

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para optar por el título de
Maestría en Matemáticas.

Título

Aplicación de la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas.

Sustentante

Rony Paredes Núñez

Asesor

MA. Leomar Antonio Reyes Abreu

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

Título

Aplicación de la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en la investigación, son responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han incluido respetando el derecho de autor.

Título

Aplicación de la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas.

Tesis presentada por **Rony Paredes Núñez** para la obtención del grado de
Magister en Matemáticas.

Composición del tribunal evaluador

Dr. Victor Gálan

Jurado de metodología

MA. Wilson Heredia

Jurado de contenidos

MA. Nelson Sánchez

Jurado de redacción

Lic. Yuderka Reyes

Directora de postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos	V
Dedicatorias	VI
Resumen	VII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	1
1.2.1. Antecedentes históricos	1
1.2.2. Antecedentes académicos	3
1.3. Planteamiento del problema	5
1.4. Justificación	6
1.5. Objetivos	6
1.5.1. Objetivo general	6
1.5.2. Objetivos específicos	7
1.6. Alcances y límites	7
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	8
2.1. Introducción	8
2.2. Marco teórico	8
2.2.1. Teoría de grafos	8
2.2.2. Sistema de ecuaciones polinómicas	12
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	19
3.1. Introducción	19
3.2. Método de investigación	19
3.3. Diseño de investigación	19
3.4. Tipo de investigación	19
3.5. Enfoque de investigación	20
3.6. Procedimiento de investigación	20

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	21
4.1. Introducción	21
4.2. Eficacia de los enfoques de la teoría de grafos en el abordaje de sistemas de ecuaciones polinómicas con respecto a métodos convencionales . .	21
4.2.1. Representación gráfica	25
4.2.2. Eficiencia computacional	29
4.3. Uso de la teoría de grafos en la mejora de la eficiencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones polinómicas	32
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	34
5.1. Introducción	34
5.2. Conclusiones finales	34
5.3. Líneas futuras de investigaciones.	35
Referencias	36
Anexos	I
Anexo A	II
Anexo B	II

Agradecimientos

A Dios: Por haberme dado el entendimiento y las aspiraciones para salir adelante.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental: Por abrir sus puertas una vez más y brindar la oportunidad de realizar esta nueva meta y crecer en el campo del conocimiento.

Al ministerio de Educación Superior Ciencia y Tecnología (MESCYT): Por haberme apoyado moral y económicamente en todo el trayecto del programa de esta maestría que finaliza con la presentación de este trabajo final.

Al asesor: Leomar Antonio Reyes Abreu, por su acertada entrega para la realización de esta investigación, por su tiempo, paciencia, por brindar la oportunidad de recurrir a sus capacidades, habilidades y experiencia y permitir trabajar en un ambiente de confianza.

A los queridos compañeros: por contribuir en todo este proceso cuando los necesitaba y brindar su amistad incondicional.

Dedicatorias

A mi madre: Ramona Núñez En primer lugar, por haberme dado la vida, por ser inspiración, por tu disposición y apoyo incondicional, por ser padre y madre, es y será mi ejemplo a seguir.

A mis hermanos: Marlyn Paredes Núñez, Ramón Octavio Paredes Núñez y Raynely Vásquez Núñez. Por ser mis amigos, por estar en los momentos difíciles.

A mi abuela: Francisca Núñez por ser esa persona que siempre me consintió, por estar siempre dispuesta ayudarme.

A mi amigo y hermano: José Manuel Basora Mosquea, por estar en esos momentos que tanto lo he necesitado, por haber confiado en mí, por su esfuerzo y colaboración para llegar a esta meta juntos apoyándonos siempre en todo momento.

República Dominicana

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Facultad de Postgrado y Educación Continuada



MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

**Aplicación de la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones
polinómicas.**

Rony Paredes Núñez

Sustentante

MA. Leomar Antonio Reyes Abreu

Asesor

RESUMEN

Este estudio se explora la aplicación de la teoría de grafos en la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas. Con la intención de mejorar la comprensión de los principios matemáticos subyacentes y optimizar la eficiencia computacional, se plantea un enfoque cualitativo no experimental, con un diseño transversal y un tipo de investigación descriptivo, exploratorio y explicativo.

La investigación se estructura en distintas etapas: una revisión exhaustiva de la literatura relacionada, el desarrollo de la estructura de la investigación, y un análisis detallado de la teoría de grafos aplicada a sistemas polinómicos. La metodología abarca la búsqueda de información tanto en fuentes digitales como en materiales físicos de bibliotecas universitarias, garantizando un enfoque integral.

Los hallazgos revelan que la aplicación de la teoría de grafos se revela como

una herramienta valiosa en la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas. La representación visual de las relaciones entre variables y ecuaciones ofrece una visión clara y estructurada, facilitando la identificación de patrones y la comprensión de la complejidad del sistema. Además, el Teorema de Bézout sirve como un marco teórico que cuantifica las soluciones comunes, proporcionando una guía para evaluar la eficacia de los métodos basados en grafos.

Palabras claves: Teoría de grafos. Sistemas de ecuaciones polinómicas. Eficacia. Enfoques. Métodos convencionales.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

Este capítulo está estructurado por los elementos siguientes: antecedentes históricos y académicos, planteamiento del problema, objetivos, justificación, alcances y límites.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes históricos

El origen de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII con el problema de los puentes de Königsberg, el cual consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel ($54^{\circ}42'12''\text{N}20^{\circ}30'56''\text{E}$) en la ciudad de Königsberg, actualmente Kaliningrado, de modo que se recorrieran todos los puentes pasando una sola vez por cada uno de ellos (Ortigosa, 2022). El trabajo de Leonhard Euler sobre el problema titulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (La solución de un problema relativo a la geometría de la posición) en 1736, es considerado el primer resultado de la teoría de grafos. También se considera uno de los primeros resultados topológicos en geometría (que no depende de ninguna medida). Este ejemplo ilustra la profunda relación entre la teoría de grafos y la topología. (Jean, 2022).

Luego, en 1847, Gustav Kirchhoff utilizó la teoría de grafos para el análisis de redes eléctricas publicando sus leyes de los circuitos para calcular el voltaje y la corriente en los circuitos eléctricos, conocidas como leyes de Kirchhoff, considerado la primera aplicación de la teoría de grafos a un problema de ingeniería (Parlanti, Catania y Moyano, 2023).

En 1852, Francis Guthrie planteó el problema de los cuatro colores, el cual afirma que es posible, utilizando solamente cuatro colores, colorear cualquier mapa de países de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color. Este pro-

blema, que no fue resuelto hasta un siglo después por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en 1976, puede ser considerado como el nacimiento de la teoría de grafos. Al tratar de resolverlo, los matemáticos definieron términos y conceptos teóricos fundamentales de los grafos (Braicovich, 2022).

En 1857, Arthur Cayley estudió y resolvió el problema de enumeración de los isómeros, compuestos químicos con idéntica composición (fórmula) pero diferente estructura molecular. Para ello representó cada compuesto, en este caso hidrocarburos saturados C_nH_{2n+2} , mediante un grafo árbol donde los vértices representan átomos y las aristas la existencia de enlaces químicos (Lorenat, 2023).

El término grafo, proviene de la expresión inglesa graphic notation (notación gráfica), usada por primera vez por Edward Frankland y posteriormente adoptada por Alexander Crum Brown en 1884 y que hacía referencia a la representación gráfica de los enlaces entre los átomos de una molécula (Ortigosa, 2022).

El primer libro sobre teoría de grafos fue escrito por Dénes König y publicado en 1936. A fines de los años 1940 e inicios de los años 1950, junto con los primeros estudios formales de cliques o camarillas en sociomatrices y de centralidad en sociogramas, se introdujo la teoría de grafos como herramienta clave para la sociometría y el análisis de redes sociales (Esquivel, 2019).

La aplicación de la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas es una integración de dos campos fundamentales: la teoría de grafos y el álgebra polinómica. La teoría de grafos se originó en el siglo XVIII con el famoso problema de los puentes de Königsberg (Cano, Domínguez y Vázquez, 2020), planteado por Leonhard Euler. Este problema condujo al desarrollo de la teoría de grafos como una rama distintiva de las matemáticas.

Por otro lado, el estudio de ecuaciones polinómicas se remonta a la antigüedad, con importantes contribuciones de matemáticos como Viète, Cardano y Descar-

tes (López, 2023). A lo largo del tiempo, el álgebra polinómica ha evolucionado, y su aplicación se ha extendido a diversos campos de las matemáticas y la ingeniería (Ordoñez, 2022).

La conexión entre la teoría de grafos y la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas ha cobrado relevancia en el contexto moderno con los avances en la teoría de grafos y la computación. La representación gráfica de las relaciones entre las variables en un sistema polinómico mediante grafos ofrece un enfoque visual y estructurado para entender y resolver problemas complejos (Ortín, 2019).

1.2.2. Antecedentes académicos

Según la investigación de Ventura (2015), titulada “La teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco, 2014”, el objetivo general fue determinar la influencia de la teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes mencionados. Los resultados de la investigación indican que la incorporación de la teoría de grafos impacta significativamente en la resolución de problemas aritméticos, destacando tres aspectos clave: autonomía, autodirección y autorregulación. Estas estrategias se revelan como elementos cruciales, evidenciados en la planificación, ejecución y resultados de las sesiones de aprendizaje.

Según la investigación realizada por Ortín (2019) en la Universidad de Zaragoza, centrada en las “Bases de Gröbner y sus Aplicaciones en la Teoría de Grafos”, el objetivo principal fue analizar la influencia de las Bases de Gröbner en la Teoría de Grafos y explorar sus aplicaciones en la resolución de problemas y el análisis de estructuras. El estudio ha llevado a cabo una exhaustiva exploración de la aplicación de las Bases de Gröbner en el ámbito de la Teoría de Grafos. A través de un análisis minucioso y riguroso, se ha demostrado cómo los conceptos y técnicas asociadas a

las Bases de Gröbner pueden ser efectivamente utilizados para abordar problemas específicos dentro de la Teoría de Grafos.

La investigación realizada por Onofre Muñoz (2020) en la Universidad Politécnica Salesiana Sede Quito aborda el “Dimensionamiento óptimo de generación distribuida en redes de distribución basado en la teoría de grafos”. El objetivo principal de este estudio fue encontrar una solución óptima para el dimensionamiento de la generación distribuida (GD) en redes de distribución mediante la aplicación de la teoría de grafos. En conclusión, los resultados revelaron que la implementación de unidades de GD en todos los nodos de bajo voltaje del sistema eléctrico de distribución tuvo un impacto positivo, evidenciado por el aumento en los perfiles de voltaje, la reducción de pérdidas eléctricas, y el fortalecimiento de los niveles de confiabilidad y resiliencia en el nuevo sistema eléctrico de distribución.

En su estudio “Sobre la conjetura de la sensibilidad y su resolución vía teoría de grafos” (Asensio, 2022), realizado en la Universidad de Valladolid, el autor se propuso examinar los recursos necesarios para la resolución de problemas computacionales, con el objetivo de clasificarlos según su dificultad intrínseca. En conclusión, la teoría de grafos se reveló como una herramienta crucial para abordar complejidades en diversos campos. Su habilidad para modelar relaciones complejas mediante nodos y aristas facilitó el análisis estructurado de sistemas. La resolución previa de la conjetura de la sensibilidad mediante la teoría de grafos resaltó su versatilidad, consolidándola como un pilar esencial en la investigación científica.

De acuerdo con la investigación de Melón (2023) sobre “Coloreabilidad en teoría de grafos” en la Universidad Rey Juan Carlos, su objetivo fue explorar, analizar y aplicar las propiedades y algoritmos asociados a la coloreabilidad en teoría de grafos. En conclusión, esta teoría encuentra aplicaciones significativas en la vida cotidiana, destacándose en la resolución de problemas prácticos como el “Problema del Cartero Chino”. Estos ejemplos ilustraron la utilidad práctica y la relevancia de los conceptos teóricos estudiados.

1.3. Planteamiento del problema

En el ámbito de la aplicación de la teoría de grafos, se ha evidenciado un creciente interés en su utilización para la generación de sistemas de ecuaciones polinómicas (Ortín, 2019). Sin embargo, a pesar de los avances en esta área, persisten desafíos significativos que requieren una atención más profunda.

Uno de los problemas fundamentales radica en la falta de métodos sistemáticos y eficientes para traducir las estructuras de grafos complejas en sistemas de ecuaciones polinómicas (Onofre, 2020). Aunque se han propuesto algunos enfoques, su aplicabilidad y escalabilidad en situaciones del mundo real aún no han sido completamente establecidas. Esto plantea la necesidad de desarrollar métodos más precisos y generalizados que permitan la traducción efectiva de propiedades estructurales de los grafos a ecuaciones polinómicas, abriendo así nuevas posibilidades para la resolución de problemas prácticos en diversos campos.

Además, otro desafío importante es la optimización de estos métodos para manejar grafos de gran escala, comunes en aplicaciones del mundo real (Asensio, 2022). La complejidad computacional y el rendimiento de estos enfoques son factores cruciales que afectan su viabilidad para problemas prácticos. Por lo tanto, se requiere investigación adicional para desarrollar algoritmos eficientes y escalables que permitan la aplicación efectiva de la teoría de grafos en la generación de sistemas de ecuaciones polinómicas en entornos de gran escala. Frente a estas situaciones, surge la siguiente pregunta ¿Cómo aplicar la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas? y de manera específica surgen las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuál es la eficacia de los enfoques de la teoría de grafos en el abordaje de sistemas de ecuaciones polinómicas con respecto a métodos convencionales?
2. ¿Cómo la teoría de grafos mejora la eficiencia en la solución de sistemas de ecuaciones polinómicas, teniendo en cuenta el tiempo computacional y los recursos utilizados?

1.4. Justificación

La investigación sobre la aplicación de la teoría de grafos para la generación de sistemas de ecuaciones polinómicas es esencial para la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO) por diversas razones. En primer lugar, abordar este problema proporciona a la comunidad académica de UTECO una oportunidad valiosa para explorar y aplicar conocimientos avanzados en un campo interdisciplinario que tiene implicaciones significativas en áreas como la ingeniería, la informática y la investigación operativa.

La solución eficaz de este problema brinda herramientas prácticas para enfrentar problemas complejos del mundo real. La capacidad de traducir estructuras de grafos en ecuaciones polinómicas tiene aplicaciones directas en la resolución de problemas prácticos en ingeniería, optimización y modelización de fenómenos complejos. Por ende, la investigación no solo contribuye al prestigio académico de UTECO, sino que también te permite enfrentar desafíos tecnológicos emergentes y destacarse en sus futuras carreras profesionales.

Además, al resolver este problema, la eficacia de la solución se traduce en la mejora de los métodos y enfoques computacionales utilizados en UTECO. La optimización de la traducción de propiedades estructurales de grafos a ecuaciones polinómicas no solo impulsa la investigación en la institución, sino que también influye positivamente en la calidad académica del cuarto nivel.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Aplicar la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas.

1.5.2. Objetivos específicos

1. Comparar la eficacia de los enfoques de la teoría de grafos en el abordaje de sistemas de ecuaciones polinómicas con respecto a métodos convencionales.
2. Analizar cómo la teoría de grafos mejora la eficiencia en la solución de sistemas de ecuaciones polinómicas, teniendo en cuenta el tiempo computacional y los recursos utilizados.

1.6. Alcances y límites

La investigación se sitúa en el cruce de dos áreas fundamentales: la teoría de grafos que pertenece a las matemáticas discretas y la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas en el álgebra y específicamente se aplicó la teoría de grafos para resolver de manera eficaz y eficiente sistemas de ecuaciones polinómicas.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1. Introducción

En este capítulo se presentan las definiciones y teoremas que sirven de soporte a esta investigación.

2.2. Marco teórico

2.2.1. Teoría de grafos

Definición 2.2.1 (Teoría de grafos.) La teoría de grafos es una rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los objetos de un conjunto mediante la representación gráfica de estas relaciones. Un grafo consta de vértices (también llamados nodos) y aristas (también llamadas enlaces) que conectan pares de vértices. Los grafos se utilizan para modelar una variedad de problemas en diferentes campos, como ciencias de la computación, matemáticas aplicadas, biología, redes sociales, logística, entre otros (Ortigosa, 2022).

Definición 2.2.2 (Vértice (Nodo).) Representa un objeto o entidad. En un grafo, se denota comúnmente por V (Ortigosa, 2022).

Definición 2.2.3 (Arista (Enlace)) Representa la relación entre dos vértices. Puede ser dirigida (con una dirección) o no dirigida. En un grafo, se denota comúnmente por E (Parlanti, Catania y Moyano, 2023).

Definición 2.2.4 (Grafo.) Un conjunto de vértices y aristas. Puede ser dirigido o no dirigido. Un grafo G se denota como $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices y E es el conjunto de aristas (Morelli y Cunha, 2021).

Definición 2.2.5 (Grafo dirigido (Digrafo).) Un grafo donde cada arista tiene una dirección. Es decir, la relación entre dos vértices tiene un sentido. En un digrafo D , una arista dirigida desde el vértice u al vértice v se denota como $u \xrightarrow{\text{peso}} v$. (Cubria, 2023).

Definición 2.2.6 (Grafo no dirigido.) Un grafo donde las aristas no tienen dirección. La relación entre dos vértices es simétrica. (Macías Piguave, 2022).

Definición 2.2.7 (Grado de un vértice.) Número de aristas incidentes en un vértice. En grafos dirigidos, se divide en grado de entrada y grado de salida, donde: el grado de un vértice v en un grafo G se denota como $d(v)$ y el grado de entrada y salida en digrafos de entrada v se denota como $d_{\text{in}}(v)$ y el grado de salida como $d_{\text{out}}(v)$. (Ortigosa, 2022).

Definición 2.2.8 (Camino.) Una secuencia de vértices donde cada vértice está conectado al siguiente por una arista. Un camino P de longitud k entre dos vértices u y v se denota como $P : u \xrightarrow{\text{peso}} v$.

Definición 2.2.9 (Ciclo.) Un camino cerrado donde el primer y el último vértice son el mismo. Un ciclo C de longitud k se denota como $C : v_1 \xrightarrow{\text{peso}} v_2 \xrightarrow{\text{peso}} \dots \xrightarrow{\text{peso}} v_k \xrightarrow{\text{peso}} v_1$. (Cubria, 2023).

Definición 2.2.10 (Grafo ponderado.) Un grafo donde a cada arista se le asigna un peso o costo. - Fórmula: Un grafo ponderado G se denota como $G = (V, E, w)$, donde w es la función de peso de las aristas. (Macías, 2022).

Definición 2.2.11 (Conectividad.) La medida de cómo los vértices están conectados en un grafo. (Número de componentes conexos): En un grafo no dirigido, el número de componentes conexos se denota como c . (Macías, 2022).

Definición 2.2.12 (Árbol.) Un grafo no dirigido y conexo sin ciclos. Un bosque es un conjunto de árboles. (Número de aristas en un árbol): Un árbol con n vértices tiene exactamente $n - 1$ aristas. (Ortigosa, 2022).

Definición 2.2.13 (Grafo bipartito.) Un grafo cuyos vértices pueden dividirse en dos conjuntos disjuntos, de modo que todas las aristas conectan vértices de conjuntos diferentes. (Bipartición): Un grafo G es bipartito si y solo si sus vértices pueden dividirse en dos conjuntos disjuntos U y V de manera que todas las aristas conecten un vértice en U con uno en V . (Negrete, 2022).

Ejemplo 2.2.1 (Grafo no dirigido ponderado.) Considere el siguiente grafo no dirigido ponderado:

$$G = (V, E, w)$$

donde:

$$V = \{A, B, C, D\}$$

$$E = \{(A, B), (A, C), (B, C), (B, D), (C, D)\}$$

$$w : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ (la función de peso)}$$

$$w((A, B)) = 2, \quad w((A, C)) = 1, \quad w((B, C)) = 3, \quad w((B, D)) =$$

$$4, \quad w((C, D)) = 5$$

Ejemplo 2.2.2 (Grafo dirigido y ciclos.) Considere un digrafo D con vértices $V = \{A, B, C, D\}$ y aristas $E = \{(A, B), (B, C), (C, A), (C, D)\}$.

Ejemplo 2.2.3 (Árbol y Bosque.) Suponga que tiene el siguiente grafo no dirigido:

$$G = (V, E)$$

donde:

$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E = \{(A, B), (B, C), (C, A), (D, E)\}$$

Este grafo tiene un ciclo (A-B-C-A), pero si elimina una arista, por ejemplo, (A, B) , se convierte en un árbol.

Ejemplo 2.2.4 (Grafo Bipartito.) Considere el siguiente grafo bipartito:

$$G = (U, V, E)$$

donde:

$$U = \{A, B, C\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{(A, 1), (A, 2), (B, 2), (C, 1), (C, 3), (C, 4)\}$$

Este grafo es bipartito ya que los vértices se pueden dividir en dos conjuntos disjuntos (U y V y todas las aristas conectan un vértice en U con uno en V).

La teoría de grafos no es la herramienta más común para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas; sin embargo, en algunos casos específicos, se puede utilizar para modelar y analizar propiedades estructurales de sistemas polinómicos.

Teorema 2.2.1 Sea $G = (V, E)$ un dupla compuesta por un conjunto finito $V = V(G)$ de vértices de un grafo, también llamados nodos y típicamente dibujados por círculos y un conjunto $E = E(G) \subseteq V_*^2$, que llame conjunto de aristas ¹, donde se ha definido $V_*^2 = (V \times V) \setminus (\cup_{v \in V} (v, v))$, pues en esta monografía no está interesados en estudiar aristas de la forma (v, v) , también conocidas como bucles.

Definición 2.2.14 (Grafo no-dirigido) Un grafo no-dirigido (que simplemente llame grafo) es una tupla $G = (V, E)$ con las características mencionadas anteriormente, donde una arista $e \in E$ representa una conexión (sin una dirección establecida) entre dos vértices de V y se dibuja por una línea que une estos elementos. Así, la arista $e = (v_1, v_2)$ representa una conexión entre los vértices v_1 y v_2 , la cual puede también escribirse como $e = (v_2, v_1)$, en este caso, diga que los vértices v_1 y v_2 son adyacentes. Para simplificar la notación, en esta monografía utilice la convención que la arista e de un grafo no-dirigido aparecerá escrita sólo una vez en la descripción de E y, en caso de existir alguna relación de orden $\leq$ definida sobre el conjunto de vértices V , está será descrita de la forma $e = (v_1, v_2)$ cuando $v_1 \leq v_2$. (Bojacá, 2020).

Definición 2.2.15 (Grafo completo.) El grafo completo K_n es el grafo de n vértices que contiene todas las aristas posibles, es decir, para cada par de vértices existe una arista que los une. (Parlanti, Catania y Moyano, 2023).

Teorema 2.2.2 (Mantel 1907) . Todo grafo con n vértices y tamaño mayor estricto que $\lfloor n^2/4 \rfloor$ contiene un triángulo.

Teorema 2.2.3 Para todo grafo G de seis vértices, se tiene que, G contiene un triángulo, o bien su complemento $\bar{G}$ lo contiene.

Definición 2.2.16 (Grafo bipartito.) Un grafo bipartito es un grafo $G = (V, E)$ en que el conjunto de vértices se puede particionar en dos subconjuntos V^1 y V^2 (es decir, $V = V^1 \cup V^2$ y $V^1 \cap V^2 = \emptyset$), de manera que las aristas de G tienen un extremo en V^1 y otro en V^2 (es decir, $E \subseteq V^1 \times V^2$). (Bojacá, 2020).

Proposición 2.2.1 Un grafo G es bipartito si y sólo si no contiene un ciclo de largo impar.

Definición 2.2.17 (Grafo bipartito-completo.) Diga que un grafo $G = (V, E)$ es bipartito-completo, si éste es bipartito, cuya partición del conjunto de vértices V está dada por V^1 y V^2 , y si las aristas de G corresponden a todas las aristas que conectan un vértice de V^1 con uno de V^2 (es decir, $E = V^1 \times V^2$). Si las cardinalidades de V^1 y V^2 son n_1 y n_2 , respectivamente, denote a este grafo por K_{n_1, n_2} .

Definición 2.2.18 Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido. La versión no-dirigida de (o el grafo no-dirigido asociado a) G es el grafo no-dirigido $G' = (V, E)$ con los mismos vértices que G y cuyas aristas conectan dos vértices sólo si existe algún arco en A entre éstos dos vértices, independiente de su dirección. En otras palabras, para dos vértices $v, v' \in V, e = (v, v') \in E$ si y sólo si $(v, v') \in A$ o $(v', v) \in A$. (Morelli y Cunha, 2021).

Definición 2.2.19 Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido. Un camino entre dos vértices i y j en V es un subgrafo $P = (V', A')$ de G (i.e. $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$), donde $V' = 64$. (Negrete, 2022).

2.2.2. Sistema de ecuaciones polinómicas

Definición 2.2.20 Un sistema de ecuaciones polinómicas es un conjunto de ecuaciones en el que al menos una de las ecuaciones es un polinomio. Estas ecuaciones involucran variables que pueden tomar cualquier valor y se busca encontrar las soluciones que satisfacen todas las ecuaciones simultáneamente. La forma genérica de un sistema de m ecuaciones algebraicas y n incógnitas es la siguiente: (Vivanco y Belén, 2022).

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

donde $F_1, \dots, F_m$ son funciones de las incógnitas. La solución, perteneciente al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, será tal que el resultado de evaluar cualquier expresión F_i con los valores de dicha solución, verifique la ecuación. (Laguardia, 2023).

Definición 2.2.21 (Clasificación de los sistema de ecuaciones.) Un sistema de ecuaciones sobre $\mathbb{R}^n$ puede clasificarse de acuerdo con el número de soluciones o cardinal del conjunto de soluciones $\mathcal{S}$, de acuerdo con este criterio un sistema puede ser: Sistema compatible, sistemas compatibles determinados, sistemas compatibles indeterminados y sistema incompatible. (Gomez, 2021).

Definición 2.2.22 (Sistema lineal) Se llama sistema lineal si las ecuaciones que conforman el sistema son funciones afines. A diferencia del caso general, la solución de los sistemas de ecuaciones lineales son fáciles de encontrar cuando los coeficientes de las ecuaciones son números reales o complejos. También existen medios generales de resolución cuando los coeficientes pertenecen a un anillo, aunque la búsqueda de las soluciones en ese caso puede ser un poco más complicada. Una característica importante de los sistemas lineales de ecuaciones es que admiten la llamada forma matricial. Esta forma permite representar el sistema usando tres matrices, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1Y} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2Y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{X1} & a_{X2} & \cdots & a_{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_X \end{pmatrix}$$

La primera es la matriz de coeficientes, donde el término a_{ij} representa al coeficiente que acompaña a la j -ésima incógnita de la ecuación i -ésima. La segunda es la matriz de incógnitas, donde cada término se corresponde con una de las Y incógnitas. La tercera matriz es la de términos independientes, donde el cada b_i representa al término independiente de la ecuación i -ésima. (Negrete, 2022).

Esta representación matricial facilita el uso de algunos métodos de resolución, como el método de Gauss, en el que, partiendo de la matriz aumentada (matriz de coeficientes a la que se le ha acoplado la matriz de términos independientes), y aplicando transformaciones lineales sobre las ecuaciones, se quiere llegar a una matriz

de este tipo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_X \end{pmatrix}$$

Una vez que la matriz se ha triangulado, el valor de cada término b_i se corresponderá con el de la incógnita x_i . Si queda alguna fila del tipo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b_X \end{pmatrix}$, con $b_X \neq 0$, el sistema no tendrá solución.

Definición 2.2.23 (Existencia de soluciones.) El teorema de la función inversa según Laguardia (2023) proporciona condiciones suficientes de existencia de solución, de un sistema como (1) con $m = n$. Si sucede que la función vectorial: $\{\{ \text{ecuación} \} : \mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$ es diferenciable con continuidad, es decir, es de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$ y su jacobiano no se anula en ningún punto entonces existe una única solución del sistema anterior. En ese caso existirá una función inversa, y se podrá escribir la solución buscada simplemente como:

$$(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$$

Definición 2.2.24 De acuerdo con Ocampo (2020), una ecuación lineal con n variables (o incógnitas) es una expresión que tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \quad (2.2.1)$$

en donde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son constantes llamadas coeficientes; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son las variables (o incógnitas) y b es el término constante. Si $b = 0$, la ecuación se llama homogénea.

Una solución de una ecuación lineal en n variables, es una n -upla ordenada $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ de números, que satisface la ecuación. Es decir,

$$a_1s_1 + a_2s_2 + a_3s_3 + \cdots + a_ns_n = b \quad (2.2.2)$$

Definición 2.2.25 Según Moreno et ál. (2018), expresan que un sistema de m ecuaciones lineales con n variables es una expresión de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

en donde a_{ij} y b_i con $i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$ son números reales y $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables. Los términos $b_1, b_2, \dots, b_m$ se llaman términos constantes. Si los términos constantes son todos iguales a cero, entonces se dice que el sistema es homogéneo, además se usa la expresión sistema $m \times n$, para referirse a un sistema de m ecuaciones lineales con n variables (Costa, 2021, p.137).

Definición 2.2.26 De acuerdo con Florian y Vélez, (2021), una solución de un sistema $m \times n$, es una n -upla ordenada de números $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ que satisface cada una de las ecuaciones del sistema; es decir, que es solución de cada una de las ecuaciones del sistema.

El conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, está formado por todas las soluciones del sistema (Guerrero, Carrillo y Contreras, 2014). Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes, si tienen el mismo el mismo conjunto solución (Motta, 2018).

Definición 2.2.27 Según Moreno et al. (2018), un sistema de ecuaciones lineales es consistente, si tiene al menos una solución. En caso contrario, el sistema es inconsistente.

Teorema 2.2.4 Para cualquier sistema de ecuaciones lineales, uno y sólo uno de los siguientes enunciados es cierto:

- I) El sistema tiene sólo una solución.
- II) El sistema no tiene solución.
- III) El sistema tiene un número infinito de soluciones.

Definición 2.2.28 De acuerdo con Motta (2018), un sistemas de dos Ecuaciones Lineales con dos Variables (Sistemas 2x2), es de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

en donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$, son constantes y x_1, x_2 , son variables.

Definición 2.2.29 Sistemas de Tres Ecuaciones Lineales con tres Variables (Sistemas 3x3) Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables x_1, x_2, x_3 , tiene la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

en donde a_{ij}, b_i , con $i, j = 1, 2, 3$, son constantes.

Definición 2.2.30 De acuerdo con Romero y Salazar (2017), una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones lineales con n variables, es de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

la matriz aumentada del sistema es,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \quad (2.2.7)$$

en donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ es la matriz de los coeficientes, y } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ es el vector}$$

columna de los términos constantes.

Si se denota $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ al vector columna de las variables, entonces el sistema

$m \times n$ de ecuaciones lineales puede representarse matricialmente por

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2.2.8)$$

Teorema 2.2.5 Cualquier matriz $A_{m \times n}$ es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada. Nota: De este teorema se deduce que si a una matriz $A_{m \times n}$ se le hacen una serie de operaciones elementales entre sus filas, para transformarla en una matriz en forma escalonada, entonces, la matriz escalonada que se obtenga es equivalente por filas a la matriz inicial A (Costa, 2021).

Definición 2.2.31 El proceso de transformar un sistema de ecuaciones lineales en otro cuya matriz aumentada esté en forma escalonada, se llama Eliminación Gaussiana (Florian y Vélez, (2021 p.178).

Definición 2.2.32 De acuerdo con Romero y Salazar (2017), un sistema de m ecuaciones lineales con n variables, el cual se va a resolver usando el proceso de eliminación de Gauss-Jordan. Sea r el número de filas distintas de cero en la forma escalonada reducida (o escalonada) de la matriz de los coeficientes. Este número r es llamado el rango de la matriz. Entonces

1. Si $r = n$, al hacer que la matriz ampliada del sistema llegue a su forma escalonada reducida, la matriz de los coeficientes se transforma en la matriz identidad. El sistema tiene solución única y la forma de la matriz escalonada reducida es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n \end{array} \right]. \quad (2.2.9)$$

2. Si $r < n$, al hacer que la matriz ampliada del sistema llegue a su forma escalonada reducida, la matriz de los coeficientes no se logra transformar en la matriz identidad. Se obtienen menos ecuaciones que variables y el sistema tiene infinitas soluciones. La forma de la matriz escalonada reducida es

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rp} & d_r \end{array} \right] \quad (2.2.10)$$

donde $p = n - r \geq 1$. Hay $n - r$ variables libres, es decir, variables que pueden tomar cualquier valor real.

3. Si la matriz escalonada reducida tiene una fila que represente una ecuación en la cual los coeficientes de las variables son todos iguales a cero y el término constante es distinto de cero, entonces el sistema no tiene solución. Es decir, el sistema es inconsistente. La forma de la matriz escalonada reducida es

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.2.11)$$

Definición 2.2.33 Para Baró (2017), un sistema sobredeterminado es aquel a sistema en el cual el número m de ecuaciones es mayor que el número n de variables. Los sistemas sobredeterminados pueden ser consistentes o inconsistentes. Si un sistema sobredeterminado es consistente, puede tener solución única o infinitas soluciones.

Definición 2.2.34 Se llama sistema subdeterminado a un sistema $m \times n$ en el cual el número m de ecuaciones es menor que el número n de variables. (Baró, 2017, p. 153).

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo, se detallan con precisión los aspectos metodológicos que guiaron el desarrollo de esta investigación. Aquí, se exploran minuciosamente el método, el diseño, el tipo, el enfoque y los procedimientos que dieron forma a este trabajo.

3.2. Método de investigación

Esta investigación adoptó el método cualitativo, el cual se conceptualiza como un término que engloba una serie de métodos y técnicas con un valor interpretativo, dirigidos a describir, analizar y sintetizar el significado de los hechos que se suscitan de manera más o menos específica (Sambrano, 2020).

3.3. Diseño de investigación

La estrategia planificada en este estudio se distingue por su diseño no experimental, centrado en la exploración de la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas. La metodología utilizada adoptó un enfoque transversal, abarcando un período temporal a lo largo del estudio (Mendoza, 2020). De acuerdo con los propósitos planteados, se aplicó un enfoque analítico y descriptivo, profundizando en la comprensión de los principios matemáticos que rigen la teoría de grafos y proporcionando una visión detallada de cómo los sistemas de ecuaciones pueden ser aplicados (Zamora, 2019).

3.4. Tipo de investigación

La investigación adoptó un tipo descriptivo, exploratorio y explicativo. Descriptivo, dado que involucra el análisis e interpretación de la naturaleza actual, así como la composición o el proceso de los fenómenos, según Sambrano (2020). Exploratorio, ya que tiene como objetivo examinar un problema de investigación poco

estudiado, según Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2020). Además, fue explicativo, ya que tiene la intención de analizar las condiciones de un fenómeno, comprender por qué ocurre, y explorar las relaciones entre dos o más variables, según Galarza, (2020).

3.5. Enfoque de investigación

Esta investigación adoptó un enfoque cualitativo, ya que su desarrollo se fundamenta en descripciones, explicaciones, comparaciones y análisis de definiciones, teoremas y demostraciones relacionadas con la teoría de grafos aplicada a la resolución de sistemas de ecuaciones. Según la perspectiva de Hernández, Sampieri y Torres (2018), el enfoque cualitativo se caracteriza por ser una indagación activa que se mueve de manera dinámica entre los hechos y su interpretación.

3.6. Procedimiento de investigación

- En una primera etapa, se llevó a cabo la revisión de documentos pertinentes al tema de investigación con el propósito de comprender los conocimientos existentes y establecer los antecedentes y limitaciones del área de estudio.
- Posteriormente, en un segundo paso, se procedió al desarrollo de la estructura del contenido de la investigación y su correspondiente análisis.
- Para fortalecer la revisión de literatura, se realizó una búsqueda de información en materiales físicos disponibles en bibliotecas universitarias, garantizando así una exhaustiva exploración de los estudios previos sobre el tema.
- Durante todo el proceso, el asesor desempeñó un papel fundamental al brindar orientación y dirección, contribuyendo al enriquecimiento y calidad de la investigación.
- Finalmente, se llevó a cabo una verificación exhaustiva para evaluar el cumplimiento de los objetivos propuestos al inicio de la investigación, asegurando la coherencia y relevancia de los resultados obtenidos.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

Este capítulo está dedicado a teoría de grafo para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas. Además, se presenta la eficacia de enfoques de la teoría de grafos en el abordaje de sistema de ecuaciones polinómicas y finalmente se analiza como la teoría de grafo mejora la eficacia en la solución de dichos sistemas.

4.2. Eficacia de los enfoques de la teoría de grafos en el abordaje de sistemas de ecuaciones polinómicas con respecto a métodos convencionales

La eficacia de los enfoques de la teoría de grafos en el abordaje de sistemas de ecuaciones polinómicas en comparación con métodos convencionales puede depender de varios factores, como la naturaleza específica del sistema de ecuaciones, la complejidad del problema y las habilidades.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Bézout.) Si se tiene un sistema de dos ecuaciones polinómicas en dos variables, el número de soluciones comunes (contadas con multiplicidad) es igual al producto de los grados de los polinomios, a menos que haya factores comunes.

Demostración: Una posible forma de ver una demostración del teorema es considerar la factorización de los polinomios en una variable. Suponga que tienes dos polinomios en x y y :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ g(x, y) &= b_m y^m + b_{m-1} y^{m-1} + \dots + b_0 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Suponga que estos polinomios no tienen factores comunes. Entonces, la multiplicidad de la solución (x_0, y_0) es el producto de las multiplicidades de x_0 en $f(x, y)$

y y_0 en $g(x, y)$.

La multiplicidad de una raíz en un polinomio se relaciona con la derivada del polinomio en esa raíz. Si $f(x_0, y_0) = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. La multiplicidad de (x_0, y_0) como solución común es entonces el MCD de f y g .

Así, el número total de soluciones comunes, contadas con multiplicidad, es igual al grado del MCD de f y g . Este grado puede ser el producto de los grados de los polinomios si no hay factores comunes. Si hay factores comunes, entonces se deben tener en cuenta para obtener el grado del MCD.

Ejemplo 4.2.1 Considere el siguiente sistema de ecuaciones polinómicas en dos variables x e y :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 \\ g(x, y) &= xy - 2 \end{aligned}$$

Se quiere encontrar el número de soluciones comunes para este sistema, contadas con multiplicidad, y aplicar el Teorema de Bézout.

- **Paso 1: Sustituir una ecuación en la otra.** Se puede sustituir la expresión de $g(x, y)$ en la ecuación $f(x, y)$ para obtener una única ecuación en una variable:

$$f(x, y) = x^2 + (2/x)^2 - 1$$

- **Paso 2: Simplificar la ecuación**

$$f(x, y) = x^2 + 4/x^2 - 1$$

- **Paso 3: Encontrar las soluciones** Igualar la ecuación a cero para encontrar las soluciones:

$$x^4 + 4 - x^2 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en x^2 , por lo que se puede resolver usando la fórmula cuadrática.

■ **Paso 4: Resolver la ecuación cuadrática**

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En este caso, $a = 1$, $b = 0$, y $c = 4$. Sustituya estos valores:

$$x^2 = \frac{\pm \sqrt{-16}}{2}$$

Esto lleva a soluciones imaginarias, lo que significa que no hay soluciones reales para x .

■ **Paso 5: Analizar las soluciones**

Dado que no hay soluciones reales para x , no hay soluciones reales para el sistema de ecuaciones original. Por lo tanto, el sistema no tiene puntos en común en el plano real.

El Teorema de Bézout establece que el número de soluciones comunes, contadas con multiplicidad, de dos ecuaciones polinómicas en dos variables es igual al producto de sus grados. En este caso, las ecuaciones son de segundo grado (x^2 y xy), por lo que el número máximo de soluciones comunes sería $2 \times 2 = 4$. Sin embargo, como no hay soluciones reales, el número real de soluciones comunes es 0.

En resumen, el sistema de ecuaciones no tiene soluciones reales en común, y según el Teorema de Bézout, el número de soluciones comunes contadas con multiplicidad es 0.

Ejemplo 4.2.2 Considere el siguiente sistema de ecuaciones polinómicas en dos variables x e y :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9$$

$$g(x, y) = xy - 4$$

Se quiere encontrar el número de soluciones comunes para este sistema, contadas con multiplicidad, y aplicar el Teorema de Bézout.

- **Paso 1: Identificar las ecuaciones.** El sistema consta de dos ecuaciones polinómicas en dos variables x e y .
- **Paso 2: Encontrar las soluciones.** Ahora, resolviendo el sistema y encontrando los puntos (x, y) que satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente.

Sustituya $g(x, y)$ en la ecuación $f(x, y)$:

$$f(x, y) = x^2 + (4/x)^2 - 9$$

Simplifique:

$$f(x, y) = x^2 + 16/x^2 - 9$$

Iguale a cero y resuelva:

$$x^4 - 9x^2 + 16 = 0$$

Factorizando:

$$(x^2 - 1)(x^2 - 16) = 0$$

Esto da dos conjuntos de soluciones:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

Ahora, sustituya estos valores de x en la ecuación original $g(x, y) = xy - 4$ para encontrar los correspondientes valores de y .

Para $x = 1$:

$$g(1, y) = 1 \cdot y - 4 = y - 4$$

Entonces, una solución es $(1, 3)$.

Para $x = -1$:

$$g(-1, y) = -1 \cdot y - 4 = -y - 4$$

Entonces, otra solución es $(-1, 3)$.

Para $x = 4$:

$$g(4, y) = 4 \cdot y - 4 = 4y - 4$$

Entonces, otra solución es $(4, 1)$.

Para $x = -4$:

$$g(-4, y) = -4 \cdot y - 4 = -4y - 4$$

Entonces, otra solución es $(-4, 1)$.

■ Teorema de Bézout

El Teorema de Bézout establece que el número de soluciones comunes, contadas con multiplicidad, de dos ecuaciones polinómicas en dos variables es igual al producto de sus grados. En este caso, las ecuaciones son de segundo grado (x^2 y xy), por lo que el número máximo de soluciones comunes sería $2 \times 2 = 4$.

En este ejemplo concreto, se encuentran cuatro soluciones reales, lo que coincide con el límite máximo predicho por el Teorema de Bézout.

4.2.1. Representación gráfica

La teoría de grafos puede proporcionar una representación visual de las relaciones entre las variables y las ecuaciones en un sistema polinómico. Esto puede ser útil para comprender la estructura del sistema y visualizar patrones. Sin embargo, en sistemas más grandes, la complejidad del grafo puede aumentar considerablemente.

La representación gráfica en la teoría de grafos es una herramienta visual poderosa que puede ayudar a comprender las relaciones y patrones en un sistema de ecuaciones polinómicas. Es interesante tomar en cuenta algunos aspectos para su utilidad, observe:

- **Nodos:** Cada variable o término en una ecuación polinómica se representa como un nodo en el grafo. Por ejemplo, si tienes un sistema de ecuaciones con

las variables x, y, yz , habrá un nodo correspondiente para cada una de estas variables.

- **Ejes:** Los coeficientes de las variables y los términos en las ecuaciones determinan las relaciones entre los nodos. Un eje conecta dos nodos si hay una relación entre las variables correspondientes en las ecuaciones.

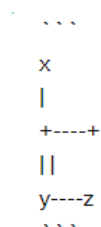
Ejemplo 4.2.3 Suponga que tiene el siguiente sistema polinómico:

$$x + y - z = 5$$

$$2x - y + 3z = 8$$

$$4x + 2y - z = 10$$

Se puede representar este sistema utilizando un grafo, donde cada nodo representa una variable (en este caso, x, y , y z), y las aristas representan las relaciones entre estas variables según las ecuaciones. Representación gráfica del sistema polinómico:



En este esquema: La línea horizontal representa el eje x . La línea vertical representa el eje y . La línea que va hacia fuera de la pantalla (en la dirección positiva) representa el eje z .

En este grafo, los nodos x, y , y z están conectados por aristas que representan las relaciones entre ellas según las ecuaciones del sistema. Cada ecuación contribuye a la conexión entre los nodos correspondientes. Por ejemplo:

- La ecuación $x + y - z = 5$ se traduce en aristas que conectan x, y , y z .
- La ecuación $2x - y + 3z = 8$ contribuye a las conexiones entre x, y , y z .

- La ecuación $4x + 2y - z = 10$ también se refleja en aristas que conectan los nodos correspondientes.

A medida que se aumenta el número de variables y ecuaciones en un sistema polinómico, la complejidad del grafo puede aumentar, pero esta representación gráfica sigue siendo valiosa para visualizar la estructura del sistema. Permite identificar patrones, dependencias y relaciones entre las variables de una manera intuitiva que puede facilitar la comprensión del sistema en su conjunto.

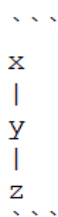
Ejemplo 4.2.4 Se muestra un ejemplo mas manejable. Considere el siguiente sistema polinómico:

$$x - y = 2$$

$$y + z = 4$$

$$x + z = 5$$

Ahora represente este sistema usando un grafo:



En este caso, cada variable (x , y , y z) es un nodo en el grafo, y las ecuaciones determinan las conexiones entre estas variables. Por ejemplo:

- La ecuación $x - y = 2$ se traduce en una arista que conecta x con y .
- La ecuación $y + z = 4$ se traduce en una arista que conecta y con z .
- La ecuación $x + z = 5$ se traduce en una arista que conecta x con z .

Este grafo es bastante sencillo y fácil de entender. Cada nodo está conectado directamente con los otros nodos, y la representación visual ayuda a visualizar las relaciones entre las variables. En sistemas más grandes, la complejidad del grafo puede

aumentar, pero la esencia de representar visualmente las relaciones sigue siendo la misma. Mostrando un último ejemplo.

Ejemplo 4.2.5 Se va a considerar un sistema polinómico ligeramente más complejo:

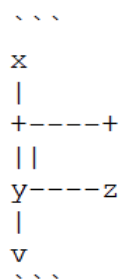
$$x + y - z = 3$$

$$2x - y + 3z = 8$$

$$4x + 2y - 2z = 10$$

$$-x + 3y + z = 5$$

Ahora represente este sistema mediante un grafo:



En este grafo más complejo, cada nodo sigue representando una variable (x , y , z), y las aristas siguen representando las relaciones entre estas variables según las ecuaciones del sistema. Algunos puntos a destacar:

- La ecuación $x + y - z = 3$ contribuye a las conexiones entre x , y , y z .
- La ecuación $2x - y + 3z = 8$ se refleja en las conexiones entre x , y , y z .
- La ecuación $4x + 2y - 2z = 10$ también tiene impacto en las conexiones.
- La ecuación $-x + 3y + z = 5$ se traduce en una conexión adicional de y a z .

Este grafo ilustra cómo las variables están interconectadas en función de las ecuaciones. A medida que se agregan más ecuaciones y variables, el grafo puede volverse más complejo, pero la representación gráfica sigue siendo una herramienta útil para comprender visualmente las relaciones en el sistema polinómico.

4.2.2. Eficiencia computacional

En algunos casos, los métodos basados en grafos pueden ofrecer eficiencia computacional, especialmente cuando se trata de sistemas con patrones repetitivos o estructuras particulares. Sin embargo, para sistemas pequeños o simples, los métodos convencionales pueden ser igualmente eficientes o incluso más rápidos.

La eficiencia computacional en el contexto de métodos basados en grafos versus métodos convencionales puede depender en gran medida de la naturaleza específica del problema y de la cantidad de datos involucrados. Aquí hay algunas consideraciones adicionales:

- **Tamaño y complejidad del sistema:**

- **Grafos:** Los métodos basados en grafos son particularmente eficientes cuando se trata de sistemas grandes y complejos con patrones repetitivos o estructuras de red bien definidas. Los grafos son ideales para modelar relaciones y dependencias entre entidades en tales casos.
- **Convencionales:** Para sistemas pequeños o simples, donde no hay una red compleja de relaciones, los métodos convencionales pueden ser más directos y potencialmente más rápidos.

Ejemplo 4.2.6 Se proporciona un ejemplo sencillo utilizando Python y la biblioteca SymPy para la manipulación simbólica y resolución de ecuaciones polinómicas. En este ejemplo, se resuelve un sistema de ecuaciones polinómicas y luego se visualiza la representación gráfica del grafo asociado.

Primero, tener SymPy:

```
bash Copy code  
  
pip install sympy
```

Ahora, utilizando el siguiente código como ejemplo:

```
python Copy code

import sympy as sp
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

# Definición de variables simbólicas
x, y = sp.symbols('x y')

# Definición de ecuaciones polinómicas
eq1 = sp.Eq(x**2 + y**2, 1)
eq2 = sp.Eq(x*y, 0)

# Resolución del sistema de ecuaciones
sol = sp.solve((eq1, eq2), (x, y))

# Mostrar solución
print("Solución del sistema de ecuaciones:")
print(sol)

# Crear grafo
G = nx.Graph()

G.add_nodes_from([str(expr) for expr in [x, y, x**2 + y**2, x*y]])
G.add_edges_from([(str(x), str(x**2 + y**2)), (str(y), str(x**2 + y**2))])

# Visualizar el grafo
pos = nx.spring_layout(G)
nx.draw(G, pos, with_labels=True, node_size=700, node_color="skyblue",
plt.title("Grafo del Sistema de Ecuaciones Polinómicas")
plt.show()
```

En este ejemplo, se resuelve un sistema de dos ecuaciones polinómicas ($x^2 + y^2 = 1$ y $xy = 0$) y se muestra la solución. Luego, se construye un grafo con nodos representando las variables y las expresiones polinómicas, y las aristas representando las

relaciones entre ellas. Finalmente, se visualiza el grafo utilizando NetworkX y Matplotlib.

Este es un ejemplo básico, pero en sistemas más grandes, la visualización del grafo puede volverse más útil para comprender la estructura del sistema polinómico y aplicar estrategias eficientes para su resolución.

En este momento se resuelve el sistema polinómico por métodos convencionales, llámese: analíticos, entre otros.

Ejemplo 4.2.7 Resolver el ejemplo anterior por métodos convencionales

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$xy = 0$$

La primera ecuación, $x^2 + y^2 = 1$, representa la ecuación de un círculo en el plano xy con radio 1 y centro en el origen.

La segunda ecuación, $xy = 0$, indica que el producto de x e y es igual a cero. Esto implica que al menos una de las variables, x o y , debe ser cero para que la ecuación sea verdadera.

Ahora considere las posibles soluciones:

1. Si $xy = 0$, entonces al menos una de las variables debe ser cero. Esto significa que las soluciones incluyen puntos donde $x = 0$ o $y = 0$.
2. Si $x = 0$, la primera ecuación se convierte en $y^2 = 1$, lo que implica $y = \pm 1$.
3. Si $y = 0$, la primera ecuación se convierte en $x^2 = 1$, lo que implica $x = \pm 1$.

Entonces, las soluciones del sistema son los puntos $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Estos puntos son las intersecciones entre el círculo unitario y las líneas $x = 0$ e $y = 0$. En este caso, el círculo y las líneas se cortan en los ejes x e y , y las soluciones son los

puntos donde estas intersecciones ocurren.

La elección entre el método convencional y la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas depende de la naturaleza del sistema y las preferencias del solver. Cada método tiene sus ventajas y desventajas, y la elección puede variar según el contexto y la complejidad del sistema. Porque seria mas complejo resolver el ejemplo 4.2.5 a diferencia de este ejemplo 4.3.1 que es realmente más manejable.

4.3. Uso de la teoría de grafos en la mejora de la eficiencia de las soluciones de sistemas de ecuaciones polinómicas

La teoría de grafos no se utiliza directamente para la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas, ya que estos son problemas algebraicos. Sin embargo, los grafos pueden ser útiles en la representación y análisis de ciertos aspectos relacionados con sistemas algebraicos, y en algunos casos específicos, pueden contribuir a mejorar la eficiencia en la solución de estos problemas.

En este caso se presentan algunas maneras en las que la teoría de grafos puede ser relevante:

1. **Grafos de intersección:** Puedes representar un sistema de ecuaciones polinómicas mediante un grafo de intersección, donde los nodos representan las soluciones y las aristas conectan soluciones que cumplen con varias ecuaciones simultáneamente. Este enfoque puede ayudar a visualizar y entender las relaciones entre las soluciones, lo que podría ser útil para encontrar patrones o simplificar el sistema.
2. **Grafos de dependencia:** Puedes utilizar grafos dirigidos para representar las dependencias entre las variables en un sistema de ecuaciones. Cada variable es un nodo, y una arista desde la variable X hasta la variable Y indica que la ecuación que involucra a Y depende de la variable X . Analizar este tipo de

grafo puede ayudar a identificar estrategias eficientes para resolver el sistema de ecuaciones, como la eliminación de variables o la resolución por bloques.

Ahora bien, aunque no se utilice constantemente la teoría de grafos, esta puede mejorar la eficiencia en la solución de sistemas de ecuaciones polinómicas de varias maneras, especialmente en términos de visualización, identificación de patrones y optimización de algoritmos. Ahora se describen algunos aspectos en los que la teoría de grafos puede contribuir a mejorar la eficiencia computacional:

- 1. Visualización Estructural:** La representación gráfica de las relaciones entre variables y ecuaciones mediante grafos proporciona una visualización clara de la estructura del sistema. Esto puede ayudar a comprender la complejidad y a identificar patrones visuales, lo que a su vez puede guiar la selección de estrategias de resolución.
- 2. Identificación de Subestructuras:** Al analizar el grafo, es posible identificar subgrafos o subestructuras que podrían simplificar el sistema o permitir estrategias de resolución más eficientes. Por ejemplo, identificar componentes conectados puede ayudar a dividir el problema en subproblemas más manejables.

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En el presente capítulo, se ponen en evidencia el conjunto de conclusiones obtenidas en esta investigación, las cuales guardan estrecha relación con los objetivos planteados en la misma, al igual que se destacan otros elementos que generan posibles líneas de investigación.

5.2. Conclusiones finales

Este trabajo se enfoca en el estudio de la teoría de grafos para la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas. En este sentido, las siguientes conclusiones han sido alcanzadas:

- La representación gráfica de sistemas polinómicos mediante grafos se utilizó como una herramienta visual poderosa para comprender las relaciones entre las variables y ecuaciones. Este análisis reveló que, mientras que los métodos basados en grafos pueden ser más eficientes para sistemas grandes y complejos, los métodos convencionales son directos y efectivos para sistemas más simples.
- La aplicación exitosa de la teoría de grafos para mejorar la eficiencia en la solución de sistemas de ecuaciones polinómicas destacó la utilidad de representar estos sistemas mediante grafos de intersección y dependencia. Esta representación facilitó la visualización de relaciones entre soluciones y variables, evidenciando un avance significativo en eficiencia computacional. En conjunto, la teoría de grafos demostró ser un recurso valioso para mejorar la resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas.

En cuanto, al aplicar la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas, se logró representar de manera efectiva las relaciones entre las variables mediante nodos y aristas ponderadas. Este enfoque estructurado permitió analizar el sistema de manera eficiente, identificando patrones y propiedades que facilitaron la

resolución. Se emplearon algoritmos de grafos para explorar y optimizar las soluciones, demostrando que la teoría de grafos constituye una herramienta valiosa y logró simplificar significativamente el proceso de abordar problemas matemáticos complejos.

5.3. Líneas futuras de investigaciones.

Tras analizar este tema de investigación sobre las aplicación de la teoría de grafos para resolver sistemas de ecuaciones polinómicas, se presentan algunas líneas de investigación para futuros trabajos:

- Optimización de Algoritmos de Resolución de Ecuaciones Polinómicas mediante Estructuras de Grafos Acíclicos.
- Análisis de la Eficiencia Computacional de Algoritmos Cuánticos para la Resolución de Ecuaciones Polinómicas Representadas por Grafos.
- Optimización de Algoritmos de Resolución de Ecuaciones Polinómicas mediante Estructuras de Grafos Acíclicos.

Referencias

- Asensio Ferrero, S. (2022). Sobre la conjetura de la sensibilidad y su resolución vía teoría de grafos.
- Baró, C. (2017). Multicausalidad y sobredeterminación de la violencia. Intercambios, papeles de psicoanàlisis/Intercanvis, papers de psicoanàlisi, (38), 77-84.
- Braicovich, T. C. (2022). Enseñanza de Grafos: Un breve recorrido en distintos niveles educativos. Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18(65).
- Cano, L., Domínguez, P., & Vázquez, J. (2020). Ejemplos de codificación de la dinámica de una función racional en un árbol topológico.
- Costa, O. S. (2021). Elementos de análisis dimensional (Vol. 36). Universidad Almería.
- Cubria, F. (2023). Espectro complementario de digrafos, Vilmar Trevisan, Universidad Federal de Rio Grande do Sul. Doctorado en Matemática.
- Esquivel Domínguez, D. C. (2019). Construcción de la protesta feminista en hashtags: aproximaciones desde el análisis de redes sociales. Comunicación y medios, 28(40), 184-198.
- Florian, A., & Vélez, J. (2021). Análisis de desempeño de algoritmos de regresión usando Scikit-learn. Revista MODUM, 3.
- Galarza, C. A. R. (2020). Los alcances de una investigación. CienciAmérica: Revista de divulgación científica de la Universidad Tecnológica Indoamérica, 9(3), 1-6.
- Gomez Gutierrez, V. (2021). Una introducción a las bases de Groebner. Editorial : Universidad de Sonora, Revistas UNISON.

- Guerrero, C., Carrillo, J., & Contreras, L. C. (2014). Problemas de Sistemas de Ecuaciones Lineales en libros de texto de 3° ESO.
- Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2020). Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. McGraw-hill.
- Jean, M. K. J. P. (2022). La teoría de grafos y su importancia. UCE Ciencia. Revista de postgrado, 10(3).
- Laguardia, J. J. (2023). Teoría básica de conjuntos y Sistemas de ecuaciones.
- Lorenat, J. (2023). The Artistic, Algebraic, and Severe Russian Genius Arthur Cayley. The Mathematical Intelligencer, 45(2), 139-143.
- López Acosta, L. A. (2023). Análisis algebraico de Viète y Descartes: La ecuación paramétrica y la algebrización de la geometría. Un acercamiento epistemológico y lingüístico-multisemiótico.
- Macías Piguave, A. E. (2022). Grafos Acíclicos Dirigidos (DAGs) y reproducibilidad de estudios observacionales (Master's thesis, Universitat Politècnica de Catalunya).
- Motta, M. E. C. (2018). Los sistemas de ecuaciones lineales como instrumento de modelización en la secundaria (Doctoral dissertation, Pontificia Universidad Católica del Perú-CENTRUM Católica (Peru)).
- Moreno, O. E., Gallo, H. G., Aguello, M. A., y Herrera, C. G. (2018). La Construcción del Concepto Sistemas de Ecuaciones Lineales en R^3 desde la Prespectiva de la Teoría APOE.
- Morelli, A. B., & Cunha, A. L. (2021). Verificação de vulnerabilidades em redes de transporte: uma abordagem pela teoria dos grafos. Transportes, 29(1), 161-172.

- Negrete Madera, L. V. (2022). Propiedades de grafos, hipergrafos y su complejidad algorítmica.
- Ocampo, E. D. (2020). Análisis de las propiedades de los S-sistemas potencialmente no homogéneos con las ecuaciones lineales homogéneas.
- Onofre Muñoz, P. A. (2020). Dimensionamiento óptimo de generación distribuida en redes de distribución basado en la teoría de grafos (Bachelor's thesis).
- Onofre Muñoz, P. A. (2020). Dimensionamiento óptimo de generación distribuida en redes de distribución basado en la teoría de grafos (Bachelor's thesis).
- Ortigosa, P. P. (2022). Teoría de grafos. In Desarrollo de destrezas en resolución de problemas de olimpiadas matemáticas (pp. 65-84). Universidad de La Rioja.
- Ortín, D. M. (2019). Bases de Groebner y Aplicaciones en Teoría de Grafos (Doctoral dissertation, Universidad de Zaragoza).
- Ortíñez Casanova, E. G. (2022). Análisis estructural de nanocebollas crecidas por radiación de microondas. Instituto de Ingeniería y Tecnología.
- Parlanti, T. S., Catania, C. A., & Moyano, L. G. (2023). Teoría de Grafos para la Identificación de Nodos Maliciosos en la Red. In XXVIII Congreso Argentino de Ciencias de la Computación (CACIC)(La Rioja, 3 al 6 de octubre de 2022).
- Romero, M. V. C., & Salazar, M. M. H. (2017). Aprendizaje cooperativo en las ecuaciones lineales. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, (75), 53-58.
- Sambrano, J. (2020). Métodos de investigación. Alpha editorial.

Ventura, F. C. (2015). La teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del laboratorio de investigación e innovación pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014. Pasco: Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión.

Anexos

Anexo A.

Para realizar esta investigación fue necesario completar el siguiente cronograma de estudios.

Cronograma de estudios	
Entrega del anteproyecto.	10-12 Nov., 2023.
Evaluación del Anteproyecto.	13-15 Nov., 2023.
Observaciones de los jurados.	16-23 Nov., 2023.
Elaboración del proyecto completo	26 Dic., 2023.
Entrega de tesis a los jurados	27-28 Dic., 2023.
Presentación de tesis	4-5 Enero, 2023
Entrega de tesis	9-12 Feb., 2023

Anexo B.

Como parte de esta investigación, se calcula el inventario de recibos de gastos del trabajo de maestría.

Presupuesto.			
Descripción.	Cantidad.	Costo por unidad.	Costo
Impresión.	5	560	2800
Encuadernación.	5	640	3200
Transporte.	4	1300	5200
Compra de laptop	1	31300	31300
Total			RD \$42500,00