

República Dominicana

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de
Maestría en Matemáticas

Título

Análisis de Cuadratura de Polígonos por Disección

Sustentante

Juana Vizcaíno Hidalgo

Asesor

MA. Wilson Lucilo Heredia Amparo

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

TÍTULO

ANÁLISIS DE CUADRATURA DE POLÍGONOS POR DISECCIÓN

Declaración de Autoría

Los conceptos expresados en esta investigación son de exclusiva responsabilidad del sustentante. Las citas y consultas bibliográficas se han incorporado respetando los derechos de autor.

Título

Análisis de Cuadratura de Polígonos por Disección

Tesis presentada por **Juana Vizcaíno Hidalgo** para la obtención del grado de
Magister en Matemáticas.

Composición del tribunal evaluador

Danny Daniel Manzueta

Metodología

José Miguel Gómez

Contenido

Nelson Sánchez

Redacción

Lic. Yuderka Reyes

Directora de postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos	VI
Dedicatorias	VII
Resumen	VIII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Introducción	1
1.2. Antecedentes	1
1.2.1. Antecedentes históricos	1
1.2.2. Antecedentes académicos	2
1.3. Planteamiento del problema	2
1.4. Justificación	4
1.5. Objetivos	5
1.5.1. Objetivo general	5
1.5.2. Objetivos específicos	5
1.6. Alcances y límites	5
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	6
2.1. Introducción	6
2.2. Cuadratura de polígonos	6
2.2.1. Cuadratura del triángulos	6
2.2.2. Cuadraturas del rectángulos y cuadrados	7
2.2.3. Cuadratura del octágono regular	8
2.3. Fragmentar y particionar una figura	9
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	11
3.1. Introducción	11
3.2. Método de investigación	11
3.3. Diseño de investigación	11
3.4. Tipo de investigación	11

3.5. Enfoque de investigación	12
3.6. Procedimiento de investigación	12
CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	13
4.1. Introducción	13
4.2. Figuras que resultan útil en la cuadratura de poligonos	13
4.3. Fragmentar y particionar una figura para obtener la cuadratura del triángulo	22
4.4. Rectángulo elemental que admite cuadratura real	25
4.5. Relación que existe entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular	26
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	28
5.1. Introducción	28
5.2. Conclusiones	28
5.3. Líneas futuras de investigación	30
Referencias	31
Anexos	I
Anexo A. Simbología matemática	II
Anexo B. Cronograma	III

Agradecimientos

A Dios: por ser guía, fuerza y sustento, porque siempre está conmigo de manera incondicional. Muchas gracias, por nunca abandonarme y permitir que culminaré con éxito.

Al asesor: Wilson Lucilo Heredia, por ser un gran ser humano y un excelente maestro, por estar siempre dispuesto cuando lo solicité responder a tiempo, por sus recomendaciones y su apoyo durante todo el proceso.

A los maestros: de manera especial a Francisca Medrano, Wilson Lucilo Heredia, Danny Manzueta y Víctor José Galán por ser parte esencial en esta maestría y por sus excelentes enseñanzas.

A la universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO): por brindarme la oportunidad de realizar esta maestría y convertirme en un profesional mejor preparado.

A los coordinadores: Efraín Martínez y Arismendy Batista: por ser seres humanos preparados y dedicados ofrecirme su ayuda siempre que la necesité durante todo este trayecto.

Al Ministerio de Educación Superior Ciencia y Tecnología (MESCYT): por depositar su confianza en mí brindándome esta ayuda, muchas gracias, ya que sin ustedes no hubiera sido posible.

Juana Vizcaíno Hidalgo

Dedicatorias

A Dios: por estar siempre, guiándome y librándome de todo mal en el camino, por darme fuerzas en los momentos difíciles, aquellos en los que sentía que ya no podía más. Gracias, por nunca dejarme sola y ayudarme a culminar con éxito esta maestría.

A Juan Ramón Candelario Ramos, por ser esposo ejemplar y parte esencial de este logro desde el comienzo, nunca me dejó sola siempre estuvo a mi lado apoyándome en todo lo que estuvo a su alcance y dándome fuerzas en los momentos que sentía que no podía seguir. Gracias querido esposo por aguantarme y soportar todos esos momentos de estrés y desesperación y aun así mantenerte conmigo durante estos dos años. Eres el mejor, te quiero mucho.

A los hijos: Lannel Isaac Candelario Vizcaíno y Kelmy Lianna Frías Vizcaíno, por ser el motor que me impulsa a ser mejor persona, por esperarme con los brazos abiertos y con todo su cariño y por tener que soportar todos esos momentos en los que no estuve a su lado. Muchas gracias, los amo. A la doña: Leónidas María Hidalgo, por siempre estar ahí para mí apoyándome y brindándome su ayuda incondicional, te quiero mamá.

Esmeralda, por ser amiga y brindarme todo su apoyo ayudándome con los hijos cada vez que la necesité, por sus oraciones y consejos. Muchas gracias, la quiero mucho.

A los compañeros: Yadiris y Ronaldo, por ser los primeros en brindarme su apoyo y continuar hasta el final; a la sierva Diosmery, por ser un apoyo durante el transcurso de esta maestría, y de una manera especial a Yomairis Morales, Diosmery del Carmen, Rony, José Manuel y Julio, por ser mis amigos y hacerme sentir parte de ustedes, por todo el apoyo que me brindaron y por hacer que esta maestría fuera más divertida. Muchas gracias a todos.

República Dominicana

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL

Juana Vizcaíno Hidalgo

Sustentante

MA. Wilson Heredia Amparo

Asesor

RESUMEN

En esta investigación titulada “Análisis de Cuadratura de Polígonos por Disección”, el objetivo general fue analizar los polígonos que pueden ser sometidos a cuadratura al fragmentar y particionar una figura por disección. Para lograr este objetivo, se plantearon objetivos específicos que abordaron la identificación de figuras útiles en la cuadratura de polígonos, el análisis de la fragmentación y partición de figuras para obtener la cuadratura del triángulo, la explicación de cuándo un rectángulo elemental admite cuadratura real, y la demostración de la relación entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular.

La metodología utilizada fue de tipo deductivo, con un enfoque cualitativo y un diseño no experimental. Se llevó a cabo un análisis detallado de dos enfoques fundamentales para calcular el área de polígonos: cuadratura por triángulos y cuadratura por rectángulos, ambos bajo la técnica de disección. Se demostró la versatilidad de la cuadratura por disección, incluyendo métodos específicos como la fragmentación mediante medianas y alturas, así como la cuadratura real de rectángulos.

Finalmente, el estudio de la relación entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular reveló información valiosa sobre las proporciones y áreas de estas figuras geométricas. La investigación concluyó resaltando la importancia de condiciones clave, como la regularidad y simetría de los polígonos, para la aplicabilidad de la cuadratura por disección.

Palabras clave: Cuadratura. Polígonos. Disección. Fragmentación. Particionamiento. Figuras. Triángulo. Rectángulo Elemental. Cuadratura real.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción

En el primer capítulo, se presentan los antecedentes, el planteamiento del problema, los objetivos, la justificación y el alcances y límites de la misma.

Se hizo un estudio sobre la cuadratura de polígono por disección, donde básicamente se mostraron las figuras que resulten útil, las figuras que se puedan fragmentar y particionar, además se pretende conocer cuando un rectángulo admite cuadratura real y finalmente se presenta de manera equivalente la relación que existe entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular.

1.2. Antecedentes

1.2.1. Antecedentes históricos

Johann Friedrich Lorenz describe en su libro Euklids Elemente, del año 1781, la solución de esta cuadratura “A partir de una figura rectilínea dada A , determinar un cuadrado de igual área”.

Los siguientes teoremas matemáticos de Euclides se utilizan para abordar la tarea: Conversión de un triángulo en un paralelogramo con la misma área. Conversión de una figura lineal en un paralelogramo con la misma área y el teorema de la media geométrica en un triángulo rectángulo.

Los últimos diez teoremas del Libro I de los Elementos de Euclides resultan ser testimonios de la preocupación del hombre por la transformación de figuras equiextensas y especialmente por cuadrar una figura plana utilizando regla y compás.

1.2.2. Antecedentes académicos

De acuerdo con Agreda y Jácome (2008) en su estudio sobre “Cuadratura de Polígonos por Disección” de la Universidad de Nariño, cuyo objetivo fue Aplicar la cuadratura de Polígonos por Disección, concluye que por increíble que parezca la solución de la cuadraturas de polígono depende de la disección, ya que, subyacen altos conceptos y principios matemáticos. La disección aseguró que al cortar una figura y reordenar las piezas, el área total no cambia.

En este sentido Mazzaglia (2020) en su estudio titulado “Análisis comparativo de la Arquimática y la historia de las matemáticas” Ediciones Universidad Católica de Salta, cuyo objetivo se fundamenta en comparar la Arquimática con las distintas cultura, en el mismo se concluye que la cultura vinculada a la matemática es posible ser desarrollada toda vez que la matemática como forma de comunicación y expresión, como herramienta tecnológica y base de estructuras lógicas, es un componente más de la cultura.

para Sevilla, et. al, (2021) en su revista sobre “Puzles de cuadraturas” de la revista digital SUMA, cuyo objetivo fue Analizar las cuadraturas del triángulo, del pentágono, del hexágono y del octógono, en la que se concluye que los puzzles son herramientas que desde la infancia son utilizadas por los niños, ya que estas piezas irregulares despiertan la curiosidad, motivando a los aspectos lúdico y en si a utilizar con mas frecuencia actividades motivante con gran potencial didáctico.

1.3. Planteamiento del problema

La resolución de la cuadratura de un polígono o de figuras lineales constituye un problema abordado en la geometría clásica. Este proceso se basa en la aplicación de las herramientas euclidianas, como la regla y el compás, con el objetivo de trazar un cuadrado cuya área sea equivalente a la del polígono dado, ya sea convexo o cóncavo.

La cuadratura de polígonos plantea interrogantes cruciales que merecen una atención específica. En primer lugar, es imperativo indagar sobre qué figuras geométricas resultan más eficientes en el proceso de cuadratura, buscando identificar aquellas formas que simplifican el cálculo del área de polígonos complejos. Este análisis inicial contribuyó a establecer las bases para abordar de manera más efectiva el problema general de la cuadratura de polígonos.

En el contexto de la fragmentación y partición de figuras, se presenta la necesidad de explorar estrategias específicas para obtener la cuadratura de triángulos. Este segundo aspecto del problema se enfoca en desarrollar métodos que permitan descomponer y analizar triángulos de manera eficiente, ampliando así la comprensión de la cuadratura en situaciones que involucran esta forma geométrica básica.

Otro aspecto relevante es determinar las condiciones en las cuales un rectángulo elemental puede ser efectivamente utilizado para la cuadratura de polígonos. Aquí se busca establecer las propiedades y restricciones que hacen que la aproximación mediante rectángulos sea válida, contribuyendo a la optimización de técnicas de cuadratura. Y por último, se plantea la necesidad de examinar la relación matemática entre la cuadratura de un cuadrado y la de un octágono regular.

Por las razones expuestas antes presentada es interesante preguntarse ¿Cuáles condiciones deben cumplir los polígonos para poderseles aplicar la cuadratura al fragmentar y particionar una figura por disección? y de formas mas puntual se puede preguntar por:

1. ¿Cuáles figuras resultan útil en la cuadratura de polígonos?
2. ¿Cómo fragmentar y particionar una figura para obtener la cuadratura del triángulo?
3. ¿Cuándo un rectángulo elemental admite cuadratura real?
4. ¿Cuál es la relación que existe entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono

regular?

1.4. Justificación

La investigación sobre la cuadratura de polígonos mediante técnicas de disección se presenta como un campo crucial, dada su relevancia en el ámbito matemático y su potencial impacto en diversas áreas. En primer lugar, el entendimiento de las figuras geométricas más eficientes para la cuadratura contribuyó significativamente a la resolución de problemas complejos en matemáticas y ciencias aplicadas. Esta comprensión puede facilitar la optimización de procesos de medición de áreas en distintos contextos, desde la ingeniería hasta la física y la cartografía.

En el caso específico de la República Dominicana, la investigación adquiere importancia al proporcionar herramientas matemáticas avanzadas que pueden aplicarse en el desarrollo de proyectos y análisis territoriales. La precisión en la cuadratura de polígonos es esencial para la planificación urbana, la gestión de recursos naturales y la toma de decisiones estratégicas en el país.

En el ámbito académico, la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental - UTECO se beneficia al liderar investigaciones que contribuyen al avance del conocimiento en disciplinas científicas. La relevancia de la cuadratura de polígonos no solo consolida la posición de la institución como un centro de excelencia en educación superior, sino que también brinda a estudiantes y profesores herramientas teóricas y prácticas para abordar problemas matemáticos complejos.

Además, la comunidad local se beneficia al contar con profesionales formados en técnicas de cuadratura de polígonos, ya que estos conocimientos pueden aplicarse en proyectos comunitarios, desarrollo urbano sostenible y la resolución de desafíos específicos en la región. La investigación no solo impacta el ámbito académico, sino que también tiene un alcance tangible en la mejora de la calidad de vida de la comunidad.

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Analizar los polígonos que se pueden aplicar la cuadratura al fragmentar y particionar una figura por disección

1.5.2. Objetivos específicos

1. Mostrar las figuras que resultan útil en la cuadratura de polígonos.
2. Analizar como fragmentar y particionar una figura para obtener la cuadratura del triángulo.
3. Explicar cuando un rectángulo elemental admite cuadratura real.
4. Mostrar equivalentemente la relación que existe entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular.

1.6. Alcances y límites

Esta investigación pertenece a las matemáticas y en específico al campo de la geometría y de manera puntual centra su atención en la cuadratura de polígonos por disección, la misma se limita identificar que figuras resultan útil, como fragmentarla y mostrar su equivalencia entre figuras.

En esta investigación se presentan casos particulares de cuadraturas por la vía de la disección y con la utilización de elementos teóricos innovadores al establecer un procedimiento general para cuadrar un rectángulo cualquiera sin importar el valor de la razón entre la longitud de sus lados.

CAPÍTULO II MARCO REFERENCIAL

2.1. Introducción

El presente capítulo sustenta teóricamente este tema de investigación, el cual involucra el análisis de la cuadratura de polígonos por disección, esta se obtiene a través de una búsqueda incansable de recursos bibliográficos, cuyo propósito principal es apoyar de manera teórica esta investigación mediante definición y teoremas.

2.2. Cuadratura de polígonos

La cuadratura de polígonos según Agreda y Jácome (2008), se refiere al proceso de encontrar el área de un polígono, es decir, la medida bidimensional del espacio encerrado por sus lados. Dependiendo de la forma del polígono, existen fórmulas específicas para calcular su área.

2.2.1. Cuadratura del triángulos

Definición 2.2.1 (Triángulo.) Un triángulo es el polígono más simple, y su área se puede calcular utilizando la fórmula de la base por la altura dividida por 2, ($A = (\text{base} * \text{altura}) / 2$). (Rosa, 1989).

Teorema 2.2.1 (Teorema de Pitágoras.) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (c) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (a y b): $c^2 = a^2 + b^2$. (Cañadas, 2001).

Teorema 2.2.2 (Teorema de la Bisectriz.) La bisectriz de un ángulo en un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados. (Cañadas, 2001).

Teorema 2.2.3 (Teorema de la Altura.) La altura de un triángulo desde un vértice al lado opuesto es perpendicular a ese lado y divide el triángulo en dos triángulos semejantes. (Massa, 2017).

Teorema 2.2.4 (Teorema de Tales.) Si una línea paralela corta dos lados de un triángulo, entonces divide esos lados en segmentos proporcionales. (Filloy y Lema, 1996).

Definición 2.2.2 (Cuadratura del triángulo.) La cuadratura del triángulo generalmente se refiere al problema matemático de encontrar el área de un triángulo (Masa, 2017). Para calcular el área de un triángulo, puedes usar la fórmula básica de área para triángulos, que es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{Base} \times \text{Altura} \quad (2.2.1)$$

Donde la base es la longitud de uno de los lados del triángulo, y la altura es la distancia perpendicular desde la base hasta el vértice opuesto.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Herón.) De acuerdo con Palomá y Serrano (2017). Dados los lados de un triángulo a, b y c , y denotando s como el semiperímetro (mitad del perímetro), el área del triángulo (A) se puede calcular mediante la fórmula de Herón:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (2.2.2)$$

donde s es el semiperímetro del triángulo

$$s = \frac{a + b + c}{2}. \quad (2.2.3)$$

2.2.2. Cuadraturas del rectángulos y cuadrados

Definición 2.2.3 (Área de un rectángulos o cuadrados.) El área de un rectángulo o cuadrado se calcula multiplicando la longitud de la base por la altura ($A = \text{base} * \text{altura}$). (Aya, Echeverry y Samper, 2016).

Teorema 2.2.6 (Teorema de Pitágoras.) En el caso de un cuadrado, todos los ángulos son rectos, y se puede aplicar el Teorema de Pitágoras: la longitud de la diagonal (d) de un cuadrado con lados de longitud s es $d = \sqrt{2} \times s$. (Solís y Tapia, 2002).

Teorema 2.2.7 (Teorema del Paralelogramo.) La diagonal de un paralelogramo divide el paralelogramo en dos triángulos congruentes. (Alonso, 2019).

Teorema 2.2.8 (Teorema de la Bisectriz.) Si traza una bisectriz en un ángulo del rectángulo, divide el ángulo en dos ángulos congruentes. (Aya, Echeverry y Samper, 2016).

Teorema 2.2.9 (Teorema del Cuadrado.) En un cuadrado, todos los lados son iguales y todos los ángulos son rectos (90 grados).

Teorema 2.2.10 (Teorema de Tales.) Si una línea paralela corta dos lados de un rectángulo, entonces divide esos lados en segmentos proporcionales. (Cañadas, 2001).

Definición 2.2.4 (Cuadratura del Rectángulo.) La cuadratura del rectángulo es el problema de encontrar un cuadrado con la misma área que un rectángulo dado. (Solís y Tapia, 2002).

Definición 2.2.5 (Cuadratura del Cuadrado.) En el contexto de la cuadratura, el cuadrado no presenta un problema específico, ya que cualquier cuadrado con el mismo lado tiene automáticamente el mismo área. (Solís y Tapia, 2002).

Teorema 2.2.11 (Teorema Cuadratura del Rectángulo.) Dado un rectángulo con lados de longitud a y b , el área A del rectángulo es $A = a \times b$. La cuadratura de este rectángulo implica encontrar un cuadrado con un lado c tal que $c^2 = a \times b$. La solución es $c = \sqrt{a \times b}$. (Agreda y Jácome, 2008).

Teorema 2.2.12 (Teorema de la Cuadratura del Cuadrado.) No hay un problema de cuadratura específico para el cuadrado, ya que cualquier cuadrado con el mismo lado tiene automáticamente el mismo área que el cuadrado dado. (Alonso, 2019).

2.2.3. Cuadratura del octágono regular

Definición 2.2.6 (Área de un octágono regular.) El área (A) de un octágono regular se puede calcular con la fórmula: $A = 2 \times (\text{lado})^2 \times (1 + \sqrt{2})$, donde lado es la longitud de uno de los lados del octágono. (Fernández y Reyes, 2001).

Teorema 2.2.13 (Teorema del Ángulo Central en un Octágono Regular.) En un octágono regular, cada ángulo central (un ángulo formado por dos radios que conectan el centro del octágono con puntos adyacentes en la circunferencia) mide $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$. (Malisani, 1987).

Teorema 2.2.14 (Teorema de Pitágoras en un Triángulo Isósceles en el Octágono Regular.) Al conectar el centro de un octágono regular con dos vértices adyacentes, se forma un triángulo isósceles. Puedes usar el teorema de Pitágoras en este triángulo para relacionar la longitud de los lados y la apotema (distancia desde el centro al centro de un lado). (Vigil y Mendoza, 2023).

Definición 2.2.7 (Relación entre el Lado y la Apotema en el Octágono Regular.) La relación entre la longitud del lado (s) y la apotema (a) de un octágono regular es $a = s \times (1 + \sqrt{2})$.

Definición 2.2.8 (Cuadratura del octágono regular.) Esta aborda el desafío matemático de hallar un cuadrado cuya área sea equivalente a la de un octágono regular dado. Este problema se enmarca en el ámbito de la construcción geométrica clásica, empleando regla y compás. (Agreda y Jácome, 2008). Su área se puede calcular mediante

$$A_{\text{octágono}} = 2a^2(1 + \sqrt{2}) \quad (2.2.4)$$

Por ende, la cuadratura involucra encontrar un cuadrado con lado b tal que $b^2 = 2a^2(1 + \sqrt{2})$.

2.3. Fragmentar y particionar una figura

Definición 2.3.1 (División de una figura Geométrica.) Según Gagatsis (2015), puedes dividir una figura geométrica como un cuadrado ($ABCD$), de lado s , en dos triángulos congruentes al trazar una diagonal (AC). Esto se puede expresar mediante la fórmula del área de un triángulo: $A_{\Delta} = \frac{1}{2} \times b \times h$, donde b y h son la base y la altura del triángulo, respectivamente.

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \times s \times s = \frac{1}{2} \times s^2$$

Definición 2.3.2 (Descomposición en segmentos.) Puedes dividir una línea AB en segmentos AC y CB . La longitud de AC y CB se suma para obtener la longitud total de AB . (Altuve y Warrick, 2015). Esto se puede expresar como:

$$AB = AC + CB$$

Definición 2.3.3 (Fraccionamiento de un Área.) Según expresan Fernández y Reyes (2001), al particionar una figura bidimensional en regiones más pequeñas, el área total (A) se puede expresar como la suma de las áreas de las regiones individuales.

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Definición 2.3.4 (División en Formas Simples.) Una figura compleja se puede dividir en formas más simples, como triángulos o cuadriláteros. (Altuve y Warrick, 2015). Suponga que una figura F se divide en n subfiguras, entonces:

$$A_F = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Definición 2.3.5 (Descomposición en Polígonos.) Según Vigil y Mendoza (2023), puedes descomponer un polígono (P) en triángulos ($T_1, T_2, \dots, T_n$). El área total del polígono se expresa como la suma de las áreas de los triángulos.

$$A_P = A_{T_1} + A_{T_2} + \dots + A_{T_n}$$

Definición 2.3.6 (Partición Jerárquica.) Adoptar un enfoque jerárquico implica subdividir una figura en partes más grandes y luego subdivide cada parte en segmentos más pequeños. (Agreda y Jácome, 2008). Esto se puede expresar mediante la recursión:

$$A_{\text{total}} = A_{\text{subfigural}} + A_{\text{subfigura2}} + \dots$$

Teorema 2.3.1 (Teorema de Ceva.) Según Hernández (2021). En un triángulo ABC , sea P un punto en el lado BC , Q en el lado CA y R en el lado AB . Las cevianas AP , BQ y CR son concurrentes si y solo si se cumple la siguiente relación:

$$\frac{BC}{AC} \cdot \frac{CA}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} = 1 \quad (2.3.5)$$

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se describen los aspectos metodológicos que marcaron el desarrollo de esta investigación. En el mismo se abordó: el diseño, tipo de estudio, método, enfoque y procedimientos de la misma. Delimitando así, el formato de la presente tesis.

3.2. Método de investigación

El presente estudio se enmarcó en el método deductivo con una mirada de lo general a lo particular. (Sanguino, 2020), explica que “el método deductivo es la forma más lógica de encontrar la solución al problema planteado. Consiste en hacer suposiciones sobre las posibles soluciones al problema” (p. 78).

3.3. Diseño de investigación

Se desarrolló bajo un diseño no experimental porque las variables de estudio no fueron manipuladas (Hernández, Sampieri y Torres, 2018). Esto se debe a un estudio teórico, abstracto y transversal, ya que la información documental se recopiló en un solo instante.

3.4. Tipo de investigación

La investigación fue de tipo documental, exploratoria y explicativa. Documental: Por promover la exploración de diversos recursos de investigación relacionados con el tema, brindó la orientación necesaria para hacer posible este trabajo. Exploratorio: Porque es necesario registrar temas que rara vez se estudian en esta línea de investigación. Explicativo, porque permitió analizar la cuadratura de polígonos por Diseción. (Nieto, 2018).

3.5. Enfoque de investigación

Esta investigación adoptó un enfoque cualitativo y como expresa Alonso (2019), la investigación cualitativa es aquella donde no se manipulan variables.

3.6. Procedimiento de investigación

Para llevar a cabo esta investigación se consideran los siguientes procedimientos:

- Se solicitó el tema de investigación y asignación de asesor.
- Se recopilan datos e informaciones documentales.
- Se elaboró y entregó un anteproyecto.
- Se corrigieron las sugerencias realizadas por los jurados.
- Finalmente, se procedió a verificar el cumplimiento de los objetivos mediante análisis y discusión de los resultados.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

Este capítulo se centra en el análisis de la Cuadratura de Polígonos por Diseción. Se incluyen figuras que resultan útiles en el proceso de cuadratura de polígonos, destacando aquellos que pueden ser fragmentados y particionados de manera eficiente. Además, se aborda el tema de cuándo un rectángulo elemental permite una cuadratura real. Por último, se examina la relación existente entre la cuadratura de un cuadrado y la de un octágono regular.

4.2. Figuras que resultan útil en la cuadratura de poligonos

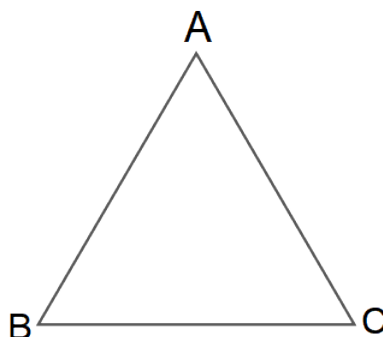
En el contexto de la cuadratura de polígonos por disección, las figuras que resultan útiles son aquellas que facilitan el proceso de subdivisión y partición del polígono en cuestión. Estas figuras suelen ser formas geométricas más simples o patrones específicos que permiten dividir el polígono original en partes más manejables, simplificando así el cálculo de la cuadratura.

La división de un polígono en triángulos es una estrategia efectiva para calcular áreas, ya que la fórmula para el área de un triángulo es simple y bien conocida.

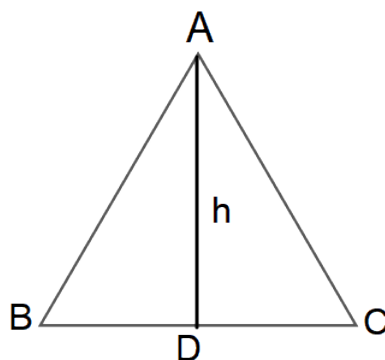
Teorema 4.2.1 (Área de un triángulo.) El teorema fundamental relacionado con triángulos es el cálculo del área, que se puede expresar mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$$

Demostración: Considere un triángulo ABC con base BC y altura h medida desde el vértice A hasta la base BC , como se muestra en la siguiente figura:



Dividir el triángulo: Dibuje una línea desde el vértice A perpendicular a la base BC , dividiendo el triángulo en dos triángulos más pequeños, ABC y ABD , donde D es el punto de intersección entre la línea perpendicular y la base BC .



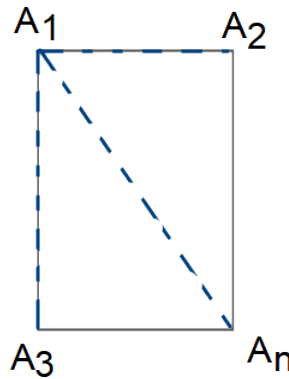
Triángulo ABC : El área de ABC es igual a la mitad del área del paralelogramo $ABDC$, ya que ambos comparten la misma base BC y la misma altura h . Por lo tanto, el área de ABC es $\frac{1}{2} \times BC \times h$.

Fórmula del área del triángulo: Ahora, recordando que el área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo $ABDC$, se puede expresar el área del triángulo como: Área $ABC = \frac{1}{2} \times BC \times h$.

Por tanto, se ha demostrado que el área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$. Dado que este razonamiento es válido para cualquier triángulo, se ha demostrado el teorema 4.2.1 de que el área de un triángulo se puede calcular utilizando la fórmula dada en la ecuación 2.2.1

Teorema 4.2.2 (Cuadratura de polígonos por triángulos.) Cualquier polígono puede descomponerse en un conjunto de triángulos, y la suma de las áreas de estos triángulos es igual al área del polígono original.

Demostración: Considere un polígono cualquiera. Llame P y suponga que tiene n vértices: $A_1, A_2, \dots, A_n$. Una un vértice arbitrario, por ejemplo, A_1 , con todos los demás vértices adyacentes, creando $n - 2$ triángulos como se muestra a continuación:

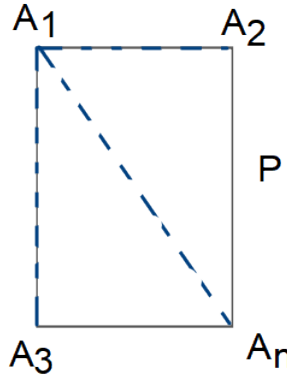


Triángulos Interiores: La unión de A_1 con los vértices adyacentes divide el polígono en $n - 2$ triángulos. Cada triángulo $A_1A_iA_{i+1}$ forma parte del polígono original P .

Triángulos Exteriores: También se forman dos triángulos adicionales $A_1A_2A_n$ y $A_1A_nA_{n-1}$, que no forman parte del polígono original pero se pueden considerar parte de la cuadratura.

Área del Polígono Original: El área total del polígono P es igual a la suma de las áreas de los triángulos interiores y exteriores. La suma de las áreas de los triángulos interiores es igual al área del polígono original.

$$\text{Área } P = \sum_{i=2}^{n-1} \text{Área } A_1A_iA_{i+1} + \text{Área } A_1A_2A_n + \text{Área } A_1A_nA_{n-1} \quad (4.2.1)$$



Esto se puede expresar de manera más general como:

$$\text{Área } P = \sum_{i=2}^{n-1} \text{Área } A_1 A_i A_{i+1} + \text{Área } A_1 A_2 A_n + \text{Área } A_1 A_n A_{n-1} \quad (4.2.2)$$

Por tanto, se ha demostrado que el polígono P se puede descomponer en un conjunto de triángulos, y la suma de las áreas de estos triángulos, tanto interiores como exteriores, es igual al área del polígono original.

Ejemplo 4.2.1 Considere un polígono irregular con vértices en $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, 1)$, y $D(0, 2)$. Se puede dividir este polígono en dos triángulos: $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$. Área de $\triangle ABC$:

$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2} \times \text{base } AB \times \text{altura } C \quad (4.2.3)$$

Área de $\triangle ACD$:

$$\text{Área } ACD = \frac{1}{2} \times \text{base } AC \times \text{altura } D \quad (4.2.4)$$

La cuadratura total del polígono fue la suma de estas áreas individuales. Área_{Total} = Área_{ABC} + Área_{ACD} Este enfoque demuestra cómo la cuadratura de un polígono irregular puede lograrse mediante la cuadratura de triángulos individuales.

■ **Triángulo $\triangle ABC$:**

Observe con mas detalle el ejemplo 4.2.1: Base_{AB} : Distancia entre A y B base_{AB} = $|B_x - A_x| = |2 - 0| = 2$. Altura_C : Distancia vertical desde C hasta la línea que

contiene la base AB altura $C = |C_y - A_y| = |1 - 0| = 1$. Área $_{ABC} = \frac{1}{2} \times \text{base}_{AB} \times \text{altura}_C = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$.

■ **Triángulo $\triangle ACD$:**

En este triángulo la base $_{AC}$: Distancia entre A y C base $_{AC} = |C_x - A_x| = |1 - 0| = 1$. Altura $_D$: Distancia vertical desde D hasta la línea que contiene la base $_{AC}$ altura $_D = |D_y - A_y| = |2 - 0| = 2$. Área $_{ACD}$: Área $_{ACD} = \frac{1}{2} \times \text{base}_{AC} \times \text{altura}_D = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$.

■ **Cuadratura total**

La cuadratura total del polígono fue la suma de las áreas individuales de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ACD$:

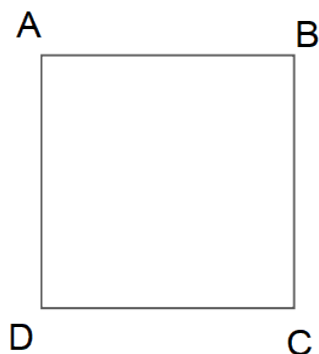
$$\text{Área}_{\text{Total}} = \text{Área}_{ABC} + \text{Área}_{ACD} = 1 + 1 = 2.$$

Por lo tanto, la cuadratura total del polígono irregular es 2 unidades cuadradas, obtenida al dividir el polígono en dos triángulos y sumar sus áreas individuales.

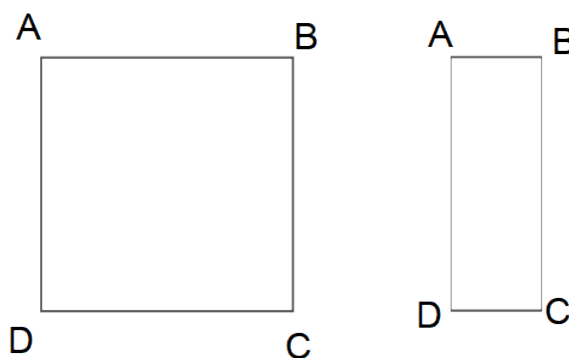
Teorema 4.2.3 (Cuadratura de un Rectángulo.) Para un rectángulo con lados de longitud a y b , el área se calcula mediante la fórmula: Área

$$\text{Área} = a \times b \tag{4.2.5}$$

Demostración: Considere un rectángulo con lados de longitud a y b . Etiquete los vértices del rectángulo como A, B, C , y D , como se muestra a continuación:



División en Rectángulos más Pequeños: Se puede dividir este rectángulo en a rectángulos más pequeños, cada uno de longitud b , como se indica a continuación:



Área de un rectángulo pequeño: Cada uno de estos rectángulos más pequeños tiene un área igual a b , ya que la longitud de un lado es b y la longitud del otro lado es a (la anchura del rectángulo original).

Número total de rectángulos pequeños: Hay a de estos rectángulos pequeños.

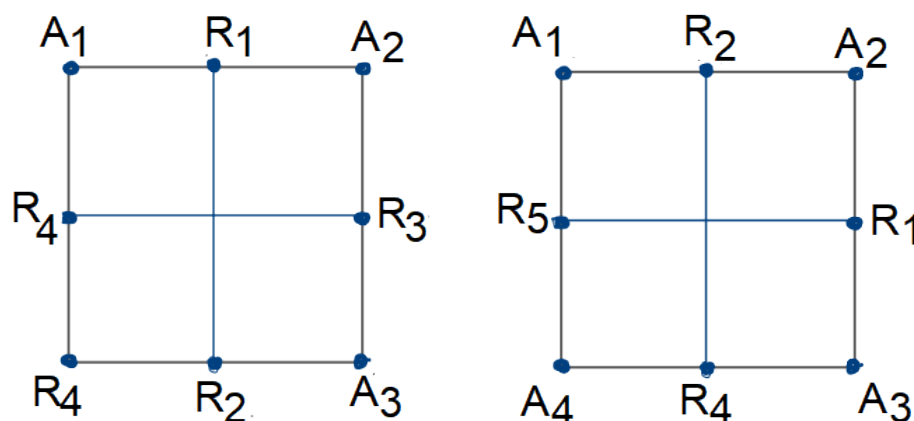
Área total: La suma total de las áreas de los rectángulos pequeños es $a \times b$.

Por tanto, se ha demostrado que el área total del rectángulo es igual a $a \times b$, confirmando la fórmula dada por el teorema 4.2.3

Teorema 4.2.4 (Cuadratura de polígonos por rectángulos.) Cualquier polígono puede aproximarse o descomponerse en una serie de rectángulos, y la suma de las áreas de estos rectángulos es una aproximación del área del polígono original.

Demostración: Considere un polígono arbitrario con vértices $A_1, A_2, \dots, A_n$.

División del Polígono. Dibuje una serie de rectángulos dentro y alrededor del polígono, como se muestra a continuación:



Áreas de los Rectángulos: Calcule las áreas de cada uno de estos rectángulos:

R_1 : Área $A_1A_2 \times$ altura mínima

R_2 : Área $A_1A_4 \times$ altura mínima

R_3 : Área $A_2A_3 \times$ altura mínima

R_4 : Área $A_3A_4 \times$ altura mínima

R_5 : Área $A_1A_2A_3A_4$

Suma de las Áreas de los Rectángulos: La suma de las áreas de los rectángulos es:

$$\text{Área total de los rectángulos} = \text{Área } R_1 + \text{Área } R_2 + \text{Área } R_3 + \text{Área } R_4 + \text{Área } R_5$$

$$\text{Área total de los rectángulos} = \text{Área } R_1 + \text{Área } R_2 + \text{Área } R_3 + \text{Área } R_4 + \text{Área } R_5$$

polígono

Por tanto, se ha demostrado que cualquier polígono puede aproximarse o descomponerse en una serie de rectángulos, y la suma de las áreas de estos rectángulos es una buena aproximación del área del polígono original.

Ejemplo 4.2.2 (Cuadratura de un polígono irregular usando rectángulos.)

Considere un polígono irregular con vértices en $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$, y $D(0,2)$. Aproximar el área de este polígono irregular dividiéndolo en varios rectángulos.

Para esto se deben trazar líneas horizontales y verticales para formar cuatro rectángulos que cubren el área del polígono.

■ **Área de cada rectángulo:**

$$\text{Área}_{rect1} = \text{base}_{AB} \times \text{altura}_0$$

$$\text{Área}_{rect2} = \text{base}_{BC} \times \text{altura}_1$$

$$\text{Área}_{rect3} = \text{base}_{CD} \times \text{altura}_0$$

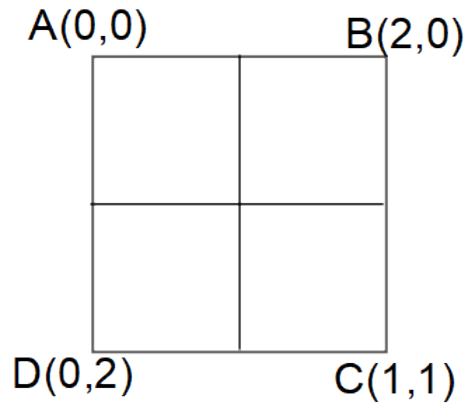
$$\text{Área}_{rect4} = \text{base}_{DA} \times \text{altura}_2$$

La cuadratura total del polígono fue la suma de estas áreas individuales.

$$\text{Área}_{\text{Total}} = \text{Área}_{\text{Rect1}} + \text{Área}_{\text{Rect2}} + \text{Área}_{\text{Rect3}} + \text{Área}_{\text{Rect4}}$$

Este enfoque demuestra cómo la cuadratura de un polígono irregular puede aproximarse mediante la cuadratura de rectángulos que cubren su área. Ahora bien, con más detalles, dado el polígono irregular con vértices $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$ y $D(0,2)$, se aproxima su área dividiéndolo en cuatro rectángulos mediante líneas horizontales y verticales.

Paso 1: División del polígono en rectángulos



Se trazan líneas horizontales y verticales para formar cuatro rectángulos:

- Rectángulo 1 (Rect1): Base = BC , Altura = $|C_y - D_y|$
- Rectángulo 2 (Rect2): Base = $|C_x - B_x|$, Altura = $|C_y - A_y|$
- Rectángulo 3 (Rect3): Base = $|A_x - D_x|$, Altura = $|A_y - C_y|$
- Rectángulo 4 (Rect4): Base = $|B_x - A_x|$, Altura = $|A_y - D_y|$

Paso 2: Áreas de los Rectángulos

- Rectángulo 1 (Rect1): Área_{Rect1} = base_{BC} × altura₁ = $|1 - 2| \times |1 - 2| = 1$
- Rectángulo 2 (Rect2): Área_{Rect2} = base_{CB} × altura₂ = $|1 - 2| \times |1 - 0| = 1$
- Rectángulo 3 (Rect3): Área_{Rect3} = base_{AD} × altura₃ = $|0 - 0| \times |2 - 0| = 0$
- Rectángulo 4 (Rect4): Área_{Rect4} = base_{BA} × altura₄ = $|2 - 0| \times |2 - 0| = 4$

Paso 3: Suma de las Áreas de los Rectángulos

$$\text{Área}_{\text{Total}} = \text{Área}_{\text{Rect1}} + \text{Área}_{\text{Rect2}} + \text{Área}_{\text{Rect3}} + \text{Área}_{\text{Rect4}}$$

Área_{Total} = $1 + 1 + 0 + 4 = 6$. La cuadratura total del polígono irregular, aproximada mediante la suma de las áreas de los cuatro rectángulos, es de 6 unidades cuadradas.

4.3. Fragmentar y particionar una figura para obtener la cuadratura del triángulo

Fragmentar y particionar un triángulo para obtener su cuadratura implica dividirlo en componentes más simples cuyas áreas se puedan calcular de manera más sencilla. En esta investigación se presentan dos enfoques comunes para fragmentar y particionar un triángulo:

- **Enfoque 1: División en Triángulos Menores**

División por Medianas: Traza las medianas del triángulo, que son las líneas que conectan cada vértice con el punto medio del lado opuesto. El triángulo original se divide así en tres triángulos más pequeños, cada uno con la mitad del área del triángulo original.

Teorema 4.3.1 (División por medianas.) Dado un triángulo ABC , las medianas AD , BE , y CF se intersecan en un punto llamado el centroide G . Este punto divide cada mediana en una proporción de $2 : 1$, donde la parte más corta está más cerca del vértice y la parte más larga está más cerca del punto medio del lado opuesto. Además, el triángulo original se divide en seis triángulos más pequeños, cada uno con la mitad del área del triángulo original.

Demostración: Existencia del Centroid G : La existencia del centroide puede demostrarse utilizando el Teorema de Ceva (Teorema 2.3.1). Las medianas siempre se intersectan en un punto dentro del triángulo.

Proporciones de División de las Medianas: Sea M el punto medio de BC . Por la propiedad de las medianas, AM y EF son medianas del triángulo ABC . La razón en que AM divide a BC es $1 : 1$, y la razón en que EF divide a BC es $2 : 1$. Entonces, A es el punto medio de EF .

Triángulos Resultantes: Al conectar A , B , y C con G , se obtienen seis triángulos más pequeños: AGB , AGC , BGC , AGE , BGF , y CGE . Cada uno de estos triángulos tiene la mitad del área del triángulo original.

Ejemplo 4.3.1 Considere un triángulo ABC con $AB = 6$, $BC = 8$, y $AC = 10$. La mediana AD se traza desde A al punto medio de BC .

Cálculo de Puntos y Longitudes: M , el punto medio de BC , es $M(4, 0)$. D , el punto de intersección de AM y BC , es $D(4, 0)$.

- Áreas de triángulos resultantes:

$$\text{Área de } ABC : \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24.$$

$$\text{Área de } AGB : \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6.$$

$$\text{Área de } AGC : \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10.$$

$$\text{Área de } BGC : \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8.$$

$$\text{Área de } AGE : \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6.$$

$$\text{Área de } BGF : \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12.$$

$$\text{Área de } CGE : \frac{1}{2} \times 10 \times 2 = 10.$$

Verificación del Teorema: Suma de áreas de los triángulos resultantes: $6 + 10 + 8 + 6 + 12 + 10 = 52$. - La mitad del área de $ABC : \frac{1}{2} \times 24 = 12$.

Teorema 4.3.2 (División por Alturas.) Dado un triángulo ABC , trazar las alturas AD , BE , y CF desde los vértices A , B , y C respectivamente. Estas alturas son perpendiculares a los lados opuestos. El triángulo original se divide en tres triángulos más pequeños: ADC , BDA , y CEB , y cada uno tiene la mitad del área del triángulo original.

Demostración: Perpendicularidad de las Alturas: Por la propiedad de las alturas, las alturas AD , BE , y CF son perpendiculares a los lados BC , CA , y AB respectivamente.

Intersección en un Punto: Las alturas siempre se intersectan en un punto llamado ortocentro H . Esto puede demostrarse utilizando propiedades geométricas.

División del Triángulo: Al trazar las alturas, se dividen los lados del triángulo en segmentos proporcionales, y el triángulo se divide en tres triángulos más pequeños: ADC , BDA , y CEB . La razón de división es 1 : 1 en cada altura, dividiendo el triángulo en seis triángulos más pequeños.

Áreas de los Triángulos Resultantes: Cada uno de los triángulos ADC , BDA , y CEB tiene la mitad del área del triángulo original.

Ejemplo 4.3.2 Considere un triángulo ABC con $AB = 5$, $BC = 12$, y $CA = 13$. Las alturas AD , BE , y CF se trazan desde los vértices A , B , y C respectivamente.

- Áreas de los Triángulos Resultantes:

$$\text{Área de } ABC : \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30.$$

$$\text{Área de } ADC : \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30.$$

$$\text{Área de } BDA : \frac{1}{2} \times 13 \times 5 = 32.5.$$

$$\text{Área de } CEB : \frac{1}{2} \times 13 \times 12 = 78.$$

La suma de las áreas de los triángulos resultantes es $30 + 30 + 32.5 + 78 = 170.5$, que es aproximadamente la mitad del área del triángulo original, confirmando el Teorema de División por Alturas.

- **Enfoque 2: División por triángulos similares**

Teorema 4.3.3 (División por triángulos similares.) Dado un triángulo ABC , puedes dividir el triángulo en triángulos similares mediante la traza de líneas paralelas a los lados desde un punto dentro del triángulo. La relación de semejanza entre los triángulos resultantes es constante, y la suma de las áreas de estos triángulos similares es igual al área del triángulo original.

Ejemplo 4.3.3 Considere el triángulo ABC con $AB = 6$, $BC = 8$, y $CA = 10$. Seleccione un punto P dentro del triángulo y trace líneas paralelas a los lados.

- Áreas de Triángulos Similares:

Área de $\triangle ABC : \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$.

Área de $\triangle ABD : \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12$.

Área de $\triangle BDC : \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$.

Área de $\triangle CAD : \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$.

La suma de las áreas de $\triangle ABD$, $\triangle BDC$, y $\triangle CAD$ es $12 + 8 + 8 = 28$, que es igual al área del triángulo original.

4.4. Rectángulo elemental que admite cuadratura real

Un rectángulo elemental admite cuadratura real cuando su área se puede calcular de manera exacta utilizando fórmulas matemáticas o métodos algebraicos. En otras palabras, un rectángulo elemental permite una cuadratura real cuando es posible expresar su área como una función algebraica de las longitudes de sus lados.

Teorema 4.4.1 (Cuadratura de rectángulos elementales.) El área de un rectángulo con lados de longitud a y b es dada por la fórmula

$$A = \int_0^a \int_0^b dx dy = \int_0^a \left(\int_0^b dy \right) dx = \int_0^a b dx = a \times b \quad (4.4.6)$$

Demostración: Dada la integral doble:

$$A = \int_0^a \int_0^b dx dy$$

Integrando primero con respecto a y y luego con respecto a x :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a \left(\int_0^b dy \right) dx \\ &= \int_0^a b dx \\ &= a \times b \end{aligned}$$

La integral $\int_0^b dy$ simplemente da b ya que está integrando y desde 0 hasta b . Luego, la integral exterior con respecto a x da a ya que está integrando x desde 0 hasta a .

Así, se ha demostrado que la integral doble de 1 sobre el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$ es igual a $a \times b$, que es consistente con la fórmula que has proporcionado. Esta demostración utiliza propiedades básicas de integrales y puede generalizarse para funciones constantes.

Ejemplo 4.4.1 Considere un rectángulo con longitud $a = 3$ y anchura $b = 4$. Utilice la fórmula del Teorema 4.4.1 para calcular el área:

$$A = a \times b = 3 \times 4 = 12$$

La integral también confirma este resultado:

$$\int_0^3 \int_0^4 dx dy = 3 \times 4 = 12$$

Esto ilustra que la fórmula del Teorema 4.4.1 es consistente con el cálculo integral del área de un rectángulo.

4.5. Relación que existe entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular

La relación que existe entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular se basa en la geometría y las proporciones de los lados de estas figuras. En particular, la relación está orientada a la relación de sus áreas.

Teorema 4.5.1 (Cuadratura de un Octágono Regular.) El área de un octágono regular con lado de longitud s se puede expresar como:

$$A_{\text{octágono}} = 2s^2(1 + \sqrt{2}) \quad (4.5.7)$$

Relación con el Cuadrado: La relación con un cuadrado de lado s está dada por la siguiente proporción:

$$\frac{A_{\text{octágono}}}{A_{\text{cuadrado}}} = \frac{2s^2(1 + \sqrt{2})}{s^2} \quad (4.5.8)$$

Simplificando esta expresión, se obtiene:

$$\frac{A_{\text{Octágono}}}{A_{\text{cuadrado}}} = 2(1 + \sqrt{2}) \quad (4.5.9)$$

Esta relación indica que el área de un octágono regular es aproximadamente 4.828 veces mayor que el área de un cuadrado con el mismo lado.

Ejemplo 4.5.1 Calcular el área de un octágono regular con lado de longitud s utilizando la fórmula proporcionada en el Teorema de la Cuadratura. Luego, comparare este área con el área de un cuadrado con el mismo lado. Tome $s = 2$ como ejemplo:

Área del Octágono: Utilizando la fórmula $A_{\text{octágono}} = 2s^2(1 + \sqrt{2})$:

$$A_{\text{octágono}} = 2 \times (2)^2 \times (1 + \sqrt{2})$$

$$A_{\text{octágono}} = 8(1 + \sqrt{2})$$

Ahora, evaluando numéricamente:

$$A_{\text{octágono}} \approx 8 \times (1 + \sqrt{2}) \approx 8 \times (1 + 1.414) \approx 8 \times 2.414 \approx 19.312$$

Área del Cuadrado: El área de un cuadrado con lado $s = 2$ es simplemente $s^2 = 2^2 = 4$.

Relación entre las Áreas:

$$\frac{A_{\text{octágono}}}{A_{\text{cuadrado}}} = \frac{19.312}{4} \approx 4.828$$

Por lo tanto, en este ejemplo, el área de un octágono regular con lado de longitud 2 es aproximadamente 4.828 veces mayor que el área de un cuadrado con el mismo lado.

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados pertinentes sobre el logro de los objetivos planteados en esta investigación.

5.2. Conclusiones

Este estudio sobre el análisis de Cuadratura de Polígonos por Disección, se ofrece una exploración detallada y significativa de dos enfoques fundamentales para calcular el área de polígonos: la cuadratura por triángulos y la cuadratura por rectángulos, ambos bajo la técnica de disección. La descomposición de polígonos en triángulos y rectángulos se presenta como una estrategia efectiva, respaldada por teoremas fundamentales del área.

La investigación destaca la versatilidad de la cuadratura por disección, incluyendo métodos específicos como la fragmentación mediante medianas y alturas. Además, se aborda la cuadratura real de rectángulos, demostrando la expresión algebraica del área en función de las longitudes de los lados. El estudio concluye con un análisis revelador de la relación entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular, proporcionando información valiosa sobre las proporciones y áreas de estas figuras geométricas. Ahora, se procede a ver con detalles los resultados alcanzados:

- Para la cuadratura por triángulos, se demostró que cualquier polígono puede descomponerse en un conjunto de triángulos, y la suma de las áreas de estos triángulos es igual al área del polígono original. Esto se basó en el teorema del área de un triángulo, que estableció que el área de un triángulo es la mitad del producto de su base y altura.

$$\text{Área del polígono} = \sum_{i=2}^{n-1} \text{Área del triángulo } A_1 A_i A_{i+1} \quad (5.2.1)$$

- Por otro lado, la cuadratura por rectángulos aproxima el área de un polígono dividiéndolo en rectángulos. Se demostró que cualquier polígono puede aproximarse mediante la suma de las áreas de estos rectángulos. Esto se basó en el teorema del área de un rectángulo, que establece que el área de un rectángulo es el producto de su base y altura.

Ambos enfoques proporcionaron métodos efectivos para calcular el área de polígonos de manera práctica y generalizada. La elección entre cuadratura por triángulos o rectángulos depende de la naturaleza del polígono y de la precisión requerida en la cuadratura.

- En cuanto a la fragmentación y partición de un triángulo para obtener su cuadratura, se logró mediante dos enfoques: la división por medianas y la división por alturas. En el primero, se evidencio que al trazar medianas desde cada vértice, se generan seis triángulos más pequeños, cada uno con la mitad del área del triángulo original. En el segundo, al trazar alturas desde cada vértice, se obtuvieron tres triángulos más pequeños, también con la mitad del área del triángulo original.
- En lo referido a la cuadratura real, se estableció que un rectángulo elemental admite cuadratura real cuando su área puede calcularse de manera exacta mediante fórmulas matemáticas o métodos algebraicos. De hecho, la cuadratura real implicó la posibilidad de expresar el área como una función algebraica de las longitudes de los lados. En el mismo sentido, por el Teorema 4.4.1 se logró calcular el área de un rectángulo con lados de longitud a y b , por medio de integrales doble, demostrando así que este proceso es consistente con el producto de las longitudes de los lados ($a \times b$).
- Por último, el estudio de la relación entre la cuadratura de un cuadrado y un octágono regular permitió obtener conclusiones significativas sobre las proporciones y áreas de estas figuras geométricas. Al utilizar el Teorema de la Cuadratura y establecer la relación de áreas entre un octágono regular y un cuadrado,

se demostró que el área del octágono es aproximadamente 4.828 veces mayor que el área del cuadrado con el mismo lado.

En cuanto al objetivo general la investigación ha revelado que para aplicar la cuadratura al fragmentar y particionar una figura por disección, es fundamental que los polígonos cumplan con ciertas condiciones clave. En primer lugar, la regularidad y simetría de los polígonos desempeñan un papel esencial, ya que facilitan el proceso de disección y contribuyen a la eficiencia del método. Además, la cantidad de lados de un polígono puede influir en la complejidad de la cuadratura, siendo algunos polígonos más propicios que otros para este tipo de aplicación. Asimismo, la investigación ha resaltado la importancia de comprender las propiedades geométricas específicas de los polígonos involucrados, ya que esto impacta directamente en la viabilidad y precisión del proceso de cuadratura.

5.3. Líneas futuras de investigación

En esta sección se presentan algunas temáticas relevantes que podrían ser interesante para otros investigadores:

- Análisis de Sensibilidad y Robustez en Métodos de Cuadratura de Polígonos mediante Estrategias de Disección.
- Impacto de la Geometría del Polígono en la Elección y Rendimiento de Métodos de Cuadratura por Disección.
- Análisis de la Convergencia y Estabilidad de Métodos de Cuadratura de Polígonos basados en la Descomposición por Disección.
- Desarrollo de un Nuevo Método de Cuadratura de Polígonos Inspirado en Técnicas de Disección Avanzadas.

Referencias

- Agreda, O. F. S., & Jácome, L. (2008). Cuadratura de Polígonos por Disección. *Sigma*, (8), 1-14.
- Alonso, R. (2019). Raíces y cuadrados. *Entorno Abierto*, 26, 8-11.
- Alonso D. (2019). Diseño de la investigación. *Con-Ciencia Serrana Boletín Científico de la Escuela Preparatoria Ixtlahuaco*, 1(2), 19-20.
- Altuve, M., & Warrick, P. (2015). Descomposición de Karhunen-Loeve de Registros Electrocardiográficos Abdominal Materno. In *Memorias del V Congreso Venezolano de Bioingeniería* (pp. 143-146).
- Aya Corredor, O., Echeverry Gaitán, A., & Samper, C. (2016). ¿ Es el cuadrado un rectángulo?. *Sophia*, 12(1), 139-158.
- Bernabeu, M., Moreno, M. F., & Llinares, S. (2018). Comprensión del concepto de polígono en niños/as de 9 años.
- Cabal Hernández, Á. M., & Hoyos Torres, M. I. (2018). Comprensión de la noción de cuadratura a través de áreas de figuras geométricas.
- Cañadas, M. C. (2001). Demostraciones del teorema de Pitágoras para todos.
- Fernández Benito, I., & Reyes Iglesias, M. E. (2001). Construcciones y disecciones del octógono. *Suma*.
- Fillooy, E., & Lema, S. (1996). El teorema de Tales: significado y sentido en un sistema matemático de signos. *Investigaciones en Matemática Educativa*, 55-75.

- Gagatsis, A. (2015). Explorando el rol de las figuras geométricas en el pensamiento geométrico. *Didáctica de la Matemática-Una mirada internacional, empírica y teórica*, 231-248.
- Hernández-Sampieri, R., & Mendoza, C. (2018). Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta.
- Malisani, E. (1987). Construcción del pentágono regular con sólo compás. *Revista de Educación Matemática (RevEM)*, 3(2), 3.
- Massa Esteve, M. R. (2017). Aspectos matemáticos del triángulo armónico de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). *Suma*, 84, 9-19.
- Mazzaglia, R. (2020). Análisis comparativo de la Arquimática y la historia de las matemáticas. Ediciones Universidad Católica de Salta.
- Palomá, L., & Serrano, F. (2017). Deducción de la fórmula de Herón a partir de las tangentes de los ángulos medios.
- Raffo, F. (2022). Método, demostración e invención: Leibniz y el tratamiento de problemas de cuadraturas. Ideas y valores: *Revista Colombiana de Filosofía*, 71(180), 97-122.
- Rico, M. M. (2020). Lectura y Lectores en la Sociedad del Conocimiento: el bestseller canónico. El caso de Harry Potter (Doctoral dissertation, Universidad de Salamanca).
- Rosa, A. M. S. (1989). La cuadratura del triángulo. Tavira: *Revista electrónica de formación de profesorado en comunicación lingüística y literaria*, (6), 49-64.
- Sanguino, N. C. (2020). Fenomenología como método de investigación cualitativa: preguntas desde la práctica investigativa. *Revista Latinoamericana de Metodología de la Investigación Social*, (20), 7-18.

- Sevilla, G. A., Martín, J. A. H., Santonja, J. M., & Redondo, A. F. A. (2021). Puzles de cuadraturas.
- Solís, F. J., & Tapia, B. (2002). Cuadratura de Rectángulos. CUBO, A Mathematical Journal, 4(1), 75-81.
- Vigil, L. C., & Mendoza, J. E. C. (2023). Ampliaciones del teorema de Pitágoras a través de la historia, para polígonos regulares. Revista Saberes APUDEP, 6(2), 8-26.

Anexos

Anexo A. Simbología matemática

Simbología matemática utilizada en el texto:

Símbolo	Significado
A	Área
a, b, c	Longitudes de los lados de un triángulo
s	Semiperímetro de un triángulo
d	Longitud de la diagonal de un cuadrado
h	Altura de un triángulo
b	Base de un triángulo
l	Longitud de un lado de un polígono
$\sqrt{\quad}$	Raíz cuadrada
$\frac{\quad}{\quad}$	Fracción
$\sum$	Notación de suma
$\text{Área}P$	Área total del polígono P
$\text{Área}A_1A_iA_{i+1}$	Área del triángulo $A_1A_iA_{i+1}$
ÁreaRect1	Área del primer rectángulo
ÁreaRect2	Área del segundo rectángulo
ÁreaRect3	Área del tercer rectángulo
ÁreaRect4	Área del cuarto rectángulo
$\int$	Símbolo de integral
$\int_0^a$	Integral definida desde 0 hasta a
$\int_0^b$	Integral definida desde 0 hasta b
dx	Diferencial de x utilizado en integrales
dy	Diferencial de y utilizado en integrales
$\triangle ABD$	Triángulo formado por los puntos A , B , y D

Anexo B. Cronograma

La realización de esta investigación requirió la elaboración y el seguimiento de un meticuloso cronograma de estudios. La estructuración de dicho cronograma no solo brindó un marco organizativo esencial, sino que también garantizó la coherencia y la progresión lógica en la ejecución de cada fase del estudio.

Cronograma de estudios	
Entrega del anteproyecto.	10-12 Noviembre, 2023.
Evaluación del Anteproyecto.	13-15 Noviembre, 2023.
Observaciones de los jurados.	16-23 Noviembre, 2023.
Elaboración del proyecto completo	26 Diciembre, 2023.
Entrega de tesis a los jurados	27-28 Diciembre, 2023.
Presentación de tesis	4-5 Enero, 2024
Entrega de tesis	9-12 Febrero, 2024