo que revela que:

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n, \\ f(z) &= p^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{pn} + \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{\frac{n}{p}} e^{\frac{2\pi i k n}{p}}, \\ f(z) &= p^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{pn} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{\frac{n}{p}} \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k n}{p}}. \end{aligned}$$

La función auxiliar

$$\varphi(p, n) = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i k n}{p}}$$

se introduce para simplificar la expresión de $f(z)$, y se encuentra que $\varphi(p, n) = p$ si p divide a n , y $\varphi(p, n) = 0$ en caso contrario.

Esta simplificación permite escribir $f(z)$ como:

$$f(z) = p^{12} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{pn} + p \sum_{n=1}^{\infty} \tau(pn) q^n.$$

Dado que $f(z)$ es el producto de $\Delta(z)$ por $F(z)$, y $F(z)$ es invariante bajo las transformaciones del grupo modular, se concluye que $F(z)$ es una función modular débil de peso 0 y por ende constante, representada por:

$$F(z) = p \cdot \tau(p).$$

La identidad resultante

$$\tau(p) \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n = p^{11} \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{pn} + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(pn) q^n \quad (4.8)$$

permite extraer el coeficiente de q^n y, al establecer $n = 1$, llegar al resultado deseado:

$$\tau(p) \tau(p^{k-1}) = p^{11} \tau(p^{k-2}) + \tau(p^k).$$

Teorema 4.5 Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $(m, n) = 1$, se tiene que

$$\tau(mn) = \tau(m) \tau(n) \quad (4.9)$$

Demostración. Probar la propiedad multiplicativa equivale a demostrar la expresión:

$$\tau(p^k n) = \tau(p^k) \tau(n) \quad (4.10)$$

Si $k = 0$ entonces la ecuación (4.10) se sostiene trivialmente. Además, puesto que $p \geq 2$, igualar el coeficiente n -ésimo equivale a

$$\tau(pn) = \tau(p)\tau(n) \quad (4.11)$$

Igualando los coeficientes de la ecuación (4.8)

Para concluir la demostración, se construye una secuencia recursiva en k sobre $\mathbb{Z}^+$ dada por:

$$\mu_k = \tau(p^k n) - \tau(p^k)\tau(n) \quad (14)$$

Como se muestra arriba $\mu_0 = \mu_1 = 0$, suponer que $\mu_l = 0$ para todo $0 \leq l \leq k-1$. Usando la ecuación (4.8), se derivan las siguientes ecuaciones auxiliares que resulta $\tau(p^k) = \tau(p)\tau(p^{k-1}) - p^{11}\tau(p^{k-2})$ para $n = 1$

1. $\tau(p)\tau(p^{k-1}n) = p^{11}\tau(p^{k-2}n) + \tau(p^k n)$
2. $\tau(p)\tau(p^{k-1}) = p^{11}\tau(p^{k-2}) + \tau(p^k)$

Se sigue que

$$\mu_{k-1} = \tau(p^{k-1}n) - \tau(p^{k-1})\tau(n) = 0$$

$$\mu_{k-2} = \tau(p^{k-2}n) - \tau(p^{k-2})\tau(n) = 0$$

Una manipulación algebraica muestra que

$$\tau(p^k n) = \mu_k = \tau(p^k)\tau(n) - \tau(p)\tau(p^{k-1}n) - p^{11}\tau(p^{k-2}n)$$

$$\Leftrightarrow \mu_k = \tau(p)\tau(p^{k-1}n) - p^{11}\tau(p^{k-2}n) + \tau(p^k)\tau(n)$$

$$\Leftrightarrow \mu_k = [\tau(p)\tau(p^{k-1}n) - p^{11}\tau(p^{k-2}n)] - \tau(n) [\tau(p)\tau(p^{k-1}) - p^{11}\tau(p^{k-2})]$$

$$\Leftrightarrow \mu_k = \tau(p) [\tau(p^{k-1}n) - \tau(p^{k-1})\tau(n)] + p^{11} [\tau(n)\tau(p^{k-2}) - \tau(p^{k-2}n)]$$

$$\Leftrightarrow \mu_k = \tau(p)\mu_{k-1} - p^{11}\mu_{k-2}$$

$$\Leftrightarrow \mu_k = \tau(p^k n) - \tau(p^k)\tau(n) = 0$$

lo cual demuestra que para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$\tau(p^k n) = \tau(p^k)\tau(n)$$

Por lo tanto, para cualquier $m, n \in \mathbb{Z}$ coprimos, se tiene que

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$$

Teorema 4.6 Sea n un número natural con una factorización en números primos dada por $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, se cumple que:

$$\tau(n) = \prod_{j=1}^k \tau(p_j^{e_j}) \quad (4.12)$$

Demostración. Considere la descomposición prima de n como se en la expresión (4.12). Se observa inicialmente que:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k})$$

Suponer que n_1 representa el producto $p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$. Entonces, se puede afirmar que:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{e_1} n_1) = \tau(p_1^{e_1})\tau(n_1)$$

La expresión anterior permite deducir de manera recursiva que:

$$\tau(n) = \tau(p_1^{e_1})\tau(p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}) = \tau(p_1^{e_1}) \prod_{j=2}^k \tau(p_j^{e_j})$$

Este razonamiento se extiende a todos los factores primos de n , lo lleva a concluir que la función τ satisface la propiedad multiplicativa para la descomposición prima de n :

$$\tau(n) = \prod_{j=1}^k \tau(p_j^{e_j})$$

4.4. Fundamentos de la teoría analítica que garantizan que $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ para todo número primo p

Proposición 4.4.1 Dado Γ , un subgrupo de congruencia. Si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función que cumple con la propiedad de ser modular de peso k para Γ , entonces la $\text{Im}(z)^{k/2}|f(z)|$ es invariante bajo Γ .

Demostración. Considérese $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ perteneciente a Γ . Es claro que la siguiente igualdad es válida:

$$\text{Im}(\gamma z)^{k/2}|f(\gamma z)| = \text{Im}(z)^{k/2} \left| \frac{cz + d}{|cz + d|^k} f(z) \right|.$$

Esto se deduce del hecho que

$$\text{Im}(\gamma z) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2},$$

y por ende, al elevar esta expresión a $k/2$ y multiplicarla por $|f(z)|$, se obtiene que:

$$\text{Im}(z)^{k/2} \left| \frac{f(z)}{(cz + d)^k} \right| = \text{Im}(z)^{k/2}|f(z)|.$$

Por lo tanto, $\text{Im}(z)^{k/2}|f(z)|$ se mantiene constante bajo la acción de γ en Γ , demostrando que es una cantidad invariante de Γ .

Teorema 4.7 Sea f una forma modular perteneciente al espacio $S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$, con una serie de q -expansión expresada por la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$. Existe un real positivo M tal que se cumple $|b_n| \leq M n^k$ para todo n natural.

Demostración. Se considera f como una forma cúspide de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$. Por las propiedades de tales funciones, para cada constante $C > 0$ se puede encontrar una constante $M'' > 0$ que garantiza:

$$|f(z)| \leq M'' e^{-2\pi \text{Im}(z)}$$

en la región $D = \{z \in \mathcal{F}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : \text{Im}(z) > C\}$, donde $\mathcal{F}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ es una región fundamental. De aquí se deduce que el producto $\text{Im}(z)^{k/2}|f(z)|$ está acotado en D , existiendo por tanto un $M' > 0$ tal que:

$$\text{Im}(z)^{k/2}|f(z)| \leq M'.$$

Dado que $\text{Im}(z)^{k/2}|f(z)|$ es invariante bajo $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, esta cota se mantiene para todo z en $\mathbb{H}$. Para los coeficientes b_n de la expansión en serie de Fourier de f , se tiene

$$b_n = \int_0^1 f(x + iy) e^{-2\pi i n(x + iy)} dx,$$

donde y es un real positivo elegido entre 0 y 1. Aplicando la acotación anterior a la integral, se obtiene:

$$|b_n| \leq M' y^{-k/2} e^{2\pi n y}.$$

Al seleccionar $y = 1/n$, se simplifica la desigualdad a:

$$|b_n| \leq M' n^{k/2},$$

con M' siendo una constante positiva que depende de M y k . □

Ramanujan estableció que la función τ , determinada por sus valores en los números primos, está acotada por una expresión menor que n^6 . Además, se conjeturó que para todo $n \geq 1$, se verifica que $|\tau(n)| \leq d(n) \cdot n^{11/2}$, donde $d(n)$ indica el número de divisores positivos de n . En el caso particular de los números primos p , se cumple que $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$.

La trascendencia de esta secuencia se revela al evidenciar su conexión con las formas modulares, las cuales son funciones holomorfas de gran importancia por su aplicación en la teoría numérica moderna. Se define una **forma modular de peso k** en relación con $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ como una función holomorfa f , establecida en el semiplano

superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$, que satisface condiciones de simetría específicas:

a) $f(z + 1) = f(z)$,

b) $f\left(-\frac{1}{z}\right) = z^k f(z)$.

c) Al introducir $q = e^{2\pi iz}$, se permite que f sea expresada mediante una serie de Fourier como $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n q^n$. Para que f sea considerada como una forma modular (específicamente, holomorfa en las cúspides), debe cumplir que $b_n = 0$ para $n < 0$.

Si adicionalmente se tiene $b_0 = 0$, se denomina a f como una forma cuspídea. Las formas modulares de peso k , ya sean cuspídeas o no, constituyen un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión finita. El menor entero positivo k para el cual dicho espacio de formas cuspidales de peso k es distinto de cero es $k = 12$, siendo su dimensión igual a uno. Dicho espacio es generado por la función

$$\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n,$$

denominada la función discriminante. Dentro del conjunto de formas cuspídeas de peso k , existe una secuencia de operadores T_n , conocidos como operadores de Hecke. La versión general de la conjetura de Ramanuja, que fue demostrada por Deligne como se refiere en (Deligne, 1974), se aplica a ciertas formas cuspídeas que son vectores propios para todos los operadores T_n . La existencia de tales formas se asegura gracias a la propiedad de conmutatividad de los operadores de Hecke (es decir, cada par de estos operadores conmuta).

Teorema 4.8 Considérese $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ como una forma cuspídea de peso k normalizada, es decir, con $a_1 = 1$. Sea f un vector propio para la familia de operadores de Hecke. Bajo estas condiciones, para cualquier número primo p , se verifica que la magnitud de a_p cumple con la siguiente desigualdad: $|a_p| \leq 2p^{(k-1)/2}$.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de resultados que caracterizan el operador de Hecke y la conjetura de Ramanujan desde un enfoque analítico, a los fines de destacar los aspectos más relevantes de acuerdo a los objetivos planteados. Además, se establecen las conclusiones y algunas líneas futuras que se pueden generar a partir de las mismas.

5.2. Análisis de los resultados

Con relación al objetivo 1, de caracterizar el operador de Hecke para las formas modulares con respecto al grupo modular, este operador actúa sobre una forma modular f mediante una suma que involucra las imágenes de f bajo acciones de ciertas matrices, transformando así cada coeficiente de Fourier de f . Este operador no solo preserva la estructura modular de f sino que, bajo ciertas condiciones, garantiza que $T_n f$ sea también una función modular. La importancia de los operadores de Hecke se subraya a través de su capacidad para conmutar entre sí, particularmente cuando son aplicados a números coprimos, lo cual se demuestra reorganizando las sumas involucradas en su definición, manteniendo la invariancia modular y asegurando la estructura deseada en la serie de q -expansión de las formas transformadas.

Con respecto al objetivo 2, de demostrar desde un enfoque analítico que la función de Ramanujan es conmutativa, se utiliza la función discriminante modular Δ para demostrar la conmutatividad de la función de Ramanujan. Definiendo la función $f(z)$ como una combinación lineal de transformaciones de Δ , donde p es un número primo, se facilita el uso de propiedades de periodicidad y modularidad. Se demuestra que $f(z)$ es invariante bajo traslación y transformación modular, implicando que $f(z)$ hereda la naturaleza modular de Δ , lo cual es crucial para establecer la relación de conmutatividad de τ , la función que representa los coeficientes de Fourier de Δ .

Además, se presentan teoremas que destacan la multiplicatividad de la función τ para argumentos que son potencias de números primos, evidenciando que τ es un eigenfunción para los operadores de Hecke. Esto ilustra la conexión entre las estructuras algebraicas y las propiedades analíticas de las formas modulares, lo que lleva a resultados significativos en la teoría de números.

Conforme al objetivo 3, de describir los fundamentos de la teoría analítica que garantizan que $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$ para todo número primo p , se destaca que en el estudio de la función de Ramanujan τ , aparece la expansión de la serie de q de la función discriminante modular Δ , en la que τ satisface ciertas propiedades cruciales bajo la acción de los operadores de Hecke. Un resultado fundamental de esta teoría es que para todo número primo p , la magnitud de $\tau(p)$ no excede $2p^{11/2}$. Este resultado se arraiga en la invariancia de una forma modular f bajo la acción de un subgrupo de congruencia Γ , donde el producto $\text{Im}(z)^{k/2}|f(z)|$ permanece constante para f de peso k . Este invariante se deriva de la naturaleza de las formas modulares, que son holomorfas en el semiplano superior y presentan simetría tanto bajo traslaciones enteras como bajo transformaciones modulares.

5.3. Conclusiones

En correspondencia con los objetivos planteados en esta investigación, a continuación se plantean las conclusiones más importantes que se derivan de la presentación y análisis de los resultados:

1. Con respecto al objetivo 1, la caracterización del operador de Hecke dentro del contexto de las formas modulares demuestra que este operador es fundamental en la transformación de los coeficientes de Fourier de una forma modular f . Preserva la modularidad de f y la propiedad de que $T_n f$ también sea una función modular.
2. De acuerdo con el objetivo 2, el análisis ha demostrado que la función de Ramanujan cumple con la propiedad de conmutatividad, utilizando la función discriminante modular Δ como herramienta clave. La definición y manipulación de

$f(z)$, en combinación con las propiedades intrínsecas de Δ , han permitido validar que $f(z)$ conserva la invariancia modular, heredando así la conmutatividad de Δ . Esto no solo confirma la relación de conmutatividad de los coeficientes de Fourier de Δ , representados por la función τ , sino que también proporciona una base sólida para entender mejor las interacciones entre los operadores de Hecke y las formas modulares.

3. Conforme a lo establecido en el objetivo 3, el estudio de la función de Ramanujan τ y su relación con la teoría analítica ha llevado a confirmar que, efectivamente, para todo número primo p , la magnitud de $\tau(p)$ está limitada superiormente por $2p^{11/2}$. Esta conclusión se fundamenta en la propiedad de invariancia de la función modular f bajo la acción de subgrupos de congruencia, donde se mantiene constante el producto $\text{Im}(z)^{k/2}|f(z)|$. Dicha propiedad es intrínseca a las formas modulares, las cuales exhiben simetría y holomorfía en el semiplano superior.

En respuesta al objetivo general, el análisis del enfoque analítico de las formas modulares en la conjetura de Ramanujan destaca el papel clave del operador de Hecke y la función discriminante modular Δ . Este enfoque ha permitido no solo confirmar propiedades fundamentales de la función de Ramanujan, como su conmutatividad y los límites de sus coeficientes, sino también fortalecer el vínculo entre la teoría de números y las formas modulares.

5.4. Líneas futuras de investigación

Esta investigación supone grandes retos ya que da apertura a diferentes líneas de investigación, algunas de las cuales, se presentan a continuación:

1. Análisis de los valores propios de los operadores de Hecke y su papel en la predicción de la distribución de números primos.
2. Desarrollo de algoritmos computacionales para la verificación numérica de la conjetura de Ramanujan para grandes valores de p .

3. Análisis de la generalización de la conjetura de Ramanujan para formas modulares de niveles superiores y sus posibles aplicaciones.
4. Aplicación de las técnicas de la teoría de formas modulares al criptoanálisis y la seguridad informática.
5. Análisis de la conjetura de Ramanujan en el marco de la teoría de K-teoría algebraica.

Referencias

- Blasio, D. (2006). Formas modulares de Hilbert y la conjetura de Ramanujan. En Geometría no conmutativa y teoría de números: donde la aritmética se encuentra con la geometría y la física (págs. 35-56). Wiesbaden: Vieweg.
- Blomer, V. y Brumley, F. (2011). Sobre la conjetura de Ramanujan sobre campos numéricos. *Anales de matemáticas*, 581-605.
- Boigues Pérez, J. C. (2023). Formas modulares y curvas elípticas. Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria.
- Bruinier, J. H., & Ono, K. (2013). Algebraic Formulas for the Coefficients of Half-Integral Weight Harmonic Weak Maass Forms. *Advances in Mathematics*, 246, 198-219.
- Deligne, P. (1974). La conjecture de Weil. *Instituto Hautes Études Sci. Publ. Math*, 43, 273-307.
- Duque Rosero, J. (2016). Formas modulares con aplicaciones a formas cuadráticas. Universidad de los Andes Bogotá, Colombia.
- Edixhoven, B., Van der Geer, G. y Moonen, B. (2008). Formas modulares. Formas modulares en Schiermonnikoog.
- Gallardo, L. H. (2010). On some Formulae for Ramanujan's tau Function. *Revista Colombiana de Matemáticas*, 44(2), 103-112.
- Garaev, M., García, V. y Konyagin, S. (2008). Waring's problem with the Ramanujan -function. *Izvestiya: Mathematics*, 72(1), 35-46.
- Gómez, A. J. (2019). Formas modulares. Tesis de Magíster en Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Hernandez-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la Investigación Científica. McGraw-Hill / Interamericana editores, S. A. de C.V., México.
- Hunt, D. C., & Hirschhorn, M. D. (1981). Una prueba sencilla de la conjetura de Ramanujan para potencias de 5. Editorial Walter de Gruyter & Co.

- Kilford, LJP (2015). Formas modulares: una introducción clásica y computacional. Compañía editorial científica mundial.
- Kohnen, W. (2004). Introduction to modular forms. In Development of the Magma system (pp. 17-23). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Lee, HB (2015). Operadores Hecke. <https://www.math.mcgill.ca/goren/GS/Hecke.pdf>
- Maier, A. (2007). Hecke-Operators. <https://www2.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/ws0607/modular-forms/Heckeoperators.pdf>
- Miatello, R. J. (2015). Formas modulares y operadores de Hecke. Universidad Nacional De Córdoba, Argentina.
- Moreno, C. J. (1977). A quick proof of Hardy's estimate for Ramanujan function (n) . Journal of Number Theory, 9(1), 1-3.
- Murphy, P. J. (2017). On a generalization of the Ramanujan conjecture to modular forms of higher weight. Journal of the London Mathematical Society, 96(1), 14-30.
- Olabuénaga, J. I. R. (2012). Metodología de la investigación cualitativa. Vol. 15, Universidad de Deusto.
- Ortega, A. O. (2018). Enfoques de investigación. Métodos para el diseño urbano. Arquitectónico.
- Ramírez, S. (2019). Formas Modulares y el Problema de los Números Congruentes. Universidad de Buenos Aires.
- Ramos-Galarza, C. A. (2020). Los alcances de una investigación. CienciAmérica, 9(3), 1-6.
- Rousu, L. (2021). Modular Forms and Related Topics. Departamento de Matemática de Uppsala Universitet.
- Saltachin, A. J. G. (2019). Formas modulares (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Católica del Perú).
- Winnie Li, WC (2020). La conjetura de Ramanujan y sus aplicaciones. Transacciones filosóficas de la Royal Society A, 378(2163), 20180441.
- Williams, K. S. (2015). Historical Remark on Ramanujan's Tau Function. The American Mathematical Monthly, 122(1), 30-35.

ANEXOS

Anexo. Método para obtener series de Ramanujan.

Conjetura Alterna Se considera u es igual a 1 o -1. Se supone la existencia de números algebraicos positivos z , a y b , con $z < 1$, tal que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n) z^n (a + bn) = \frac{1}{\pi} \quad (5.1)$$

satisface las propiedades de una serie de Ramanujan.

Bajo estas premisas, se propone la siguiente expansión en serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a + b(n+x)] = \frac{1}{\pi} - \frac{k\pi}{2} x^2 + O(x^3) \quad (5.2)$$

Aquí, k es un número racional positivo que depende de los valores de a , b , y z .

Se define la función $R(x)$ como:

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a + b(n+x)] \quad (5.3)$$

Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (3.7), se concluye que:

$$k = \frac{-R''(0)}{\pi} \quad (5.4)$$

Se considera la posibilidad de asociar un número racional, denominando k , a cada serie que corresponde al tipo Ramanujan. Se examinan las siguientes series:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{99^{4n}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{2206\sqrt{2}}{9801} + \frac{52780\sqrt{2}}{9801} n \right) &= \frac{1}{\pi}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{16^n} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{7\sqrt{3}}{36} + \frac{17\sqrt{3}}{12} n \right) &= \frac{1}{\pi}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{8}\right)^{3n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{15\sqrt{2}}{64} + \frac{77\sqrt{2}}{32} n \right) &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Estos ejemplos conllevan a los valores de k como 56, $\frac{13}{3}$, y 7, respectivamente. Se busca demostrar que los parámetros u , $B(n)$ y k son cruciales para definir cualquier serie del tipo Ramanujan. Se parte de la expresión:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} [a+b(n+x)] = a \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} + b \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} (n+x), \quad (5.6)$$

y se definen las funciones:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x}, \quad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n B(n+x) z^{n+x} (n+x), \quad (5.7)$$

tal que:

$$R(x) = aS(x) + bT(x). \quad (5.8)$$

Utilizando la Conjetura (5.1), se establece el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} aS(0) + bT(0) = \frac{1}{\pi}, \\ aS'(0) + bT'(0) = 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Se formula entonces una ecuación que relaciona z y k :

$$f(z) = k, \quad \text{donde} \quad f(z) = \frac{-aS''(0)}{\pi} + \frac{-bT''(0)}{\pi}, \quad (5.10)$$

Para resolver la ecuación (5.10) se propone un método numérico que comienza con una aproximación inicial z_1 de z , obtenida al considerar solamente los términos de $n = 0$ en las funciones $B(x)z^x$ y $B(x)z^x x$ en lugar de $S(x)$ y $T(x)$. Esta aproximación conduce a una ecuación cuadrática en $\ln(z)$.

Posteriormente, se emplea la ecuación

$$\frac{\ln z_n}{k_n} = \frac{\ln z_{n+1}}{k}$$

la cual se basa en la hipótesis de una relación lineal entre k y $\ln z$. Para mejorar las aproximaciones de z , se utiliza la recurrencia

$$k_n = f(z_n), \quad z_{n+1} = z_n^{k/k_n}$$

El interés principal radica en determinar el valor algebraico de z cuando k es un número racional. Después de calcular una aproximación numérica de z , se intenta identificar su expresión algebraica. Las funciones `identify` [8] y `minpoly`, implementadas en Maple 9, resultan adecuadas para este propósito. Una vez encontrado el valor de z , el sistema (5.9) permite obtener aproximaciones numéricas de a y b . A continuación, se presenta un ejemplo del procedimiento: Se toma

$$u = 1, \quad B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3}$$

Al sustituir $k = 4$ en la ecuación (5.10) y aplicar la recurrencia con el valor inicial

$$z_1 = 256e^{-\pi\sqrt{6}},$$

se obtiene la siguiente secuencia de aproximaciones:

n	z_n	k_n	n	z_n	k_n
1	0.1164700015	3.923087536	6	0.1111111692	3.999999144
2	0.1116624439	3.991903391	7	0.1111111169	3.999999913
3	0.1111670393	3.999176679	8	0.1111111117	3.999999991
4	0.1111167760	3.999916585	9	0.1111111111	3.999999999
5	0.1111116848	3.999991552	10	0.1111111111	3.999999999

Se concluye rápidamente que

$$z = 0,1111111111 \dots = \frac{1}{9}$$

Al incorporar este valor en (5.9), se encuentran

$$a = 4,618802153517, \quad y \quad b = 0,577350269189$$

y la función `identify` en Maple 9 identifica estas constantes como

$$a = \frac{8}{3}\sqrt{3}, \quad y \quad b = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

En los ejemplos que se presentarán a continuación, se utiliza la función `identify`

para la identificación de constantes. Por ejemplo, al considerar

$$u = 1, \quad B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3},$$

y al fijar $k = 4$, se obtienen los siguientes resultados:

$$z = 9 - 4\sqrt{5}, \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5} - 22}, \quad \text{y} \quad b = \sqrt{20\sqrt{5} - 40}.$$

En un escenario diferente, si se toma

$$u = -1, \quad B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3},$$

y se establece $k = 5$, se llega a

$$z = 17 - 12\sqrt{2}, \quad a = 2\sqrt{2} - \frac{5}{2}, \quad \text{y} \quad b = 6\sqrt{2} - 6.$$

Para series alternadas asociadas a $k = 15$, con las funciones binomiales

$$B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3}, \quad B(n) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3},$$

se obtienen respectivamente

$$z = \frac{1}{512}, \quad a = \frac{25}{192}\sqrt{6}, \quad b = \frac{57}{32}\sqrt{6}$$

y

$$z = \frac{1}{3024}, \quad a = \frac{13}{108}\sqrt{7}, \quad b = \frac{55}{36}\sqrt{7}.$$

Finalmente, para las series de términos positivos relacionadas con $k = 8$, se tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} (97 - 56\sqrt{3})^n (\sqrt{78\sqrt{3} - 135} + 6\sqrt{14\sqrt{3} - 24} \cdot n) &= \frac{1}{\pi}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{1}{81}\right)^n \left(\frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{20\sqrt{2}}{9}n\right) &= \frac{1}{\pi}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{13\sqrt{7} - 34}{54}\right)^n \left(\frac{7\sqrt{7} - 10}{27} + \frac{13\sqrt{7} - 7}{9}n\right) &= \frac{1}{\pi}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3} \left(\frac{4}{125}\right)^n \left(\frac{2\sqrt{15}}{25} + \frac{22\sqrt{15}}{25}n\right) &= \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

Las soluciones explícitas para el sistema (5.9) se expresan como:

$$a = \frac{T'(0)}{\pi[S(0)T'(0) - S'(0)T(0)]}, \quad b = \frac{-S'(0)}{\pi[S(0)T'(0) - S'(0)T(0)]}$$

Insertando estos valores en (5.10), se llega a:

$$\frac{S''(0) + k\pi^2 S(0)}{S'(0)} = \frac{T''(0) + k\pi^2 T(0)}{T'(0)}$$

Se introduce el número N , definido por:

$$N := \left[\frac{S''(0) + k\pi^2 S(0)}{-2\pi S'(0)} \right]^2$$

Mediante análisis numérico en una variedad de ejemplos, se encuentra una relación directa entre N y k , que parece ser función de la parte binomial $B(n)$. Esta relación se muestra en la siguiente tabla:

$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3}$	$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3}$
$N = k + 1$	$N = k + 2$	$N = k + 4$	$N = k + \frac{4}{3}$

Se conjetura que N es un parámetro crucial en la teoría de funciones modulares elípticas aplicadas a las series de Ramanujan, permitiendo determinar las funciones $z = z(N)$, $a = a(N)$, y $b = b(N)$.

$$\begin{cases} S''(0) + k\pi^2 S(0) = -2\pi\sqrt{N}S'(0), \\ T''(0) + k\pi^2 T(0) = -2\pi\sqrt{N}T'(0). \end{cases}$$

Derivando la primera ecuación respecto a z y simplificándola con la segunda, se obtiene:

$$\pi \frac{dk}{dz} S(0) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{dN}{dz} S'(0)$$

En los cuatro casos que relacionan N y k , se cumple:

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dk}{dz}$$

$$S'(0) = -\pi\sqrt{N} \cdot S(0), \quad (5.11)$$

indicando que esta forma simplificada facilita el cálculo del valor de z en función de los parámetros u , $B(n)$ y N . Para una aproximación inicial de z , se define la suma parcial $S_j(x)$ de $S(x)$ por

$$S_j(x) = \sum_{n=0}^j u^n B(n+x) z^{n+x}, \quad (5.12)$$

y se aborda la solución de la ecuación modificada

$$S'_0(0) = -\pi\sqrt{N} S_0(0). \quad (5.13)$$

La solución propuesta para esta ecuación es

$$z_1 = M e^{-\pi\sqrt{N}}, \quad (5.14)$$

donde M corresponde a los valores presentados en la tabla a continuación:

Expresión	Valor de M
$\frac{(\frac{1}{2})_n^3}{(1)_n^3}$	64
$\frac{(\frac{1}{2})_n (\frac{1}{4})_n (\frac{3}{4})_n}{(1)_n^3}$	256
$\frac{(\frac{1}{2})_n (\frac{1}{6})_n (\frac{5}{6})_n}{(1)_n^3}$	1728
$\frac{(\frac{1}{2})_n (\frac{1}{3})_n (\frac{2}{3})_n}{(1)_n^3}$	108

Para refinar el valor de z , se utiliza un método de recurrencia, expresado por

$$N_n = f(z_n), \quad z_{n+1} = M \left(\frac{z_n}{M} \right)^{\sqrt{N/N_n}}, \quad (5.15)$$

donde $f(z)$ se define como

$$f(z) = N, \quad \text{con} \quad f(z) = \left[\frac{S'(0)}{-\pi S(0)} \right]^2 \quad (5.16)$$