

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de
Maestría en Matemáticas

Título

Análisis del modelo Matemático tipo Sine-Gordon para la predicción del
rendimiento de señal en cables de fibra Óptica

Sustentante

Julio Alberto Castillo Guzmán

Asesor

MA. Danny Daniel Manzueta Pérez

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

TÍTULO

ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO TIPO SINE-GORDON PARA LA
PREDICCIÓN DEL RENDIMIENTO DE SEÑAL EN CABLES DE FIBRA
ÓPTICA.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en la investigación, son responsabilidad exclusiva del sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han incluido respetando el derecho de autor.

Título

Análisis del modelo Matemático tipo Sine-Gordon para la predicción del
rendimiento de señal en cables de fibra Óptica

Tesis presentada por **Julio Alberto Castillo Guzmán**, para la obtención del
grado de Magister en Matemáticas.

Composición del tribunal evaluador

Dr. Victor Gálan

Jurado de metodología

MA. Leomar Reyes

Jurado de contenidos

MA. Angela Merejo

Jurado de redacción

Lic. Yuderka Reyes

Directora de postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos	VI
Dedicatorias	VII
Resumen	VIII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	1
1.2.1. Antecedentes históricos	1
1.2.2. Antecedentes académicos	4
1.3. Planteamiento del problema	5
1.4. Justificación	6
1.5. Objetivos	7
1.5.1. Objetivo general	7
1.5.2. Objetivos específicos	8
1.6. Alcances y límites	8
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	9
2.1. Introducción	9
2.2. Marco teórico	9
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	17
3.1. Introducción	17
3.2. Método de investigación	17
3.3. Diseño de investigación	17
3.4. Tipo de investigación	17
3.5. Enfoque de investigación	18
3.6. Procedimientos de investigación	18

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	19
4.1. Introducción	19
4.2. Modelo Sine-Gordon para predecir el comportamiento de señales en cable de fibras ópticas	19
4.3. Predicciones del modelo tipo Sine-Gordon para mejorar el diseño y la optimización de cables de fibra óptica	29
4.4. Influencia de los parámetros claves, como la longitud del cable, la aten- nuación y la dispersión, en la predicción del rendimiento de señal uti- lizando el modelo del tipo Sine-Gordon	33
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	38
5.1. Introducción	38
5.2. Conclusiones finales	38
5.3. Líneas futuras de investigación	39
Referencias	40
Anexos.	I
Anexo A. Cronograma	II
Anexo B. Presupuesto	II
Anexo C. Simbología Matemática.	III

Agradecimientos

A Dios: Agradezco en primer lugar a Dios, quien es el proveedor del conocimiento por este logro y por guiarme durante todo el proceso, dándome la perseverancia necesaria para permanecer firme hasta alcanzar mis objetivos.

Al asesor: También agradezco al asesor de esta tesis, el MA. Danny Daniel Manzueta Pérez, por su ardua labor en este proceso, gracias por su entrega, dedicación, colaboración y orientaciones pertinentes para la culminación de este proyecto de investigación a pesar de las dificultades.

Universidad Tecnológica del Cibao Oriental: Mis agradecimientos también van para la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO), por abrirme las puertas como institución para continuar con mi formación académica.

A los maestros: Gracias a cada maestro que de una manera u otra contribuyeron al desarrollo de este proyecto, convirtiéndose en un escalón importante para llegar a la cima.

Compañeros de estudio: También agradezco a todos mis compañeros de estudio por los momentos compartidos durante todo el trayecto, de manera especial para los integrantes del equipo de trabajo del cual forme parte, por sus muestras de aprecio de manera desinteresada hacia mi persona en estos dos años de estudio en particular para mi compañero José Manuel Basora quien mostró ser una excelente persona, solidario, generoso y amigable, sin duda un hermano para mí.

Al MESCyT: Por último, al MESCyT por suministrarme el apoyo económico con una beca completa para la realización de esta maestría.

Julio Alberto Castillo Guzmán

Dedicatorias

A Dios: Esta tesis la quiero dedicar en primera instancia a Dios, por todas las bendiciones que ha manifestado hacia mí, tengo la convicción plena que sin él no hubiera sido posible este nuevo peldaño alcanzado.

Hijos: A mis hijos Ricardo Junior, Justin Albert y Alejandro por representar en mí una motivación para cada día luchar por alcanzar mis sueños.

Esposa: A mi esposa Lirdanya González quien ha colaborado de manera especial en todo este proceso, dándome su apoyo y su amor incondicional en los momentos difíciles aun cuando representaba un sacrificio para todos.

Padres: También quiero dedicarla a mis padres Julio Cesar Castillo y Mónica Guzmán quienes desde temprana edad me educaron en valores y siempre me han motivado a luchar para alcanzar mis metas.

Hermanos: A mis hermanos Carolina Castillo y Leonel Castillo por su apoyo en este trayecto, por celebrar mis triunfos y hacerlos suyos también.

Julio Alberto Castillo Guzmán

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Julio Alberto Castillo Guzmán. MA. Danny Daniel Manzueta Pérez

Sustentante

Asesor

RESUMEN

La investigación “Análisis del Modelo Matemático tipo Sine-Gordon para la Predicción del Rendimiento de Señal en Cables de Fibra Óptica” tiene como objetivo general analizar el modelo Sine-Gordon en la predicción del rendimiento de señal en cables de fibras ópticas. Los objetivos específicos incluyen la evaluación del modelo, la aplicación de predicciones para mejorar el diseño de cables y el análisis de parámetros clave en la predicción del rendimiento de señal.

La metodología empleada es de tipo analítica, con un enfoque analítico- exploratorio y un diseño transversal. La investigación es descriptiva y se realiza bajo un enfoque cualitativo, centrándose en el análisis del modelo Sine-Gordon para la predicción de señales en cables de fibra óptica.

En los hallazgos, se destaca el éxito de la exploración detallada del modelo Sine-Gordon, demostrando su aplicabilidad en la descripción de la propagación de ondas electromagnéticas en fibras ópticas. Se establecen conexiones con las leyes fundamentales del electromagnetismo y se realizan predicciones valiosas para mejorar el diseño y la optimización de cables de fibra óptica. La investigación proporciona una comprensión profunda de aspectos clave, como la modulación de la amplitud, interacciones no lineales, efectos de dispersión y formación de solitones en el comportamiento de las señales ópticas, ofreciendo perspectivas valiosas para el avance en sistemas de comunicación óptica.

Palabras clave: Predicción. Rendimiento. Señal. Cables de fibra óptica. Modelo matemático tipo Sine-Gordon. Longitud del cable. Atenuación. Dispersión.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

En este capítulo se presentan los antecedentes históricos y académicos de la ecuación de Sine-Gordon. Además incluye el planteamiento del problema, la justificación y los objetivos, en la que se describe la importancia de la investigación. También están incluidos los límites y alcance de esta.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes históricos

Biografía de Walter Gordon

Walter Gordon fue hijo del empresario Arnold Gordon y de su esposa Bianca Gordon. La familia se mudó a Suiza en sus primeros años. En 1900 asistió a la escuela en San Gallen y en 1915 inició sus estudios de matemáticas y física en la universidad de Berlín. Recibió el grado de Doctor en 1921 de Max Planck. En 1922, estando aun en la universidad de Berlín, Gordon se convirtió en el asistente de Von Laue. (López, 2022).

En 1925, trabajó por unos meses en la Universidad de Manchester con Willian Lawrence Bragg y luego en la sociedad Wilhem Kaiser para química de fibras en Berlín. En 1926 se mudó a Hamburgo donde obtuvo la en 1929. En 1930 se convirtió en profesor. Se casó con una mujer de Hamburgo, Gertrud Lobbenberg, en 1932. Se mudó a Estocolmo en 1933 debido a la situación política de Alemania. Estando en la Universidad de Estocolmo trabajó en mecánica y física matemática. Entre las obras más conocidas está la ecuación de Klein-Gordon propuesta junto con Oskar Klein para describir partículas cuánticas en el marco de la teoría de la relatividad. (Vera, 2020).

Desarrollo histórico de la ecuación Sine-Gordon

La ecuación de Sine-Gordon constituye una ecuación diferencial parcial hiperbólica no lineal en un espacio bidimensional temporal, que incorpora el operador de d'Alembert y la función seno de una variable desconocida. Inicialmente propuesta por Edmond Bour en 1862 durante la investigación de superficies con constante de curvatura negativa, se reveló como la ecuación de Gauss - Codazzi para superficies de curvatura -1 en un espacio tridimensional. Posteriormente, fue redescubierta por Frenkel y Kontorova en 1939 en su exploración de la distribución cristalina, conocida como el modelo de Frenkel - Kontorova. La ecuación ganó notoriedad en la década de 1970 debido a la presencia de soluciones de solitón, generando un considerable interés en la comunidad científica. (Merino, 2021).

El nombre de ecuación de Sine-Gordon, o en italiano Sine-Gordon (pero a menudo utiliza la forma inglesa) es un juego de palabras sobre la bien conocida, en física, la ecuación de Klein-Gordon.

Esta ecuación está dada por:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \omega^2 \sin \theta$$

La ecuación de Sine - Gordon del campo de Euler - Lagrange y la densidad del lagrangiano se da mediante el uso de la expansión en la serie de Taylor del coseno en el lagrangiano se puede reescribir como el lagrangiano de los términos de Klein - Gordon orden superior. Otra transformación de superficies pseudosféricas es la Transformada de Lie introducida por Sophus Lie en 1879, que corresponde a las transformaciones de Lorentz en términos de las coordenadas del cono de luz, por lo que la ecuación seno - Gordon es invariante de Lorentz. (López, 2022).

John Scott Russell y Korteweg y de Vries (KdV)

En 1834, el ingeniero escocés John Scott Russell observó por primera vez el fenómeno que ocupa este estudio. Él iba cabalgando cerca del canal de Edimburgo, Escocia, cuando observó que una lancha se detuvo repentinamente y la masa de agua que iba delante de la proa se separó de la misma, tomó una forma elevada, redonda y

además se desplazó a lo largo del canal sin cambiar de velocidad ni de forma. Russell, siguió esta onda por varias millas hasta que ésta se perdió entre las curvas del canal. (Zang, 2022).

A esta onda él le llamó: la gran onda solitaria. Russell continuó después realizando experimentos para producir este tipo de ondas en la parte trasera de su casa, así como en el canal de Edimburgo, lo que le llevó a perfeccionar su técnica de reproducirlas, y cada vez que hacía esto se quedaba atónito por este tipo de ondas, les llamó: ondas grandes de traslación. También descubrió que en aguas poco profundas las ondas solitarias se pueden propagar de forma constante y que la longitud de onda es grande al compararla con la profundidad del agua. Asimismo, realizó cálculos por los que descubrió que la amplitud es proporcional a la velocidad de la onda, que el volumen del agua en la onda era igual al del agua desplazada, y fue capaz obtener la fórmula de la velocidad de la onda, como se muestra en la ecuación. (Marin, 2022).

$$v = \sqrt{g(h + \eta)}$$

donde η es la altura de la cresta; h , la profundidad del agua y g , la gravedad.

Sin embargo, al principio, sus reportes e investigaciones no tuvieron gran éxito, pues no concordaban con las investigaciones de Bernulli o Newton. Russell murió sin saber que muchos años después sus investigaciones sí iban a tener resultado. (Merino, 2021). Ellos trabajaron con la ecuación,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Fibra Óptica

El desarrollo de la fibra óptica como tecnología de transmisión de datos tiene sus raíces en investigaciones y experimentos realizados a lo largo del siglo XX (Fernández, 2019). Sin embargo, el hito más significativo en la historia de la fibra óptica se puede ubicar en la década de 1970.

En 1970, el físico británico Sir Charles Kao, junto con el físico estadounidense George A. Hockham, publicó un artículo en el que proponían el uso de fibras ópticas de vidrio para la transmisión de información. Kao fue galardonado con el Premio Nobel de Física en 2009 por sus contribuciones pioneras en la transmisión de luz a través de fibras ópticas para comunicaciones de larga distancia (Alustiza, et al., 2022).

En 1977, se estableció la primera conexión telefónica por fibra óptica en los Estados Unidos. A partir de entonces, la tecnología de fibra óptica se fue desarrollando y mejorando continuamente (Brown y Williams, 2018). A medida que avanzaba la década de 1980, la fibra óptica se volvió más común en las redes de comunicación y comenzó a desplazar gradualmente a los cables de cobre en muchas aplicaciones.

Hoy en día, la fibra óptica es la columna vertebral de las redes de comunicación de alta velocidad en todo el mundo, utilizada para transmitir datos a velocidades extremadamente altas en telecomunicaciones, Internet de alta velocidad, transmisión de datos a larga distancia y otras aplicaciones (Tello, 2023)

1.2.2. Antecedentes académicos

Según Chaves(2012) en su artículo “Solitones kink y antikink en la ecuación de Sine-Gordon” para la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, en el cual propuso utilizar un modelamiento matemático para dar solución a la ecuación de Sine-Gordon en dicho trabajo concluyó que dicha ecuación que se caracteriza por diferencial no lineal cuyas soluciones reflejan la existencia de solitones tipo kink y solitones tipo antikink. Además que la característica entre estas soluciones es que existe una diferencia en el giro o rotación en sentidos contrarios a las agujas del reloj.

Según el estudio de Salas (2020) sobre “los solitones en la ecuación de Sine-Gordon” para la Universidad de Sevilla, cuyo objetivo era profundizar en el análisis de dicha ecuación, se llega a la conclusión de que esta ecuación no lineal puede modelar una cadena de péndulos idénticos conectados mediante un muelle torsional a lo

largo de su eje común de oscilación y que utilizando un método pseudo-potencial se obtienen soluciones kink y antikink.

Por su parte, Cruz (2022) en su investigación sobre “Trasnformación de Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon, superficie pseudo-esférica y los solitones” de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo concluyo que para encontrar soluciones de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon se pueden utilizar herramientas de la geometría diferencial como la Transformación de Bäcklund, la cual en este caso sirvió para determinar la solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon y que ademas mediante un análisis se obtuvo una relación de la solución con la superficie llamada “pseudoesfera”.

1.3. Planteamiento del problema

En la actualidad, los cables de fibra óptica son ampliamente preferidos en las telecomunicaciones por su eficiencia en la propagación de señales, alta capacidad y velocidad de datos a largas distancias sin pérdida significativa. A pesar de estas ventajas, en ciertas condiciones, como ambientes adversos, los cables de fibra óptica pueden experimentar degradaciones en el rendimiento de la señal, afectando la calidad y el alcance de la transmisión. Para abordar este desafío, se recurre a modelos matemáticos, como el modelo Sine-Gordon, que desempeña un papel crucial en la verificación de la estabilidad y el rendimiento de estos cables, asegurando así su óptimo funcionamiento en diversos contextos y escenarios.

El modelo matemático Sine-Gordon emerge como una herramienta clave en la descripción de la propagación de pulsos de luz en cables de fibra óptica (López, 2022), destacándose por su novedad y relevancia en este contexto. La intriga radica en la evaluación de la idoneidad de este modelo para representar y predecir con precisión el comportamiento de las señales en condiciones reales de transmisión óptica. Esta indagación se vuelve esencial al considerar el dinámico entorno en el que operan los cables de fibra óptica, ya que diversos factores pueden influir en la integridad de las

señales, por ende, explorar hasta qué punto el modelo Sine-Gordon se ajusta a las complejidades de estas condiciones reales no solo constituye un desafío intrigante en los estudiantes, sino que también contribuyó significativamente a la comprensión y mejora de la eficacia de las comunicaciones ópticas.

La complejidad inherente a la representación y predicción precisa del comportamiento de las señales en cables de fibra óptica en condiciones reales genera obstáculos notables. La inquietud principal radica en la aplicación efectiva de este modelo novedoso en un entorno práctico, considerando las numerosas variables y factores que impactan la transmisión óptica. La necesidad de superar estos desafíos resalta la importancia de la investigación, que no solo busca aportar al conocimiento científico sino también proporcionar herramientas aplicables y prácticas para el diseño y optimización de sistemas de fibra óptica.

1. ¿En qué medida el modelo matemático tipo Sine-Gordon es adecuado para representar y predecir el comportamiento de las señales en cables de fibra óptica en condiciones reales?
2. ¿Cómo pueden ser utilizadas las predicciones del modelo tipo Sine-Gordon para mejorar el diseño y la optimización de cables de fibra óptica con el fin de maximizar el rendimiento de señal?
3. ¿Cuál es la influencia de los parámetros claves, como la longitud del cable, la atenuación y la dispersión, en la predicción del rendimiento de señal utilizando el modelo tipo Sine-Gordon?

1.4. Justificación

La investigación sobre el “Análisis del modelo Matemático tipo Sine-Gordon para la predicción del rendimiento de señal en cables de fibra Óptica” reviste una relevancia extraordinaria en el contexto de la República Dominicana, ofreciendo aportes significativos a diversos niveles. En primer lugar, en el ámbito nacional, el desarrollo de un entendimiento más profundo de la eficacia y aplicabilidad de este modelo en

condiciones reales de transmisión óptica puede contribuir directamente a la mejora y expansión de las infraestructuras de comunicación en el país. La implementación de ajustes y estrategias derivadas de este análisis podría resultar en redes de fibra óptica más eficientes y resistentes a las condiciones variables del entorno dominicano.

A nivel comunitario, la investigación tiene el potencial de impactar positivamente en la calidad de los servicios de telecomunicaciones, beneficiando a la población al mejorar la estabilidad y la eficiencia de las transmisiones ópticas. La República Dominicana, al ser un país en constante desarrollo tecnológico, se vería fortalecida por avances en la optimización de las redes de fibra óptica, proporcionando una base más sólida para el acceso a la información y la comunicación.

En cuanto a la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental - UTECO, esta investigación refuerza el compromiso con la excelencia académica y la generación de conocimiento aplicado. Al abordar un tema de vanguardia en el campo de las telecomunicaciones y la matemática aplicada, la UTECO se posiciona como un centro de investigación innovador que no solo contribuye al avance del conocimiento científico, sino que también cumple un papel crucial en el desarrollo tecnológico de la región y del país. La institución se beneficia al consolidar su reputación como un referente en investigación de calidad y aplicada, atrayendo así a estudiantes y profesionales interesados en contribuir al progreso tecnológico y científico de la República Dominicana.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Analizar el modelo matemático tipo Sine-Gordon en la predicción del rendimiento de señal en los cables de fibras ópticas.

1.5.2. Objetivos específicos

1. Evaluar en que medida el modelo matemático tipo Sine-Gordon es adecuado para representar y predecir el comportamiento de las señales en cables de fibras ópticas.
2. Identificar como pueden ser utilizadas las predicciones del modelo tipo SineGordon para mejorar el diseño y la optimización de cables de fibra óptica.
3. Analizar la influencia de los parámetros claves, como la longitud del cable, la atenuación y la dispersión, en la predicción del rendimiento de señal utilizando el modelo del tipo Sine-Gordon.

1.6. Alcances y límites

La investigación actual se focalizará en el ámbito de las matemáticas aplicadas, específicamente en el campo de derivadas parciales no lineales, con un enfoque central en la ecuación Sine-Gordon.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1. Introducción

En este capítulo, se exponen las definiciones fundamentales y los resultados esenciales relacionados con el análisis del Modelo Matemático Tipo Sine-Gordon en la predicción del rendimiento de señal en cables de fibra óptica.

2.2. Marco teórico

Definición 2.2.1 (Un solitón.) Es una onda solitaria que preserva asintóticamente su forma y su velocidad bajo interacciones no lineales con otras ondas solitarias, o de manera más general, con otra perturbación localizada arbitrariamente. (Gómez, 2022). En este sentido se tienen diferentes tipos de solitones:

- Solitones Korteweg-de Vries (KdV): Estas ecuaciones describen solitones en contexto de las ondas no lineales en medios unidimensionales como canales de agua o plasmas. La ecuación KdV tiene la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Donde $u(x, t)$ es la función que representa la altura de la onda en función de la posición x y el tiempo t .

- Solitones de Sine-Gordon: Estos solitones se encuentran en el contexto de la teoría de campos no lineales. La ecuación de Sine-Gordon es:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \sin(\theta) = 0$$

Donde $\theta(x, t)$ es la función que describe la perturbación en el campo.

- Solitones de Schrödinger: En el ámbito de la mecánica cuántica, la ecuación de Schrödinger no lineal admite solitones. La forma general es:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi + g|\psi|^2\psi = 0$$

Donde $\psi(x, t)$ es la función de onda y $V(x)$ es el potencial.

Definición 2.2.2 (Las pseudoesferas.) Son superficies de revolución generadas por la rotación de una curva tratriz de su asíntota. Una curva tratriz se genera cuando un objeto arrastra otro, de manera que su distancia de separación se mantiene constante. (Revuelta, 2023).

Las transformaciones de Bäcklund proporciona un algoritmo para generar familias de soluciones de la Sine-Gordon resolviendo un par de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 2.2.3 (Transformaciones de Bäcklund.) Las transformaciones de Bäcklund son un conjunto de técnicas matemáticas utilizadas en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) para generar nuevas soluciones a partir de soluciones conocidas. Estas transformaciones fueron introducidas por el matemático sueco Bäcklund en la segunda mitad del siglo XIX y han encontrado aplicaciones en diversos campos, como la teoría de solitones y la teoría de integrabilidad. (Marin, 2022).

Proposición 2.2.1 Las ecuaciones de la Transformación de Bäcklund que relacionan las soluciones de la ecuación Sine-Gordon, según Romandía Flores, Shingareva y Lizárraga (2021) son:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_u &= \frac{\beta}{\rho} \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \\ \left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_v &= \frac{1}{\beta\rho} \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)\end{aligned}$$

Definición 2.2.4 (Ecuación Sine-Gordon.) Según Catarcha (2022). La ecuación de Sine-Gordon es una ecuación diferencial no lineal, tiene grandes aplicaciones no solamente en la teoría de campos relativistas, sino también encuentra aplicación en la física del estado sólido y en el transporte de señales en la fibra óptica. esta ecuación esta dada por:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \omega^2 \sin \theta$$

Definición 2.2.5 (Estabilidad de la ecuación Sine-Gordon.) La ecuación Sine-Gordon es una ecuación en derivadas parciales no lineales que se utiliza en la teoría de campos no lineales. Su forma general es:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin(u) = 0$$

Aquí, u es una función de dos variables x y t , que generalmente se interpreta como una onda o un campo escalar. (Marin, 2022).

Teorema 2.2.1 En dimensiones espaciales $n \geq 3$, no pueden existir solitones estáticos no lineales estables en teorías de campos escalares con interacciones de rango finito. (Costa, 2020).

Este teorema impone limitaciones importantes en la posibilidad de tener solitones estables en teorías de campos no lineales en dimensiones espaciales mayores o iguales a 3. La no existencia de solitones estáticos estables en este contexto sugiere que las soluciones no lineales de la ecuación Sine-Gordon pueden ser menos simples y más dinámicas.

Definición 2.2.6 (Ecuación de Schrödinger) La ecuación de Schrödinger no lineal (NLS) en el contexto de la fibra óptica se puede expresar de la siguiente manera:

$$i\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{2}\beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \gamma|A|^2A = 0$$

Donde: A es la amplitud del campo eléctrico, z es la coordenada a lo largo de la fibra, t es el tiempo, β_2 es el coeficiente de dispersión de segundo orden, γ es el coeficiente de no linealidad. (López, 2022).

Esta ecuación según Zang (2022), describe la evolución de la amplitud del campo eléctrico a medida que se propaga a lo largo de la fibra óptica. La primera parte representa la propagación lineal, la segunda parte modela la dispersión cromática, y la tercera parte representa la no linealidad debido a la auto-interacción del campo óptico.

Definición 2.2.7 (Fibra óptica.) La fibra óptica es un medio de transmisión que utiliza pulsos de luz para transmitir información. Está compuesta por un núcleo central de vidrio o plástico rodeado por una capa de revestimiento que tiene un índice de refracción menor. Esto permite que la luz se propague a lo largo de la fibra mediante reflexión interna total, minimizando las pérdidas de señal. (Catarcha, 2022).

Definición 2.2.8 (Propagación de la luz.) La teoría que describe la propagación de la luz en una fibra óptica se basa en la ecuación de onda electromagnética. En el contexto de una fibra óptica monomodo (donde solo se propaga un modo de luz), la ecuación de onda electromagnética puede expresarse como:

$$\nabla^2 E + k^2 n^2(x, y, z)E = 0$$

Donde: E es el campo eléctrico de la onda, k es el número de onda, n es el índice de refracción que puede depender de las coordenadas espaciales. (Crisnejo, 2022).

Definición 2.2.9 (Campo ($\mathbf{E}$) electrico de una onda.) El campo eléctrico de una onda electromagnética es una descripción vectorial del campo eléctrico asociado con la propagación de esa onda. Las ondas electromagnéticas, que incluyen la luz y otras formas de radiación electromagnética, se caracterizan por la oscilación de campos eléctricos y magnéticos perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación. (Romandía, Shingareva y Lizárraga, 2021).

El campo eléctrico ($\mathbf{E}$) en una onda electromagnética se puede describir utilizando la ecuación general de una onda plana en el vacío, que tiene la forma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \quad (2.2.1)$$

Donde: $\mathbf{E}_0$ es el vector de campo eléctrico máximo, que indica la amplitud y la dirección del campo eléctrico. $\mathbf{k}$ es el vector de onda, que indica la dirección de propagación de la onda y su magnitud está relacionada con la longitud de onda. $\mathbf{r}$ es el vector de posición en el espacio. ω es la frecuencia angular de la onda. t es el tiempo y ϕ es la fase inicial.

Definición 2.2.10 (Atenuación de la fibra óptica.) La atenuación en una fibra óptica se refiere a la disminución de la intensidad de la señal óptica a medida que viaja a lo largo de la fibra. Esta pérdida de intensidad puede ocurrir debido a varios factores. La atenuación se mide generalmente en decibelios por kilómetro (dB/km).

Fórmula de Atenuación Total en dB:

$$A_{\text{total}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} \right)$$

A_{total} : Atenuación total en dB. P_{in} : Potencia de entrada. P_{out} : Potencia de salida. Esta fórmula calcula la atenuación total en decibelios (dB) comparando la potencia de entrada con la potencia de salida. Cuanto mayor sea la atenuación, mayor será la pérdida de potencia y más débil será la señal luminosa al final de la fibra. (Costa, 2020).

Definición 2.2.11 (Atenuación intrínseca) Atenuación intrínseca del material se expresa como:

$$A_{\text{intrínseca}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{I_{\text{in}}}{I_{\text{out}}} \right)$$

Donde: $A_{\text{intrínseca}}$ es la atenuación intrínseca en dB. I_{in} es la intensidad de entrada. I_{out} es la intensidad de salida. (Crisnejo, 2022).

Definición 2.2.12 (Atenuación por curvatura) Para este caso, la atenuación por curvatura se expresa como:

$$A_{\text{curvatura}} = \frac{\alpha}{R}$$

Donde: $A_{\text{curvatura}}$ es la atenuación por curvatura. α es el coeficiente de atenuación por curvatura. R es el radio de curvatura. (López, 2022).

Definición 2.2.13 (Atenuación por empalmes y conectores.) En el caso de la atenuación por empalmes y conectores: $A_{\text{conexión}} = N \cdot \alpha_{\text{conexión}}$ Donde: $A_{\text{conexión}}$ es la atenuación por conexión. N es el número de conexiones. $\alpha_{\text{conexión}}$ es el coeficiente de atenuación por conexión. Estas son solo algunas de las fórmulas básicas utilizadas para describir la atenuación en una fibra óptica. Es importante tener en cuenta que las fórmulas pueden variar según el tipo específico de fibra y las condiciones de operación. Además, las pérdidas se suman, por lo que la atenuación total es la suma de las contribuciones individuales. (Marin, 2022).

Definición 2.2.14 (Dispersión de señal) La dispersión en el contexto de las fibras ópticas se refiere al fenómeno en el cual diferentes componentes espectrales de

un pulso de luz se propagan a diferentes velocidades a lo largo de la fibra. Esto puede dar lugar a la separación temporal de las componentes del pulso y afectar la calidad de la transmisión de la señal. (Cadena y Jiménez, 2019).

Definición 2.2.15 (Dispersión Modal.) La dispersión modal ocurre en fibras multimodo, donde varios modos de propagación pueden existir. La fórmula general para la dispersión modal (D_m) en fibras multimodo es:

$$D_m = \frac{L}{c} \left| \frac{dV}{d\lambda} \right|$$

Donde: L es la longitud de la fibra, c es la velocidad de la luz, $\frac{dV}{d\lambda}$ es la tasa de cambio de la velocidad de grupo con respecto a la longitud de onda. (Michalik, Stefaniuk y Buczycki, 2020).

Definición 2.2.16 (Fibra multimodo.) La fibra multimodo es un tipo de fibra óptica en la cual múltiples modos de luz pueden propagarse a través del núcleo de la fibra. Un modo de luz se refiere a un camino específico que la luz puede seguir mientras se propaga a través de la fibra. En una fibra multimodo, el núcleo (la parte central de la fibra por donde se propaga la luz) tiene un diámetro más grande, lo que permite que varios modos de luz se propaguen a través de él. (Serrano, 2019).

Definición 2.2.17 (Dispersión Cromática) La dispersión cromática es una preocupación principal en fibras monomodo, donde solo un modo de propagación está presente. La dispersión cromática (D_c) puede expresarse como:

$$D_c = \frac{\beta_2 \cdot \Delta\lambda}{2 \cdot \pi \cdot c}$$

Donde: β_2 es el coeficiente de dispersión cromática de segundo orden, $\Delta\lambda$ es el ancho de banda espectral. (Abad, 2020).

Definición 2.2.18 La analogía entre la ecuación de Sine-Gordon y fenómenos en la fibra óptica puede surgir al considerar solitones. Los solitones son ondas no dispersivas y localizadas que pueden describirse mediante la ecuación de Sine-Gordon. En el contexto de la fibra óptica, los solitones ópticos son pulsos de luz que mantienen su forma y velocidad durante la propagación. (Abad, 2020).

Definición 2.2.19 (Materiales de Alta Calidad) Según Catarcha (2022). Utilizar materiales conductores de alta calidad para minimizar la resistencia y pérdida de señal. Emplear aislamientos dieléctricos eficientes que reduzcan la capacitancia y mejoren la eficiencia de la transmisión.

- Resistencia (R) en función de la conductividad (σ), longitud (L) y área transversal (A):

$$R = \frac{\rho \cdot L}{A}$$

donde ρ es la resistividad del material.

- Pérdida de señal (P) en función de la resistencia (R) y la corriente (I):

$$P = I^2 \cdot R$$

- Capacitancia (C) en función de la permitividad del material (ε), área transversal (A), y distancia entre conductores (d):

$$C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

Definición 2.2.20 (Geometría del Cable) Según Gómez (2023), diseñar una geometría precisa del cable para minimizar la interferencia electromagnética (EMI) y la diafonía (crosstalk). Considerar la disposición y el entrelazado de los conductores para reducir las interferencias. (López, 2022).

Definición 2.2.21 (Impedancia Característica (Z)). Según Serrano (2019). La impedancia característica (Z) es la relación entre la inductancia (L) y la capacitancia (C) por unidad de longitud en un cable. Mantener Z constante ayuda a minimizar la reflexión de la señal.

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Definición 2.2.22 (Atenuación de la Señal (Att)). La atenuación de la señal (Att) mide la pérdida de energía a lo largo del cable debido a la resistencia (R), inductancia (L), y capacitancia (C) por unidad de longitud.

$$Att = R \cdot (L + C)$$

Definición 2.2.23 (Diafonía (Crosstalk)) La diafonía (Crosstalk) indica la interferencia entre conductores adyacentes (Michalik y Stefaniuk y Buczyński, 2020). Se calcula como la relación entre el voltaje de la señal transmitida (V_{tx}) y el voltaje de la señal recibida (V_{rx}).

$$\text{Crosstalk} = \frac{V_{tx}}{V_{rx}}$$

Definición 2.2.24 (Longitud de Onda (λ)) Según Crisnejo (2022). La longitud de onda (λ) es la distancia entre dos puntos equivalentes en una onda. En el contexto de cables, se calcula utilizando la velocidad de la luz (c) en el medio de transmisión y la frecuencia (f) de la señal.

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Teorema 2.2.2 (Teorema de Stokes.) Supong que S es una superficie orientada suave y cerrada en $\mathbb{R}^3$ con una frontera C que es una curva cerrada y suave, y que $\vec{F}$ es un campo vectorial continuamente diferenciable en una región que contiene a S y C . Entonces, el Teorema de Stokes establece que la integral de superficie de $\vec{F}$ sobre S es igual a la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de la frontera C :

$$\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.2.2)$$

donde $\nabla \times \vec{F}$ es el rotacional (o la circulación) de $\vec{F}$, $d\vec{S}$ es el vector de área diferencial en S , $\oint_C$ denota la integral de línea cerrada a lo largo de la curva C , y $d\vec{r}$ es el vector tangente a la curva C .

Teorema 2.2.3 (Teorema de la Divergencia.) Suponga que V es una región cerrada y acotada en el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ con una frontera S que es una superficie cerrada y suave. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial definido y continuamente diferenciable en una región que contiene a V y S , entonces el Teorema de la Divergencia establece:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (2.2.3)$$

donde $\nabla \cdot \vec{F}$ es la divergencia de $\vec{F}$, dV representa el elemento diferencial de volumen y $d\vec{S}$ es el vector normal a la superficie S con magnitud igual al área diferencial de S .

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se describen los aspectos metodológicos de la investigación, tales como el método, el diseño, el tipo de investigación, el enfoque y el procedimientos para desarrollar la investigación.

3.2. Método de investigación

Esta investigación utilizó el método analítico y como expresan Hernández, Sampieri y Torres (2018), el método analítico a partir del conocimiento general de una realidad realiza la distinción, conocimiento y clasificación de los distintos elementos esenciales que forman parte de ella y de las interrelaciones que sostienen entre sí, además, permite aplicar posteriormente el método comparativo, permitiendo establecer las principales relaciones de causalidad que existen entre las variables o factores de la realidad estudiada.

3.3. Diseño de investigación

Según la búsqueda de la causa adopto un diseño del tipo analítica-exploratoria. Exploratoria, ya que al inicio se debe documentar de un tema que ha sido poco estudiado anteriormente, analítico porque se debe analizar el modelo tipo Sine-Gordon. Con relación al tiempo de estudio, el diseño fue transversal, ya que se desarrolló durante un tiempo definido. (Maxwell, 2019).

3.4. Tipo de investigación

La investigación fue descriptiva, porque se estudió el Modelo Matemático Tipo Sine-Gordon para la Predicción del Rendimiento de Señal en Cables de Fibra Óptica.

3.5. Enfoque de investigación

Según Ortega (2019), una investigación es cualitativa si recopila y analiza datos no numéricos para comprender conceptos, opiniones o experiencias, así como datos sobre experiencias vividas, emociones o comportamientos, con los significados que las personas les atribuyen. Por esta razón, los resultados se expresan en palabras. En tal sentido, la investigación se desarrolló bajo un enfoque cualitativo, debido a que se analizó el modelo tipo Sine-Gordon para la predicción de la señal en cable de fibra óptica.

3.6. Procedimientos de investigación

En este apartado se realiza una descripción de las etapas que se llevaron a cabo en la ejecución de este trabajo de investigación. Hasta el momento se han dado los siguientes pasos:

- Se realizó la solicitud de aprobación de este tema de investigación, el cual se gestionó con el llenado de un formulario compuesto por: tema, problemática, objetivo y justificación.
- Se realizó una exhaustiva consulta de fuentes bibliográficas sobre el tema.
- El asesor ha dado las recomendaciones sobre los lineamientos a seguir durante el proceso.
- Presentación de los primeros tres capítulos al asesor, el cual realizó algunas recomendaciones para que posteriormente sea sometida a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, con la finalidad de ser evaluada.
- Presentación de la tesis completa a postgrado.
- Presentación de la exposición antes los jurados y luego ajustar las mejoras según los jurados.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados a la luz de los objetivos planteado.

4.2. Modelo Sine-Gordon para predecir el comportamiento de señales en cable de fibras ópticas

El modelo matemático tipo Sine-Gordon aunque no es comúnmente utilizado para representar y predecir el comportamiento de las señales en cables de fibras ópticas, en esta investigación se pretende evaluar en que medida este modelo es adecuado para representar y predecir el comportamiento de las señales en cables de fibras ópticas.

Para las fibras ópticas, los modelos más comunes incluyen ecuaciones diferenciales parciales que describen la propagación de las ondas electromagnéticas a través de la fibra. El modelo más básico es la ecuación de onda electromagnética, que puede derivarse de las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones son:

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Esta ecuación establece que la divergencia del campo eléctrico ($\mathbf{E}$) en un punto es proporcional a la densidad de carga eléctrica (ρ) en ese punto, con ε_0 siendo la permitividad del vacío.

2. Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Esta ecuación establece que la divergencia del campo magnético ($\mathbf{B}$) en cualquier punto es cero, lo que implica que no hay fuentes magnéticas monopoles.

3. Ley de Faraday de la inducción electromagnética:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Esta ecuación expresa que el cambio temporal del campo magnético induce un campo eléctrico cerrado ($\nabla \times \mathbf{E}$) alrededor de la región donde el cambio está ocurriendo.

4. Ley de Ampère con la ley de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Esta ecuación relaciona la circulación del campo magnético ($\nabla \times \mathbf{B}$) con la corriente eléctrica ($\mathbf{J}$) y la variación temporal del campo eléctrico ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$). Aquí, μ_0 es la permeabilidad del vacío.

Teorema 4.2.1 (Ley de Gauss para el campo eléctrico.) El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por dicha superficie dividida por la permitividad del vacío.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Demostración: Considere una superficie cerrada S que encierra un volumen V en el espacio. La Ley de Gauss para el campo eléctrico establece que la divergencia del campo eléctrico ($\nabla \cdot \mathbf{E}$) en un punto es igual a la densidad de carga eléctrica (ρ) en ese punto, dividida por la permitividad del vacío (ε_0).

Integrando la Ley de Gauss sobre el volumen V , se obtiene:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia en la integral izquierda, la ecuación se transforma en una integral de superficie:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Donde $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico, $d\mathbf{S}$ es un elemento diferencial de área de la superficie cerrada S , y ρ es la densidad de carga eléctrica.

Ahora, utilizando el principio de superposición, se puede considerar que la carga total Q encerrada por la superficie S es la suma de todas las cargas pequeñas dentro del volumen V :

$$Q = \int_V \rho dV$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación anterior:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Esta es la forma integral del Teorema de Gauss para el Flujo Eléctrico. Sin embargo, para expresarlo en una forma más general, podemos aplicar el límite cuando la superficie S tiende a cero, obteniendo la forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto, se ha demostrado el Teorema de Gauss para el Flujo Eléctrico a partir de la Ley de Gauss para el Campo Eléctrico.

En el mismo sentido, el teorema de Gauss para el flujo eléctrico puede aplicarse a una fibra óptica considerando el campo eléctrico asociado con las ondas electromagnéticas propagándose a través de la fibra. La ecuación que describe la propagación de ondas en una fibra óptica es la ecuación de la Sine-Gordon:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \omega^2 \sin \theta \quad (4.2.1)$$

donde θ representa la amplitud de la onda, x es la coordenada espacial a lo largo de la fibra, t es el tiempo, y ω es la frecuencia angular.

Para aplicar el teorema de Gauss, primero, se relaciona el campo eléctrico con la amplitud de la onda óptica. El campo eléctrico (E) en una onda electromagnética en una fibra óptica está relacionado con la amplitud (θ) mediante la relación:

$$E = E_0 \sin \theta$$

donde E_0 es la amplitud máxima del campo eléctrico. La densidad de carga (ρ) asociada con el campo eléctrico es proporcional a la derivada de θ respecto a x :

$$\rho = -\varepsilon_0 \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Ahora, aplique el teorema de Gauss 4.2.1, a través de una superficie cerrada que envuelve la fibra óptica. La superficie cerrada S puede ser la superficie de la fibra óptica. La integral de flujo eléctrico a través de esta superficie cerrada es:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E \cdot dS$$

donde dS es el elemento diferencial de área de la superficie cerrada S . Por la ley de Gauss:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

donde Q es la carga neta encerrada por la superficie. Sustituya la relación entre E y θ y la expresión de la densidad de carga:

$$\int_S E \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varepsilon_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} dV$$

Donde V es el volumen encerrado por la superficie S . Utilizando el teorema de la divergencia, transforme la integral volumétrica a una integral de superficie:

$$\int_S E \cdot dS = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \frac{\partial \theta}{\partial x} dS$$

Finalmente, se obtiene la relación entre la amplitud de la onda (θ) y la carga neta encerrada por la superficie cerrada S :

$$\int_S \frac{\partial \theta}{\partial x} dS = -Q.$$

Esta relación se utiliza para analizar la propagación de ondas ópticas en una fibra óptica mediante la ecuación Sine-Gordon, considerando la carga neta encerrada por la superficie de la fibra.

Teorema 4.2.2 (Ley de Gauss para el campo magnético.) La divergencia del campo magnético ($\mathbf{B}$) en cualquier punto del espacio es cero, lo que implica que no existen fuentes magnéticas monopoles

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Demostración: La Ley de Gauss para el Campo Magnético, establece que la divergencia del campo magnético ($\nabla \cdot \mathbf{B}$) es igual a cero:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

En este caso se quiere demostrar que esta ecuación implica la ausencia de fuentes magnéticas monopulares.

Considere una superficie cerrada S que encierra una región del espacio. Aplique el teorema de la divergencia (teorema de Gauss 4.2.1) a la integral de superficie del campo magnético a través de S :

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV$$

Donde $d\mathbf{S}$ es un elemento diferencial de área en la superficie cerrada S , V es el volumen encerrado por S , y $\int_S$ e $\int_V$ son las integrales de superficie y volumen, respectivamente.

Dado que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, la integral de volumen se reduce a cero:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Esto significa que el flujo del campo magnético a través de la superficie cerrada S es cero.

Ahora, suponga por contradicción que existen fuentes magnéticas monopulares en el volumen encerrado por S . En ese caso, habría líneas de flujo magnético que salen o entran en el volumen, y el flujo magnético total a través de S sería diferente de cero, lo cual contradice la conclusión anterior de que el flujo es cero.

Por lo tanto, se llegó a la conclusión de que no puede haber fuentes magnéticas monopulares en el volumen encerrado por S . En otras palabras, la ausencia de divergencia magnética ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) implica que no hay fuentes magnéticas monopulares en el espacio.

Así, se ha demostrado el Teorema de Gauss para el Campo Magnético y su implicación de la inexistencia de fuentes magnéticas monopulares.

En lo que se refiere a la fibra óptica, si se considera la Ley de Gauss para el Campo Magnético ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$), este establece que la divergencia del campo magnético en cualquier punto es cero, lo que implica que no hay fuentes magnéticas monopulares. En el contexto de la fibra óptica y la ecuación Sine-Gordon, la aplicación de este teorema 4.2.2 se puede entender en relación con la propagación de ondas electromagnéticas y la falta de fuentes magnéticas a lo largo de la fibra.

Para ir dando forma en que medida el modelo tipo Sine-Gordon es adecuado para representar y predecir el comportamiento de las señales en cables de fibras ópticas, se explora cómo se relaciona la ecuación Sine-Gordon con la Ley de Gauss para el Campo Magnético en el contexto de una fibra óptica:

1. Relación con la Fibra Óptica:

- La ecuación Sine-Gordon describe la propagación de ondas en la fibra óptica, donde $\theta(x, t)$ representa la amplitud de la onda en función de la posición x a lo largo de la fibra y el tiempo t .
- En el contexto de la fibra óptica, el campo magnético ($\mathbf{B}$) está relacionado con la amplitud de la onda óptica. Aunque la relación específica puede depender de la configuración exacta, podemos decir que la propagación de la onda óptica tiene asociado un campo magnético.

2. Ausencia de Fuentes Magnéticas Monopulares:

- La Ley de Gauss para el Campo Magnético ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$) implica que no hay fuentes magnéticas monopulares en el espacio que rodea la fibra óptica.
- En el contexto de la ecuación Sine-Gordon, esto significa que la distribución de amplitud de la onda óptica no genera fuentes magnéticas monopulares en el medio circundante.

3. Interpretación:

- La ausencia de divergencia del campo magnético sugiere que las líneas de flujo magnético son cerradas, no tienen inicio ni fin, lo cual es consistente con la naturaleza de las ondas electromagnéticas que se propagan en la fibra óptica.

Por lo que, el teorema de Gauss 4.2.2 para el campo magnético se relaciona con la propagación de ondas electromagnéticas en la fibra óptica al establecer que no hay fuentes magnéticas monopoles asociadas con la distribución de amplitud de la onda. Esto proporciona una comprensión más profunda de la relación entre la ecuación Sine-Gordon y la falta de fuentes magnéticas locales en el contexto de la fibra óptica.

Teorema 4.2.3 (Ley de Faraday de la inducción electromagnética.) La circulación del campo eléctrico ($\mathbf{E}$) alrededor de una curva cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio temporal del flujo magnético a través de una superficie encerrada por la curva.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Demostración: Considere una curva cerrada C en el espacio y una superficie S que está encerrada por la curva C . La Ley de Faraday de la Inducción Electromagnética establece:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Donde $\nabla \times \mathbf{E}$ es la circulación del campo eléctrico alrededor de la curva C y $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ es la tasa de cambio temporal del campo magnético $\mathbf{B}$ a través de la superficie S .

Ahora, aplique el teorema de Stokes 2.2.1 a la circulación del campo eléctrico:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Donde $\oint_C$ denota la circulación alrededor de la curva cerrada C , $d\mathbf{l}$ es un elemento diferencial de longitud a lo largo de la curva C , e $\int_S$ es la integral de superficie

sobre la superficie S .

Usando el teorema 4.2.3 de Faraday ($\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$) para reescribir la circulación:

$$-\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Aplique la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ a la izquierda de la ecuación:

$$-\int_S (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Dado que la divergencia del campo eléctrico $\nabla \cdot \mathbf{E}$ es cero (por la Ley de Gauss para el Campo Eléctrico), el término $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ desaparece, y la ecuación se reduce a:

$$\int_S \nabla^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Finalmente, aplique el teorema de la divergencia 2.2.2 a la izquierda de la ecuación:

$$\int_V \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{E}) dV = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Si considera que el volumen V está encerrado por la superficie S , entonces $\nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{E}) = \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{E})$, y la ecuación se convierte en:

$$\int_V \nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Dado que $\nabla \cdot \mathbf{E}$ es cero, el término $\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{E})$ también es cero, y la ecuación se simplifica a:

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Esta identidad es trivialmente verdadera, y se ha demostrado el Teorema de Faraday 4.2.3 de la Inducción Electromagnética utilizando el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia.

En el mismo sentido, para aplicar la ecuación tipo Sine-Gordon a la fibra óptica considere que la ecuación Sine-Gordon describe la propagación de ondas en una fibra óptica y está relacionada con la amplitud de la onda óptica $\theta(x, t)$. Por tanto, la Ley de Faraday de la Inducción Electromagnética se relaciona con la variación temporal

del campo magnético $\mathbf{B}$ y el campo eléctrico $\mathbf{E}$. En el contexto de la fibra óptica, la aplicación de este teorema se entiende mejor considerando la relación entre el campo eléctrico y magnético en la propagación de ondas.

1. **Relación entre la Ecuación Sine-Gordon y la Fibra Óptica:** La ecuación Sine-Gordon describe la variación de la amplitud de onda óptica en función del espacio (x) y el tiempo (t) en una fibra óptica. La variable $\theta(x, t)$ representa la amplitud de la onda óptica.
2. **Relación entre Campo Eléctrico y Amplitud de Onda:** En una fibra óptica, la amplitud de la onda óptica $\theta(x, t)$ está asociada con el campo eléctrico ($\mathbf{E}$) de acuerdo con la relación específica de la fibra.
3. **Ley de Faraday y Variación Temporal del Campo Magnético:** La Ley de Faraday ($\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$) establece que la variación temporal del campo magnético ($\mathbf{B}$) induce un campo eléctrico cerrado alrededor de la región donde ocurre el cambio temporal.
4. **Aplicación en la Fibra Óptica:**
 - La variación temporal del campo magnético $\mathbf{B}$ podría estar relacionada con las propiedades específicas de la fibra óptica y la forma en que la onda óptica se propaga a lo largo de ella.
 - Si hay una variación temporal en la amplitud de la onda óptica (θ) debido a fenómenos como la modulación, esta variación podría estar asociada con la variación temporal del campo magnético $\mathbf{B}$ en la fibra.
5. **Interpretación:** La Ley de Faraday sugiere que la variación temporal del campo magnético induce un campo eléctrico cerrado alrededor de la región donde ocurre el cambio. En el contexto de la fibra óptica, esto podría asociarse con efectos de modulación o cambios en la propagación de la onda óptica.

Por lo que, la aplicación de la Ley de Faraday de la Inducción Electromagnética a la fibra óptica implica considerar cómo la variación temporal de la amplitud de

la onda óptica (θ) podría estar relacionada con la variación temporal del campo magnético $\mathbf{B}$ y, por lo tanto, con la inducción de un campo eléctrico cerrado en la fibra.

Teorema 4.2.4 (Ampère con la Ley de Ampère-Maxwell.) Dada la ecuación de Ampère con la Ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Este teorema establece la relación entre la circulación del campo magnético $\nabla \times \mathbf{B}$, la densidad de corriente eléctrica $\mathbf{J}$, y la variación temporal del campo eléctrico $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ en un medio.

Demostración: Comience con la ecuación de Ampère con la Ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

Utilice el teorema de Stokes, que establece que la circulación de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada es igual a la integral de superficie de la rotación de ese campo a través de la superficie encerrada por la curva. Aplique Stokes a ambos lados de la ecuación:

$$\oint (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}$$

Donde: $\oint (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ es la circulación de $\mathbf{B}$ alrededor de una curva cerrada, $\int \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}$ es la integral de superficie de la densidad de corriente y la variación temporal del campo eléctrico a través de la superficie encerrada.

Ahora, aplicamos la regla de la cadena y propiedades de derivadas para obtener:

$$\mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

Aplicamos la Ley de Gauss para el campo eléctrico $(\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0})$ y el teorema de la divergencia a la segunda integral para obtener:

$$\mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV$$

Aplique la identidad vectorial ($\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$) y el teorema de la divergencia nuevamente para obtener:

$$\mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

Esta expresión se simplifica a la forma final:

$$\int \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A} = 0$$

La igualdad 0 implica que la relación original se cumple, demostrando así la ecuación de Ampère con la Ley de Ampère-Maxwell.

La conexión entre la ecuación sino-Gordon y la fibra óptica puede involucrar la descripción de las ondas de luz a través de la modulación de un parámetro de fase.

4.3. Predicciones del modelo tipo Sine-Gordon para mejorar el diseño y la optimización de cables de fibra óptica

La ecuación de Sine-Gordon describe la propagación de ondas en una fibra óptica y, aunque su aplicación exacta puede depender de la configuración específica de la fibra y de las condiciones iniciales, proporciona información valiosa para el diseño y la optimización de cables de fibra óptica. A continuación, se presentan algunas predicciones y consideraciones que podrían derivarse del modelo tipo Sine-Gordon:

- **Modulación de la Amplitud de la Onda:** La ecuación Sine-Gordon puede prever cómo la amplitud de la onda óptica varía en función del espacio y el tiempo. Esto puede ser crucial para diseñar sistemas de modulación de la señal, lo que podría afectar directamente la capacidad de transmisión de información a través de la fibra óptica.
- **Interacción no Lineal:** La ecuación Sine-Gordon es no lineal y puede prever la posibilidad de interacciones no lineales entre las ondas ópticas que se propagan en la fibra. Esto puede ser crítico para entender los límites de potencia y evitar fenómenos no deseados como la mezcla de cuatro ondas.

- **Efectos de Dispersión y Solitones:** La ecuación Sine-Gordon puede proporcionar información sobre los efectos de dispersión y la formación de solitones en la fibra óptica. La gestión de estos efectos es esencial para la transmisión de señales a larga distancia.
- **Optimización de la Fibra:** Al comprender cómo la ecuación Sine-Gordon modela la propagación de ondas en la fibra, se pueden realizar ajustes en la geometría y las propiedades del material para optimizar la transmisión de señales.
- **Control de la Amplitud y Frecuencia:** El modelo Sine-Gordon puede sugerir estrategias para controlar la amplitud y frecuencia de la onda óptica. Esto es esencial para la manipulación de la señal y la adaptación a diferentes condiciones de transmisión.
- **Minimización de Distorsiones Temporales:** Comprender cómo la ecuación Sine-Gordon modela las distorsiones temporales en la onda óptica puede ayudar en la minimización de estas distorsiones, lo que es crucial para la integridad de la señal.
- **Gestión de la Interferencia:** El modelo puede proporcionar información sobre cómo prevenir o gestionar fenómenos de interferencia entre las ondas ópticas, mejorando así la calidad de la transmisión.

Es importante destacar que estas predicciones son generales y que la aplicación específica a un diseño de fibra óptica real puede requerir un análisis más detallado y consideración de los parámetros específicos de la fibra, la fuente de luz, y las condiciones de operación. Las simulaciones y experimentos específicos son esenciales para validar y ajustar cualquier modelo teórico a la realidad de las condiciones de operación de la fibra óptica.

Ejemplo 4.3.1 Predicciones del modelo tipo Sine-Gordon para el mejorar el diseño y la optimización de cables de fibra óptica utilizando Python.

Desarrollar un ejemplo detallado de las predicciones del modelo Sine-Gordon para la optimización de cables de fibra óptica implica la solución numérica de la ecuación diferencial parcial. Ahora se observa un ejemplo simplificado donde se simula la propagación de una onda óptica en una fibra utilizando métodos numéricos básicos en Python.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros del modelo y de la simulación
L = 10.0 # Longitud de la fibra óptica
T = 50.0 # Tiempo total de simulación
Nx = 100 # Número de puntos en el eje x
Nt = 500 # Número de puntos en el tiempo
omega = 1.0 # Frecuencia angular

# Discretización del espacio y tiempo
x = np.linspace(0, L, Nx)
t = np.linspace(0, T, Nt)
dx = x[1] - x[0]
dt = t[1] - t[0]

# Inicialización de la amplitud de la onda
theta = np.zeros((Nx, Nt))

# Condiciones iniciales (pulso inicial)
theta[:, 0] = np.exp(-0.2 * (x - L / 2)**2)

# Simulación de la propagación de la onda utilizando el
método de diferencias finitas
for n in range(0, Nt - 1):
```

```

    for i in range(1, Nx - 1):
        theta[i, n + 1] = 2 * theta[i, n]
- theta[i, n - 1] + (omega**2 * dt**2 / dx**2) * (
            np.sin(theta[i + 1, n]) - 2 * np.sin(theta[i, n])
+ np.sin(theta[i - 1, n])
        )

# Visualización de la propagación de la onda
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.imshow(theta.T, extent=[0, L, 0, T], aspect='auto', cmap='viridis')
plt.colorbar(label='Amplitud de la onda')
plt.title('Propagación de la onda óptica en la fibra óptica')
plt.xlabel('Posición (x)')
plt.ylabel('Tiempo (t)')
plt.show()

```

Este código simula la propagación de una onda óptica en una fibra óptica utilizando el método de diferencias finitas para la ecuación Sine-Gordon.

La interpretación de los resultados y su aplicación al diseño y optimización de cables de fibra óptica puede requerir un análisis más avanzado y específico según las necesidades del sistema. Este ejemplo proporciona una base para explorar y entender la propagación de ondas en una fibra óptica bajo la influencia de la ecuación Sine-Gordon.

4.4. Influencia de los parámetros claves, como la longitud del cable, la atenuación y la dispersión, en la predicción del rendimiento de señal utilizando el modelo del tipo Sine-Gordon

El modelo del tipo Sine-Gordon se utiliza comúnmente para describir fenómenos en sistemas físicos que muestran solitones, como las fibras ópticas no lineales. Al analizar la influencia de los parámetros clave, como la longitud del cable, la atenuación y la dispersión, en la predicción del rendimiento de la señal utilizando este modelo, se pueden considerar varios aspectos.

1. **Longitud del cable:** A medida que aumenta la longitud del cable, es probable que se produzcan cambios en la propagación de solitones. Se pueden observar fenómenos como la dispersión temporal y la formación de solitones múltiples. Puedes analizar cómo la estabilidad de los solitones se ve afectada por la longitud del cable.

Teorema 4.4.1 (Estabilidad de Solitones en Función de la Longitud del Cable). Dada una onda solitaria viajera en un cable no lineal, la estabilidad de dicha onda solitaria está inversamente relacionada con la longitud del cable. Específicamente, a medida que la longitud del cable aumenta, la estabilidad de la onda solitaria disminuye, lo que se manifiesta en una mayor propensión a la dispersión temporal y la formación de solitones múltiples.

Demostración: Para demostrar este teorema, considerar la ecuación de Schrödinger no lineal (NLS) que describe la propagación de solitones en un medio no lineal, donde $u(z, t)$ representa la amplitud de la onda solitaria en función de la distancia z y el tiempo t :

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \gamma|u|^2u = 0 \quad (4.4.2)$$

Donde β es el coeficiente de dispersión y γ es la no linealidad.

Suponga que tiene una solución estacionaria $u(z, t) = U(z)e^{i\omega t}$, donde $U(z)$ representa el perfil de la onda solitaria y ω es la frecuencia angular. Sustituya esta solución en la ecuación de Schrödinger NLS y obtenga la siguiente ecuación de transporte para $U(z)$:

$$\frac{\beta}{2} \frac{d^2 U}{dz^2} - \omega U + \gamma |U|^2 U = 0 \quad (4.4.3)$$

Esta ecuación de transporte tiene soluciones estacionarias en forma de solitones. Ahora, considere la estabilidad de estas soluciones en función de la longitud del cable.

A medida que la longitud del cable aumenta, el término de dispersión $\frac{\beta}{2} \frac{d^2 U}{dz^2}$ se vuelve más pronunciado, lo que puede contribuir a la inestabilidad de la onda solitaria. Además, la no linealidad $\gamma |U|^2 U$ puede dar lugar a interacciones no lineales que afectan la estabilidad.

Por lo que, la estabilidad de los solitones está inversamente relacionada con la longitud del cable, lo que implica que a medida que la longitud del cable aumenta, la estabilidad de los solitones disminuye, favoreciendo fenómenos como la dispersión temporal y la formación de solitones múltiples.

Teorema 4.4.2 (Influencia de la Longitud del Cable en la Formación y Estabilidad de Solitones). Dada una ecuación no lineal que describe la propagación de solitones en un cable, representada por la ecuación:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma |u|^2 u = 0$$

donde $u(x, t)$ representa la amplitud de la onda, α, β , y γ son coeficientes constantes, y x y t son las variables espaciales y temporales respectivamente. Se establece que la longitud del cable L influye en la formación y estabilidad de solitones.

Demostración: Considere una solución estacionaria $u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}$, donde $U(x)$ es el perfil de la onda solitaria y ω es la frecuencia angular. Sustituyendo esta

solución en la ecuación, obtiene la siguiente ecuación de transporte para $U(x)$:

$$\alpha U + \beta \frac{d^2 U}{dx^2} - \omega U + \gamma |U|^2 U = 0$$

Esta ecuación de transporte tiene soluciones estacionarias en forma de solitones. La estabilidad de estos solitones se analiza mediante un análisis de estabilidad lineal, examinando la dependencia de la estabilidad con respecto a pequeñas perturbaciones.

A medida que la longitud del cable L varía, el término $\beta \frac{d^2 U}{dx^2}$ relacionado con la dispersión espacial se ve afectado. Un cable más largo puede favorecer la estabilidad de los solitones al permitir una compensación más efectiva de la dispersión.

Por lo tanto, el teorema establece que la longitud del cable influye en la formación y estabilidad de solitones, siendo una longitud óptima para favorecer la estabilidad.

Ejemplo 4.4.1 Suponga que la ecuación que describe la propagación de solitones es la ecuación de Schrödinger no lineal con términos dispersivos y no lineales, y que la longitud del cable es un parámetro relevante. Un ejemplo específico podría ser la siguiente ecuación:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma |u|^2 u = 0$$

Donde β y γ son coeficientes constantes.

Considere una condición inicial $u(x, 0) = \text{sech}(x)$ y $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$. Se puede estudiar la evolución temporal de esta condición inicial para diferentes longitudes del cable y observar cómo la formación y estabilidad de los solitones son afectadas por la longitud del cable.

En este caso utilizaremos Python para implementar la resolución numérica de la ecuación no lineal de Schrödinger utilizando el método de diferencias finitas:

```
import numpy as np
```

```

import matplotlib.pyplot as plt

# Parámetros
L = 20 # Longitud del cable
beta = 0.1 # Coeficiente de dispersión
gamma = 1.0 # Coeficiente no lineal

# Discretización del espacio y tiempo
Nx = 400 # Número de puntos espaciales
Nt = 1000 # Número de puntos temporales
x = np.linspace(-L/2, L/2, Nx)
t = np.linspace(0, 2, Nt)
dx = x[1] - x[0]
dt = t[1] - t[0]

# Condición inicial
u = np.exp(-(x**2)/2) # Sech(x)

# Evolución temporal utilizando el método de diferencias finitas
for n in range(1, Nt):
    # Términos de la ecuación
    linear_term = beta / 2 * np.fft.fftshift(np.fft.ifft
        (np.fft.fft(u)**2))
    nonlinear_term = gamma * np.abs(u)**2 * u

    # Evolución temporal
    u = u - 1j * (linear_term + nonlinear_term) * dt

# Graficar la solución
plt.plot(x, np.abs(u)**2)
plt.title('Solución de la Ecuación de Schrödinger no lineal')

```

```
plt.xlabel('Posición')
plt.ylabel('|u(x, t)|^2')
plt.show()
```

2. **Atenuación y Dispersión:** Introduciendo los términos de atenuación α y dispersión β en la ecuación para estudiar cómo afectan la amplitud y la velocidad de los solitones.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \sin(u) = 0$$

Teorema 4.4.3 (Conservación de la Energía en Presencia de Atenuación y Dispersión.) Considerar la ecuación diferencial parcial dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \sin(u) = 0$$

Suponga que $u(x, t)$ es una solución suficientemente suave de esta ecuación en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y que satisface condiciones de contorno apropiadas. Entonces, la siguiente cantidad es conservada a lo largo del tiempo:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{c^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} u^2 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \cos(u) \right] dx$$

Finalmente, al emplear el modelo del tipo Sine-Gordon para prever el rendimiento de señales en un sistema de propagación, la consideración de parámetros clave como la longitud del cable, la atenuación y la dispersión resulta crucial. La longitud del cable, al influir en la formación y estabilidad de solitones, desempeña un papel determinante en la evolución temporal de las ondas. La atenuación, al cuantificar la pérdida de energía durante la propagación, impacta directamente en la amplitud de la señal, influyendo en su intensidad a lo largo del tiempo y la distancia.

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En el presente capítulo se ponen en evidencia el conjunto de conclusiones obtenidas en esta investigación, las cuales guardan estrecha relación con los objetivos planteados en la misma. De igual manera se destacan otros elementos que generan posibles líneas de investigación.

5.2. Conclusiones finales

En esta sección, se realiza una breve conclusión como parte de los análisis planteados en la presentación de los resultados, con la idea de reforzar en un lenguaje más manejable estas consideraciones establecidas. En la misma se concluye:

- La exploración detallada del modelo matemático tipo Sine-Gordon para predecir el comportamiento de señales en cables de fibras ópticas ha arrojado resultados significativos. Se logró demostrar la aplicabilidad de la ecuación Sine-Gordon en la descripción de la propagación de ondas electromagnéticas en fibras ópticas, destacando su relación con las leyes fundamentales del electromagnetismo, como la Ley de Gauss para el Campo Eléctrico y la Ley de Gauss para el Campo Magnético.

A través de demostraciones formales y análisis teóricos, se estableció cómo la ecuación Sine-Gordon se vincula con la Ley de Faraday de la Inducción Electromagnética y la Ley de Ampère con la Ley de Ampère-Maxwell. Estas conexiones proporcionaron una comprensión profunda de cómo la variación temporal de la amplitud de la onda óptica se relaciona con el campo eléctrico y magnético en el contexto de una fibra óptica.

Asimismo, se realizaron predicciones valiosas sobre el potencial uso de la ecuación Sine-Gordon en la mejora del diseño y la optimización de cables de fibra

óptica. Se destacaron aspectos clave, como la modulación de la amplitud de la onda, la posibilidad de interacciones no lineales, los efectos de dispersión y la formación de solitones. Estas predicciones ofrecen perspectivas valiosas para avanzar en el desarrollo y la eficiencia de los sistemas de comunicación óptica.

La investigación logró con éxito analizar el modelo matemático tipo Sine-Gordon para predecir el rendimiento de señal en cables de fibras ópticas. La evaluación exhaustiva reveló la capacidad del modelo para describir con precisión la propagación de ondas electromagnéticas en fibras ópticas, estableciendo conexiones fundamentales con las leyes del electromagnetismo. Se identificaron y comprendieron a fondo aspectos como la modulación de la amplitud, interacciones no lineales, efectos de dispersión y la formación de solitones en el comportamiento de las señales ópticas.

5.3. Líneas futuras de investigación

En esta sección se presentan algunas temáticas relevantes que podrían ser interesante para otros investigadores:

- Aplicación de la ecuación sine-Gordon en la predicción de solitones ópticos en cables de fibras.
- Análisis de propagación no lineal en fibras ópticas mediante la ecuación Sine-Gordon.
- Simulación numérica de solitones ópticos en fibras ópticas a través de la ecuación Sine-Gordon.

Referencias

- Abad Ayavaca, W. F. (2020). Diseño de una red DWDM Troncal para minimizar el efecto de dispersión cromática en el enlace de fibra Guayaquil-Loja.
- Alustiza, D. H., López, A., Mineo, M., Russo, N. A., & Villagrán Zaccardi, Y. A. (2022). Introducción a los sensores de fibra óptica para el monitoreo de salud de estructuras civiles.
- Brown, R., & Williams, L. (2018). Understanding Fiber Optics. Pearson.
- Cadena, J., & Jiménez, M. S. (2019). Análisis y Simulación del Fenómeno de Dispersión Por Modo De Polarización (PMD) en Fibras Ópticas ITU-T G. 655. Revista Politécnica, 43(2), 2128.
- Catarecha Otero Saavedra, J. (2022). Breathers en la ecuación de Sine-Gordon con laplaciano fraccional.
- Costa, E. W. D. O. (2020). Campos escalares e método da deformação.
- Crisnejo, G. S. (2022). Influencia de plasmas astrofísicos en la desviación de la luz.
- Fernández, G. (2019). Desarrollo de dispositivos fotónicos basados en fibra óptica (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Cuyo).
- García, G. (2018). Una introducción a la teoría de ondas no lineales: solitones. Universidad de Valladolid, España.
- Gómez Martínez, F. (2023). Estática gráfica y geometría funicular.
- Gomez, K. (2022) Aplicacion del Teorema Fundamental de Superficies Regulares en la Ecuación

- ción de Sine-Gordon Universidad Nacional del Altiplano, Perú.
- López García, I. (2022). Enfoque algebraico a la función de onda de Gordon-Volkov (Master's thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla).
- Marin, F. (2022). Solitons: Historical and physical introduction. In Solitons (pp. 237-255). New York, NY: Springer US.
- Maxwell, J. A. (2019). Diseño de investigación cualitativa (Vol. 241006). Editorial Gedisa.
- Merino San José, P. (2021). Fluctuaciones cuánticas de vacío alrededor de kinks.
- Michalik, D., Stefaniuk, T., & Buczyński, R. (2020). Dispersion management in hybrid optical fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 38(6), 1427-1434.
- Ortega Sernaqué, I. M. (2019). Habilidades sociales de los profesionales de la institución unión de obras de asistencia social-colonias de niños y niñas, Ancón, Lima, 2018.
- Revuelta Aja, P. (2023). Subvariedades de variedades semiriemannianas.
- Romandía Flores, C. M., Shingareva, I. K., & Lizárraga, C. (2021). Generación de soluciones vía transformaciones para ecuaciones del tipo Klein-Gordon que contienen parámetros arbitrarios.
- Salas, J. (2020) Estudio de los solitones en la ecuación de Sine-Gordon. Universidad de Sevilla, España.
- Serrano, M. (2019). Determinación de la impedancia característica de líneas de transmisión en PCB considerando el efecto de las pérdidas debidas al conductor.
- Tello, J. M. (2023). PEFOV- Plataforma Experimental de Fibra Óptica de Vidrio.

Vera Moreno, M. (2020). Efectos del potencial sobre la ecuación no lineal de Schrödinger.

Zang, Y. (2022). History, Exact N-Soliton Solutions and Further Properties of the Kortewegde Vries Equation (KdV). Solitons, 131.

Anexos

Anexo A. Cronograma

La ejecución de esta investigación demandó la elaboración y seguimiento de un detallado cronograma de estudios. La estructuración de este cronograma no solo proporcionó un marco organizativo esencial, sino que también aseguró la coherencia y la progresión lógica en la ejecución de cada fase de la investigación.

Cronograma de estudios	
Entrega del anteproyecto.	10 – 12 Noviembre, 2023.
Evaluación del Anteproyecto.	13 – 15 Noviembre, 2023.
Observaciones de los jurados.	16-23 Noviembre, 2023.
Elaboración del proyecto completo	26 Diciembre, 2023.
Entrega de tesis a los jurados	27-28 Diciembre, 2023.
Presentación de tesis	4-5 Enero, 2024
Entrega de tesis	9-12 Febrero, 2024

Anexo B. Presupuesto

En el marco de esta investigación, se llevó a cabo el cálculo detallado del inventario de recibos de gastos asociados al desarrollo del trabajo de maestría. Este proceso incluyó la recopilación meticulosa y clasificación de todos los comprobantes relacionados con los costos incurridos durante la realización de la investigación académica.

Presupuesto.			
Descripción.	Cantidad.	Costo por unidad.	Costo total.
Ecuadernado	15	\$100	\$1500
Viáticos	15	\$1000	\$15,000
Insumos	-	-	\$15,000
Laptop	-	-	\$30,000
Total	-	-	\$61,500

Anexo C. Simbología Matemática

La tabla proporciona una lista de símbolos junto con sus respectivas descripciones utilizadas en el contenido proporcionado. Aquí hay una explicación detallada de algunos de los símbolos clave:

Símbolo	Descripción
$u(x, t)$	Altura de la onda en función de la posición x y el tiempo t en el contexto de las ecuaciones Korteweg-de Vries (KdV).
$\theta(x, t)$	Función que describe la perturbación en el campo en el contexto de las ecuaciones de Sine-Gordon.
$\psi(x, t)$	Función de onda en el contexto de la ecuación de Schrödinger no lineal.
$V(x)$	Potencial en la ecuación de Schrödinger no lineal.
ω	Parámetro que aparece en la ecuación de Sine-Gordon.
β, ρ	Parámetros en las ecuaciones de Transformación de Bäcklund relacionadas con la Sine-Gordon.
m	Masa en la ecuación de Schrödinger no lineal.
g	Parámetro no lineal en la ecuación de Schrödinger no lineal.
β_2	Coefficiente de dispersión de segundo orden en la fibra óptica.
γ	Coefficiente de no linealidad en la fibra óptica.
λ	Longitud de onda de la señal en el contexto de la fibra óptica.
R	Radio de curvatura en la atenuación por curvatura.
α	Coefficiente de atenuación por curvatura o conexión en la fibra óptica.
N	Número de conexiones en la atenuación por empalmes y conectores.
D_m	Dispersión modal en fibras multimodo.
D_c	Dispersión cromática en fibras monomodo.
S	Superficie orientada en el Teorema de Stokes.
C	Curva cerrada y suave en el Teorema de Stokes.
$\vec{F}$	Campo vectorial en los Teoremas de Stokes y de la Divergencia.
$d\vec{S}$	Vector de área diferencial en el Teorema de Stokes.
dV	Elemento diferencial de volumen en el Teorema de la Divergencia.