

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de
Maestría en Matemáticas.

Título

Análisis de la convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones
en torno a un punto c

Sustentante

Yomairis Morales Abreu

Asesor

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

TÍTULO

ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE TAYLOR EN LA
APROXIMACIÓN DE FUNCIONES EN TORNO A UN PUNTO c

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en la investigación, son responsabilidad exclusiva **de la** sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han incluido respetando el derecho de autor.

Título

Análisis de la convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones
en torno a un punto c

Tesis presentada por **Yomairis Morales Abreu** para la obtención del grado de
Magister en Matemáticas.

Composición del tribunal evaluador

Wilson Lucilo Heredia

Jurado de Metodología

MA. Jesús Manuel Viloría

Jurado de Redacción

MA. Danny Daniel Manzueta

Jurado de Contenidos

Lic. Yuderka Reyes

Directora de postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos	VI
Dedicatorias	VII
Resumen	VIII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Antecedentes históricos	1
1.1.2. Antecedentes académicos	2
1.2. Planteamiento del problema	4
1.3. Justificación	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivos específicos	6
1.5. Alcances y límites	6
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	7
2.1. Funciones y tipos	7
2.2. Aproximaciones de funciones	8
2.2.1. Polinomios de Taylor	10
2.2.2. Puntos críticos y tipos	11
2.2.3. El polinomio de Taylor de orden cero	14
2.2.4. El polinomio de Taylor de primer orden	15
2.2.5. Aproximaciones cuadráticas	18
2.3. Series de potencias.	19
2.3.1. Singularidad de las series de potencias	21
2.4. Intervalo de convergencias de series de potencias	21
2.5. Desarrollo de series de potencia	25
2.5.1. Desarrollo de la serie de potencia de Maclaurin	25
2.5.2. Desarrollo de la serie de Taylor	28

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	31
3.1. Método de investigación	31
3.2. Diseño de investigación	31
3.3. Tipo de investigación	31
3.4. Procedimiento de investigación	32
 CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	 33
4.1. Condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de una serie de Taylor en el entorno de un punto c	33
4.1.1. Teorema de Taylor	35
4.1.2. Radio de Convergencia	35
4.2. Técnicas o métodos específicos para optimizar la convergencia de las series de Taylor en situaciones donde esta es lenta o inadecuada. . . .	36
4.3. Casos donde la serie de Taylor ofrece una aproximación aceptable de la función en su dominio completo	37
 CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	 40
5.1. Conclusiones	40
5.2. Líneas futuras de investigaciones	41
Referencias	42
Anexos.....	I
Anexo A.....	II
Anexo B.....	III

Agradecimientos

A Dios: por las bendiciones que me das, gracias por darme sabiduría, entendimiento y fortaleza para cumplir mis sueños. A ti mi Señor te debo todo, la gloria sea contigo siempre.

Al MESCYT: por brindarme la oportunidad de continuar formándome, gracias al respaldo recibido de parte de ustedes por medio a esta BECA.

A la UTECO: por acogerme y brindarme el pan de la enseñanza, desarrollando conocimientos para ayudarnos a crecer en el ámbito profesional, personal y laboral.

Al asesor: Dr. Manuel Aurelio Diloné, por su apoyo y confianza brindada en este proceso y por recibirme y mostrarme los lineamientos necesarios para realizar un trabajo de calidad. Gracias por el tiempo y dedicación brindado.

A los profesores: por ser parte fundamental de este logro, por compartir sus conocimientos en las asignaturas cursadas, su entrega y dedicación, de manera especial a Wilson Lucillo Hedería, Danny Daniel Manzueta, Víctor José Galán y Rainier Sánchez. A mis compañeros de maestría: de manera especial a Diosmary del Carmen Ramírez, José Manuel Basora, Rony Paredes, Juana Vizcaíno y Julio Alb. Castillo, por su apoyo, amistad y ser soporte en todo momento.

En general, a todas aquellas personas que de alguna manera u otra aportaron un granito de arena para que esto fuera posible.

Yomairis Morales Abreu

Dedicatorias

A mi familia: en especial a mi madre (Eurídice Abreu) y a mi hermana mayor (Lucy Morales), por ser quienes me brindan su apoyo y amor incondicional en todo momento, por motivarme y creer en mí; a mi tía la cual es como mi segunda madre (Paula Abreu) por siempre estar al pendiente y disponible para mí, motivándome a seguir adelante y apoyándome siempre para que pueda cumplir todos mis sueños; a mis hijos (Yerinet y Yordenis) por ser el motor que impulsan mis días, dándome fuerza y sabiduría para mantenerme de pie, a ti Yerry Moscoso porque aunque no hallas llegado hasta el final acompañándome en esta travesía nunca dejaste de brindarme tu apoyo y disponibilidad para ayudarme a pesar de la distancia.

A mis compañeros y amigos: de manera especial a (Diosmary del Carmen, José Manuel y Rony) por ser mis cómplices, soporte, hermanos, por su apoyo incondicional en este y otros procesos que hemos logrado juntos, los quiero de todo corazón, sin ustedes esto no hubiese sido igual. A mi amiga (Carolina Gonzales) por ser la mejor amiga y hermana, porque de alguna manera u otra siempre está ahí acompañándome y dándome ánimos, por ser mi confidente en los buenos y malos momentos de mi vida.

Yomairis Morales Abreu

República Dominicana

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL

Facultad de Postgrado y Educación Continuada

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

Análisis de la convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones en torno a un punto c

Yomairis Morales Abreu

Sustentante

Dr. Manuel A. Diloné

Asesor

RESUMEN

La investigación se propone analizar la convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones en torno a un punto c . Los objetivos específicos incluyen determinar condiciones de convergencia, describir métodos para mejorar la convergencia, y evaluar la aplicabilidad de las series en comparación con otras técnicas. La metodología es deductiva, utilizando un enfoque cualitativo y un diseño no experimental. Se emplea un método documental y descriptivo, con un procedimiento que implica revisión de literatura, estructuración del contenido y búsqueda de información física.

Los hallazgos revelan que la convergencia de las Series de Taylor depende de condiciones específicas. Se proponen métodos estratégicos para mejorar la convergencia, destacando su eficacia en funciones analíticas. Sin embargo, se reconoce su limitación en funciones no analíticas o con singularidades, subrayando la importancia de la elección adecuada del punto de expansión.

Palabras clave: Convergencia, series de Taylor, aproximación de funciones, punto c , optimización y velocidad de convergencia.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan los antecedentes históricos, donde se exponen el origen y evolución de la series de Taylor. Seguidamente exhiben los antecedentes académicos que sirven de sustento a esta investigación. Posteriormente, se hace el planteamiento del problema, se da la justificación, se establecen los objetivos y se explica el alcance y los límites de la investigación.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Antecedentes históricos

Brook Taylor (1685-1731) fue un destacado matemático británico conocido por sus contribuciones fundamentales al cálculo y la geometría. Graduado de la Universidad de Cambridge en 1708, su obra más influyente, “Methodus Incrementorum Directa et Inversa” (1715), introdujo las series matemáticas que llevan su nombre, conocidas como series de Taylor. Este enfoque innovador permitió la representación de funciones como sumas infinitas, transformando el análisis matemático. Taylor también realizó importantes contribuciones a la teoría de ecuaciones diferenciales. (Pizarro, López y Almira, 2018). A pesar de su vida relativamente corta, su legado perdura, y sus aportes han influido en el desarrollo de las matemáticas a lo largo del tiempo.

El filósofo eleata Zenón de Elea citado por Quiles y Granero en 1949, consideró el problema de sumar una serie infinita para lograr un resultado finito, pero lo descartó por considerarlo imposible: el resultado fueron las paradojas de Zenón. Posteriormente, Moreau en 1972 afirmó que Aristóteles propuso una resolución filosófica a la paradoja, pero el contenido matemático de esta no quedó resuelto hasta que lo retomaron Demócrito y después Arquímedes (Arana, 2017). Fue a través del método exhaustivo de Arquímedes que un número infinito de subdivisiones geométricas progresivas podían alcanzar un resultado trigonométrico finito (Arana, 2018). Independientemente, Sundararajan, Dhamdhare y Agarwal, (2018) utilizaron un método similar cientos de años después.

En el siglo XIV, los primeros ejemplos del uso de series de Taylor y métodos similares fueron dados por Madhava de Sangamagrama. A pesar de que hoy en día ningún registro de su trabajo ha sobrevivido a los años, escritos de matemáticos hindúes posteriores sugieren que él encontró un número de casos especiales de la serie de Taylor, incluidos aquellos para las funciones trigonométricas del seno, coseno, tangente y arcotangente (He y Ji, 2019).

En el siglo XVII, James Gregory 1703, afirma que también trabajó en esta área y publicó varias series de Maclaurin. Pero en 1715 se presentó una forma general para construir estas series para todas las funciones para las que existe y fue presentado por Brook Taylor en el 1773, de quién recibe su nombre. Las series de Maclaurin fueron nombradas así por Colin Maclaurin, un profesor de Edimburgo, quien publicó el caso especial de las series de Taylor en el siglo XVIII. (Hormigón, 1994).

1.1.2. Antecedentes académicos

Martínez (2018), en su investigación titulada “Desarrollo de Taylor de la función binómica”, cuyo objetivo fue; Analizar la series de Taylor en las funciones binómica, concluyó que todo desarrollo en serie Taylor de una función infinitas veces diferenciable es una serie de potencias, además se logró identificar que es una herramienta adecuada para aproximar el valor de dicha función en un punto que se encuentre en el intervalo de convergencia de la serie. En este caso, se consideró el caso particular de la función binómica $(1 + x)^p$ que, habitualmente, sólo se estudia para el caso en el que p sea un número natural y se observó que es posible extender su definición para el supuesto de p cualquier real.

He y Ji (2019), en su investigación titulada “Taylor series solution for Lane Emden equation”, cuyo objetivo fue; Analizar comparativamente las soluciones de la serie de Taylor para la ecuación de Lane-Emden, concluyeron que en comparación con otros métodos analíticos, el método de la serie de Taylor es sencillo, con un proceso

de solución simple y resultados precisos. La mayor ventaja del método de la serie de Taylor es que no se producirán los términos redundantes y la serie converge a la solución exacta.

Por su lado Mardones y Zarate (2020), en su investigación titulada “Sucesiones y series de funciones”, cuyo objetivo fue; Estudiar las sucesiones y series de funciones reales, concluyeron que la convergencia de sucesiones y series de funciones puede ser uniforme y/o puntual. Por tanto, se probó la convergencia puntual para S es el conjunto de puntos x para los cuales la sucesión $f_n(x)$ converge.

Por otro lado Tong, et al. (2021), en su trabajo titulado “Redes neuronales simplécticas en forma de serie de Taylor para sistemas hamiltonianos”, con el objetivo aplicar las redes neuronales simplécticas en forma de serie de Taylor en los sistemas hamiltonianos, concluyeron que la red de Taylor es eficiente para predecir un espectro de sistemas dinámicos hamiltonianos, además este modelo exhibe méritos computacionales únicos al superar en gran medida a los métodos anteriores en cuanto a la precisión de la predicción, la tasa de convergencia y la robustez a pesar de usar datos de entrenamiento extremadamente pequeños con un período de entrenamiento corto (6000 veces más corto que el período de predicción), tamaños de muestra pequeños, y sin datos intermedios para entrenar las redes.

En este sentido Espino (2022) en su estudio sobre “Análisis de las Series de Taylor y sus Condiciones de Convergencia”, cuyo objetivo fue analizar las Series de Taylor y sus condiciones de convergencia de la Universidad Tecnológica Del Cibao Oriental, concluyó que existen funciones f continua que son el límite casi uniforme de una sucesión $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ de funciones continuas, en otras palabras, para cualquier función continua que converja puntualmente a una función discontinua su convergencia no implica convergencia casi uniforme.

En este sentido Bayés y Costa (2022) en su estudio sobre “Calculadora gráfica GeoGebra para el estudio de funciones polinómicas, polinómicas y series de Taylor”

del Instituto GeoGebra de São Paulo II, cuyo objetivo fue diseñar una calculadora gráfica GeoGebra para el estudio de funciones polinómicas, concluyeron que alrededor del 50 % posee una noción regular del concepto polinomio, pero la gran mayoría, identifican las funciones polinómicas dadas. En el caso de la función polinómica constante, el 40 % no la identifica como tal, y las funciones racionales aproximadamente el 40 % las clasifican como polinómicas.

1.2. Planteamiento del problema

La importancia de analizar la convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones en torno a un punto c radica en su papel fundamental en el campo del análisis matemático. Estas series son herramientas poderosas para aproximar funciones de manera local, pero su validez y utilidad dependen crucialmente de la convergencia. Comprender la convergencia de las Series de Taylor es esencial para garantizar la precisión y confiabilidad de las aproximaciones, lo que afecta directamente áreas como la física teórica, la ingeniería y otras disciplinas científicas.

La convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones en torno a un punto c es un aspecto crítico en el ámbito de análisis numérico y aproximación de funciones. Sin embargo, actualmente, existe una falta de comprensión profunda sobre las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la convergencia en dicho entorno. Este vacío de conocimiento plantea un desafío significativo en la aplicación efectiva de las Series de Taylor en diversos campos científicos y tecnológicos.

Además, surge la cuestión de la eficacia de las técnicas existentes para mejorar la convergencia en situaciones donde las Series de Taylor exhiben un rendimiento subóptimo, especialmente en casos de convergencia lenta o inadecuada. La falta de métodos específicos para abordar este problema limita la utilidad práctica de estas series en contextos donde la precisión es esencial.

La crítica importancia de determinar en qué casos la serie de Taylor ofrece una

aproximación aceptable de una función en todo su dominio reside en la evaluación de las condiciones de convergencia que garantizan la validez y la fiabilidad de estas aproximaciones en diversas disciplinas científicas y técnicas. Esta cuestión es esencial para establecer los límites y la aplicabilidad de las Series de Taylor, proporcionando así una base sólida para su uso efectivo en la resolución de problemas prácticos.

Ante este contexto, se hace necesario abordar la problemática de investigación: ¿Cómo analizar la convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones en torno a un punto c ?

Finalmente, esto lleva a cuestionar las siguientes preguntas específicas:

1. ¿Qué condiciones son necesarias y suficientes para la convergencia de una serie de Taylor en el entorno a un punto c ?
2. ¿Cuáles técnicas o métodos específicos para mejorar la convergencia de las series de Taylor en casos donde la convergencia es lenta o inadecuada?
3. ¿En qué casos la serie de Taylor proporciona una aproximación aceptable de la función en todo su dominio?

1.3. Justificación

La investigación que se presenta surge de la necesidad de profundizar en el estudio de las Series de Taylor y su convergencia en la aproximación de funciones en un entorno específico. La importancia de esta investigación radica en su potencial para mejorar la precisión de las aproximaciones de funciones mediante el uso de estas series, proporcionando herramientas matemáticas más refinadas y eficientes para la modelización y análisis de fenómenos en diversas disciplinas.

En el contexto de la República Dominicana, la relevancia de esta investigación se encuentra en su capacidad para fortalecer la base matemática de profesionales en diversas áreas, promoviendo un mejor entendimiento y aplicación de herramientas

matemáticas avanzadas. La mejora en la precisión de las aproximaciones de funciones puede tener un impacto significativo en la resolución de problemas prácticos y en la toma de decisiones.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Analizar la convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones en torno a un punto c .

1.4.2. Objetivos específicos

1. Explorar las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de una serie de Taylor en el entorno de un punto c :
2. Describir técnicas o métodos específicos para optimizar la convergencia de las series de Taylor en situaciones donde esta es lenta o inadecuada.
3. Evaluar en qué casos la serie de Taylor ofrece una aproximación aceptable de la función en su dominio completo.

1.5. Alcances y límites

Esta investigación trata sobre la matemática teórica y se limita al análisis de la convergencia de las Series de Taylor, específicamente centra su atención en las aproximaciones de funciones en torno a un punto c .

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presentan las diferentes definiciones, teoremas y teorías necesarios para el buen entendimiento de la misma.

2.1. Funciones y tipos

Definición 2.1.1 (Función.) Mardones y Zarate (2020). Una función es un concepto fundamental en matemáticas y programación. En términos generales, una función es una relación entre un conjunto de entradas (llamado dominio) y un conjunto de salidas (llamado codominio) de manera que a cada elemento del dominio le corresponde exactamente un elemento en el codominio. La notación típica para representar una función es $f(x)$, donde f es el nombre de la función y x es la variable de entrada.

Tipo de funciones

Definición 2.1.2 (Funciones lineales) Martínez (2017). Las funciones lineales en matemáticas describen una relación directamente proporcional entre la variable de entrada (x) y la variable de salida ($f(x)$). Su forma general es $f(x) = mx + b$, donde m es la pendiente de la línea y b es la ordenada al origen.

Definición 2.1.3 (Funciones Cuadráticas.) Jiménez (2020). Las funciones cuadráticas representan una relación cuadrática entre la variable de entrada y la variable de salida. Su expresión general es $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a, b, y c$ son constantes. Estas funciones pueden describir parábolas en un plano cartesiano.

Definición 2.1.4 (Funciones Exponenciales.) He y Ji (2019). Las funciones exponenciales modelan crecimiento o decrecimiento exponencial. Tienen la forma $f(x) = a \cdot b^x$, donde a y b son constantes. Estas funciones son fundamentales en el estudio de fenómenos que aumentan o disminuyen de manera proporcional al tiempo.

Definición 2.1.5 (Funciones Racionales.) Castorena (2000). Las funciones racionales son cocientes de polinomios y tienen la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son

polinomios. Estas funciones pueden tener puntos de discontinuidad debido a valores no permitidos en el denominador.

Definición 2.1.6 (Funciones sin parámetros y sin valor de retorno.) Las funciones sin parámetros ni valor de retorno realizan acciones específicas sin requerir información de entrada ni devolver resultados. Son útiles para tareas simples y autónomas.

Definición 2.1.7 (?) (Funciones sin parámetros pero con valor de retorno.) Las funciones sin parámetros pero con valor de retorno ejecutan acciones sin necesidad de información de entrada, pero devuelven un resultado útil en el programa.

Definición 2.1.8 (Funciones Recursivas.) Arana (2017). Las funciones recursivas son aquellas que se llaman a sí mismas durante su ejecución. Este tipo de funciones es común en algoritmos y problemas que pueden dividirse en subproblemas más pequeños.

2.2. Aproximaciones de funciones

Definición 2.2.1 (Aproximación.) Licera, Gascón y Bosch (2019). Una aproximación es un método o proceso mediante el cual se obtiene una valoración cercana o una estimación de algo, en lugar de su valor exacto. En diversos contextos, la aproximación se utiliza cuando se busca una solución práctica o razonable sin la necesidad de obtener resultados precisos. Las aproximaciones son comunes en matemáticas, ciencia, ingeniería y en la vida cotidiana.

Tipos de aproximaciones

Definición 2.2.2 (Aproximación Numérica.) Martínez (2018). Se utiliza en problemas matemáticos donde no es posible obtener soluciones exactas. Métodos numéricos como el método de Newton-Raphson, el método de Euler y el método de bisección son ejemplos de aproximaciones numéricas.

Definición 2.2.3 (Aproximación Funcional.) Millán (2021). Consiste en aproximarse a una función complicada mediante una función más simple que se ajusta a ella en un cierto intervalo o conjunto de datos. La aproximación lineal es un ejemplo común.

Definición 2.2.4 (Aproximación de Raíces.) Suárez (2011). Se utiliza para encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones. El método de bisección y el método de Newton-Raphson son ejemplos comunes.

Definición 2.2.5 (Aproximaciones de funciones.) Las aproximaciones de funciones se refieren a técnicas y métodos utilizados para estimar o calcular valores de una función en puntos específicos, especialmente cuando no es posible o práctico obtener una expresión exacta para la función en toda su extensión. Estas aproximaciones son comúnmente empleadas en matemáticas y ciencias aplicadas.

Definición 2.2.6 (Aproximaciones de funciones en series de Taylor.) Mardones y Zarate (2020). Las aproximaciones de funciones mediante series de Taylor son un concepto importante en el cálculo y el análisis matemático (Herrera, et al, 2015). La idea fundamental es representar una función complicada como una suma infinita de términos polinómicos, conocidos como términos de Taylor.

Definición 2.2.7 Según Martínez (2018), la serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un punto a se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

Donde $f'(a)$ es la derivada primera de f evaluada en a , $f''(a)$ es la segunda derivada, y así sucesivamente. Los términos sucesivos involucran derivadas de orden superior de la función en el punto a , y cada término tiene un factor $(x - a)^n/n!$, donde n es el orden del término.

Observación: La aproximación de una función mediante la serie de Taylor se vuelve más precisa a medida que se consideran más términos de la serie. Si se truncara la serie después de un número finito de términos, se obtendría una aproximación polinómica de la función original. Esta aproximación es más precisa cuando x está cerca del punto a .

2.2.1. Polinomios de Taylor

Definición 2.2.8 (Polinomio.) Jiménez (2020). Un polinomio es una expresión algebraica que representa una combinación lineal de términos, donde cada término es el producto de una constante (llamada coeficiente) y una variable elevada a una potencia entera no negativa. La forma general de un polinomio es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Tipos de polinomios

Definición 2.2.9 (Polinomio Constante.) Martínez (2017). Un polinomio constante es aquel cuyos términos no contienen ninguna variable. Su forma general es $P(x) = c$, donde c es una constante.

Definición 2.2.10 (Polinomio Lineal.) Millán (2021). Un polinomio lineal es de primer grado y tiene la forma $P(x) = ax + b$, donde a y b son constantes y $a \neq 0$.

Definición 2.2.11 (Polinomio Homogéneo) Mercáu, et al. (2019). Un polinomio homogéneo es aquel en el que todos los términos tienen el mismo grado. Por ejemplo, $2x^2 - 3xy + y^2$ es un polinomio homogéneo de segundo grado.

Definición 2.2.12 (Polinomios de Taylor.) Sundararajan, Dhamdhare y Agarwal (2018). Los polinomios de Taylor son aproximaciones polinómicas de funciones reales o complejas en un punto específico. Estos polinomios son utilizados en cálculo y análisis matemático para representar funciones de manera local alrededor de un punto, proporcionando una aproximación polinómica de la función original.

La fórmula general de un polinomio de Taylor de grado n para una función $f(x)$ alrededor del punto a es:

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Definición 2.2.13 (Convergencia.) Bayés y Costa (2022). La convergencia es un concepto que se utiliza en diversos contextos para describir el comportamiento de

una secuencia, una serie, una aproximación numérica, o cualquier proceso que tienda hacia un límite o un valor específico.

Tipos de convergencia

Definición 2.2.14 (Convergencia de Secuencias.) García, Quintero y Rodríguez, (2013). Convergencia Puntual: Una secuencia $\{f_n(x)\}$ de funciones convergerá puntualmente a una función $f(x)$ en un conjunto D si, para cada x en D , la secuencia de números reales $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$ cuando n tiende a infinito. Convergencia Uniforme: Una secuencia de funciones $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente a $f(x)$ en D si la convergencia es puntual y, además, la velocidad de convergencia es uniforme en D .

Definición 2.2.15 (Convergencia de Series.) Huttin y Goedert (2004). Convergencia Absoluta: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie formada por los términos absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Convergencia Condicional: Una serie converge condicionalmente si la serie converge, pero no converge absolutamente.

Definición 2.2.16 (Convergencia de Aproximaciones Numéricas.) Martínez (2017). Convergencia Lineal: En el contexto de métodos iterativos, como el método de Newton, un método se dice que tiene convergencia lineal si la secuencia de aproximaciones converge proporcionalmente al error en cada paso.

2.2.2. Puntos críticos y tipos

Definición 2.2.17 (Punto Crítico.) He y Ji (2019). En el contexto de una función $f(x)$, un punto crítico es aquel valor de x en el dominio de la función donde la derivada $f'(x)$ es igual a cero o no existe. Es decir, c es un punto crítico si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no está definida. Estos puntos son fundamentales para analizar extremos locales y puntos de inflexión en la función.

Definición 2.2.18 (Mínimo Local) Jiménez (2020). Un punto crítico c se considera un mínimo local si, en una vecindad de c , la función $f(x)$ es mayor o igual a $f(c)$ para todos los x en la vecindad, excepto en $x = c$.

Definición 2.2.19 (Máximo Local) Millán (2021). Un punto crítico c se considera un máximo local si, en una vecindad de c , la función $f(x)$ es menor o igual a $f(c)$ para todos los x en la vecindad, excepto en $x = c$.

Definición 2.2.20 (Punto de Inflexión.) Suárez (2011). Un punto crítico c se considera un punto de inflexión si, en una vecindad de c , la función cambia de concavidad alrededor de c . Esto ocurre cuando la segunda derivada $f''(x)$ cambia de signo en $x = c$.

Teorema 2.2.1 (Teorema del Valor Medio para Derivadas.) Suponga que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) . Entonces, existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este teorema establece que en algún punto c dentro del intervalo, la tasa de cambio instantánea (derivada) es igual al promedio de la tasa de cambio en el intervalo.

Intervalo y tipos

Definición 2.2.21 (Intervalo.) Un intervalo es un conjunto de números reales que contiene todos los números situados entre dos valores dados. La notación de intervalos se expresa mediante paréntesis, corchetes o combinaciones de ambos, y puede ser abierto, cerrado, semiabierto o infinito, dependiendo de si los extremos están incluidos o excluidos. Por ejemplo, el intervalo abierto (a, b) incluye todos los números x tal que $a < x < b$, excluyendo a y b .

Definición 2.2.22 (Intervalo Abierto.) Uribe (1984). Un intervalo abierto, denotado como (a, b) , incluye todos los números reales x en los cuales $a < x < b$. Este tipo de intervalo no incluye los extremos a y b , creando una gama de valores intermedios.

Definición 2.2.23 (Intervalo Cerrado.) Vasilachis (2019). Representado como $[a, b]$, un intervalo cerrado abarca todos los números reales x que cumplen con $a \leq x \leq b$. En este caso, tanto a como b están incluidos, lo que diferencia al intervalo cerrado de su contraparte abierta.

Definición 2.2.24 (Intervalo Semiabierto o Semicerrado.) Tong, et al. (2021).

Los intervalos semiabiertos, como $(a, b]$ o $[a, b)$, combinan la inclusión de un extremo y la exclusión del otro. Por ejemplo, $(a, b]$ incluye todos los x tales que $a < x \leq b$, mientras que $[a, b)$ contiene x con $a \leq x < b$.

Definición 2.2.25 (Intervalo Infinito.) Suárez (2011). Los intervalos infinitos, como (a, ∞) o $(-\infty, b]$, abarcan una gama infinita de números. Por ejemplo, (a, ∞) contiene todos los x mayores que a , y $(-\infty, b]$ incluye x menores o iguales a b .

Definición 2.2.26 (Intervalo Degenerado) Sundararajan, Dhamdhere y Agarwal (2018). Un intervalo degenerado, representado por $[a, a]$ o (a, a) , consta únicamente del número real a . Estos intervalos son casos especiales en los que la gama de valores es unívoca y consiste en un solo punto.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Rolle). Suárez (2011).

Suponga que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Demostración: Existencia de Máximos y Mínimos: Por el Teorema Extremo-Valor, existe un punto c_1 en (a, b) donde $f(c_1)$ es máximo y otro punto c_2 donde $f(c_2)$ es mínimo.

Caso 1: $f(c_1) = f(c_2)$: - Si $f(c_1) = f(c_2)$, entonces hemos encontrado dos puntos distintos en (a, b) donde la función alcanza el mismo valor. Por lo tanto, $f(x)$ tiene un máximo o mínimo en el intervalo abierto (a, b) .

Caso 2: $f(c_1) \neq f(c_2)$: Si $f(c_1) \neq f(c_2)$, entonces la función debe alcanzar su valor máximo y mínimo en puntos distintos. Debido a la continuidad de $f(x)$, la función debe cruzar el valor $f(c_1)$ o $f(c_2)$ en algún punto c en (a, b) . En este punto, $f'(c) = 0$ por el Teorema de Fermat sobre puntos críticos.

En ambos casos, se ha encontrado al menos un punto c en (a, b) donde $f'(c) = 0$, cumpliendo con la conclusión del Teorema de Rolle.

2.2.3. El polinomio de Taylor de orden cero

Definición 2.2.27 (El polinomio de Taylor de orden cero.) El polinomio de Taylor de orden cero de una función $f(x)$ alrededor de un punto a es simplemente el valor de la función en ese punto, denotado como $P_0(x) = f(a)$. Este polinomio constituye una aproximación constante de la función en la vecindad de a , ya que no incluye términos adicionales relacionados con las derivadas de la función. Es la forma más sencilla de los polinomios de Taylor y equivale a la ecuación de una recta horizontal que pasa por el punto $(a, f(a))$ en el plano cartesiano.

Construcción del polinomio de Taylor de orden cero

Recuerde que se tiene una función que se define localmente en el punto p y se asume que f' existe localmente en p en este mismo intervalo. Ahora elija cualquier x que sea el intervalo $[p, b)$ (también se puede elegir un punto en el intervalo de la izquierda $(a, p]$).

Nuestra función f en el intervalo $[p, x]$ satisface todos los requisitos del Teorema del valor medio. Entonces se sabe que hay un punto c_x con $p < c_x < x$ de modo que

$$\frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(c_x).$$

Esto se puede escribir como

$$f(x) = f(p) + f'(c_x)(x - p).$$

Sea la constante $f(p)$, un polinomio de grado 0, denotada por

$$P_0(p, x) = f(p)$$

Llame a esto el polinomio de Taylor de orden 0 para f en el punto p . A continuación, defina el término de error de orden 0 mediante

$$E_0(x, p) = f(x) - P_0(p, x) = f(x) - f(p).$$

El término de error o resto es claramente la diferencia o discrepancia entre el valor real de la función en x y el polinomio de Taylor de orden 0. Como $f(x) - f(p) =$

$f'(c_x)(x - p)$, se puede escribir todo lo que tenga arriba como

$$E_0(x, p) = f'(c_x)(x - p), \text{ alguna } c_x, \text{ con } p < c_x < x$$

Se puede interpretar lo que se ha hecho diciendo que $f(p)$ es la mejor opción de polinomio o constante de orden 0 para aproximar $f(x)$ cerca de p . Por supuesto, para la mayoría de las funciones, ¡esta es una aproximación horrible! Entonces, el siguiente paso es encontrar la mejor línea recta que se aproxime a f cerca de p . Probando la recta tangente habitual a f en p . (Mercau, et. al, 2019).

Teorema 2.2.3 (Aproximación de funciones: polinomio de Taylor de orden cero). Para Huttin y Goedert (2004). Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y sea al menos diferenciable en (a, b) . Entonces para cada p en $[a, b]$, hay al menos un punto c , entre p y x , de modo que $f(x) = f(p) + f'(c)(x - p)$. La constante $f(p)$ se denomina polinomio de Taylor de orden cero para f en p y la se denota por $P_0(x; p)$. El punto p se llama punto base. Tenga en cuenta que está aproximando $f(x)$ por la constante $f(p)$ y el error que se comete es $E_0(x, p) = f'(c)(x - p)$.

2.2.4. El polinomio de Taylor de primer orden

Definición 2.2.28 (El polinomio de Taylor de primer orden.) El polinomio de Taylor de primer orden, denotado como $P_1(x)$, de una función $f(x)$ alrededor de un punto a se calcula utilizando la derivada primera de la función en ese punto. La fórmula del polinomio de Taylor de primer orden es $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Este polinomio representa una aproximación lineal de la función alrededor de a , incorporando información no solo sobre el valor de la función en a ($f(a)$), sino también sobre la tasa de cambio instantánea de la función en ese punto ($f'(a)$). Así, el polinomio de Taylor de primer orden proporciona una recta tangente a la curva de la función en a , siendo una aproximación local lineal de la función en esa vecindad.

Construcción del polinomio de Taylor de primer orden

Si una función f es diferenciable, se sabe que se puede aproximar su valor en el punto p por su recta tangente, T . Este es un ejemplo de aproximación de funciones.

Tómese

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + E_T(x, p) \quad (2.2.1)$$

donde la recta tangente T es la función

$$T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

y el término $E_1(x, p)$ representa el error entre el valor verdadero de la función $f(x)$ y el valor de la recta tangente $T(x)$. Eso es

$$E_1(x, p) = f(x) - T(x)$$

Otra forma de ver esto es que la línea tangente es la mejor línea recta o aproximación lineal a f en el punto p . Se sabe cómo se ven estas imágenes. Si la función f se curva cerca de p , entonces la línea tangente no es una muy buena aproximación a f en p a menos que x esté muy cerca de p . Ahora, suponga que f es en realidad dos veces diferenciable en el intervalo local (a, b) también. Defina la constante M por

$$M = \frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)}{(x - p)^2}.$$

En esta discusión, este es realmente un valor constante porque ya se ha fijado el valor de x y p . Se puede reescribir esta ecuación como

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + M(x - p)^2.$$

Ahora defina la función g en un intervalo I que contiene p por

$$g(t) = f(t) - f(p) - f'(p)(t - p) - M(t - p)^2$$

Entonces,

$$g''(t) = f''(t) - f'(p) - 2M(t - p)$$

$$g''(t) = f''(t) - 2M$$

Entonces,

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - f(p) - f'(p)(x - p) - M(x - p)^2 \\ &= f(x) - f(p) - f'(p)(x - p) - f(x) + f(p) + f'(p)(x - p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$g(p) = f(p) - f(p) - f'(p)(p - p) - M(p - p)^2 = 0$$

Así se sabe que $g(x) = g(p) = 0$. Además, del Teorema del Valor Medio, hay un punto c_x^0 entre p y x tal que

$$\frac{g(x) - g(p)}{p - x} = g'(c_x^0)$$

Como el numerador es $g(x) - g(p)$, ahora se sabe $g'(c_x^0) = 0$. Pero también se tiene

$$g'(p) = f'(p) - f'(p) - 2M(p - p) = 0.$$

A continuación, se puede aplicar el Teorema de Rolle a la función g' . Esto dice que hay un punto c_x^1 entre p y c_x^0 de modo que $g''(c_x^1) = 0$. De este modo,

$$0 = g''(c_x^1) = f''(c_x^1) - 2M$$

y simplificando se tiene

$$M = \frac{1}{2}f''(c_x^1)$$

Recordar cuál era el valor de M da el resultado final

$$\frac{f(x) - f(p) - f'(p)(x - p)}{(x - p)^2} = \frac{1}{2}f''(c_x^1), \text{ alguna } c_x^1 \text{ con } p < c_x^1 < c_x^0.$$

que se puede reescribir como $f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2}f''(c_x^1)(x - p)^2$, algunos c_x^1 con $p < c_x^1 < c_x^0$.

Defina el polinomio de Taylor de primer orden, $P_1(x, p)$ y el error de primer orden, $E_1(x, p)$ por

$$P_1(x, p) = f(p) + f'(p)(x - p)$$

$$\begin{aligned} E_1(x, p) &= f(x) - P_1(x, p) = f(x) - f(p) - f'(p)(x - p) \\ &= \frac{1}{2}f''(c_x^1)(x - p)^2 \end{aligned}$$

Así, se ha demostrado, $E_1(x, p)$ satisface

$$E_1(x, p) = f''(c_x^1) \frac{(x - p)^2}{2} \quad (2.2.2)$$

donde c_x^1 es un punto entre x y p . Tenga en cuenta que la línea tangente habitual es la misma que el polinomio de Taylor de primer orden, $P_1(f, p, x)$ y se tiene una buena representación del error. (Martínez, 2017).

Teorema 2.2.4 (Aproximación de funciones: polinomio de Taylor de primer orden). Huttin y Goedert (2004).

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable al menos dos veces en (a, b) Para un p dado en $[a, b]$, para cada x , hay al menos un punto c , entre p y x , de modo que $f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + (1/2)f''(c)(x - p)^2$. El $f(p) + f'(p)(x - p)$ se denomina polinomio de Taylor de primer orden para f en p y se denota por $P_1(x; p)$. El punto p se llama de nuevo punto base. Tenga en cuenta que se está aproximando $f(x)$ mediante la función lineal $f(p) + f'(p)(x - p)$ y el error que se comete es $E_1(x, p) = (1/2)f''(c)(x - p)$.

2.2.5. Aproximaciones cuadráticas

Definición 2.2.29 (Aproximaciones cuadráticas.) Mardones y Zarate (2020). Las aproximaciones cuadráticas son un tipo de aproximación de funciones que utiliza polinomios de segundo grado para estimar el comportamiento de una función alrededor de un punto específico. La forma general de una aproximación cuadrática se expresa mediante un polinomio cuadrático $Q(x)$ que involucra el valor de la función, su derivada primera y su segunda derivada en un punto dado p . La expresión típica de una aproximación cuadrática es:

$$Q(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{f''(p)}{2}(x - p)^2$$

También se podría preguntar qué función cuadrática Q se ajusta mejor a f cerca de p (Jiménez, 2017). Sea la función cuadrática Q definida por

$$Q(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + f''(p)\frac{(x - p)^2}{2} \quad (2.2.3)$$

El nuevo de acuerdo con error se llama $E_Q(x, p)$ y viene dado por

$$E_Q(x, p) = f(x) - Q(x)$$

Si f es diferenciable tres veces, se puede argumentar como lo se hizo en la aproximación de la línea tangente (usando el teorema del valor medio y el teorema de Rolle en una función g apropiadamente definida) para mostrar que hay un nuevo punto c_x^2 entre p y c_x^1 con

$$E_Q(x, p) = f'''(c_x^2) \frac{(x - p)^3}{6} \quad (2.2.4)$$

Entonces, si f parece una cuadrática localmente cerca de p , entonces Q y f coinciden muy bien y el error es bastante pequeño. Por otro lado, si f no es cuadrático en absoluto cerca de p , el error será grande. Luego defina el polinomio de Taylor de segundo orden, $P_2(f, p, x)$ y el error de segundo orden, $E_2(x, p) = E_Q(x, p)$ por

$$\begin{aligned} P_2(x, p) &= f(p) + f'(p)(x - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2 \\ E_2(x, p) &= f(x) - P_2(x, p) = f(x) - f(p) - f'(p)(x - p) - \frac{1}{2}f''(p)(x - p)^2. \\ &= \frac{1}{6}f'''(c_x^2)(x - p)^3 \end{aligned}$$

2.3. Series de potencias.

Definición 2.3.1 (Series.) Las series en matemáticas son representaciones algebraicas de la suma infinita de términos. Una serie se forma al agregar todos los elementos de una sucesión infinita y se expresa en la forma $S = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$, donde $a_0, a_1, a_2, \dots$ son los términos de la sucesión.

Definición 2.3.2 (Serie Aritmética.) Pizarro, López y Almira (2018). Es una serie en la cual la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. La fórmula general de una serie aritmética es $S_n = n/2 \cdot (a_1 + a_n)$, donde S_n es la suma de los primeros n términos, a_1 es el primer término, y a_n es el n -ésimo término.

Definición 2.3.3 (Serie Geométrica.) Sundararajan, Dhamdhare y Agarwal (2018). En una serie geométrica, la razón entre dos términos consecutivos es constante. La fórmula general es $S_n = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$, donde S_n es la suma de los primeros n términos, a es el primer término, r es la razón, y n es el número de términos.

Definición 2.3.4 (Serie Alternante.) Tong, et al. (2021). En una serie alternante, los términos alternan entre positivos y negativos. Estas series a menudo se expresan en la forma $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$. La convergencia de las series alternantes está determinada por la condición de alternancia y la monotonía decreciente de los términos.

Definición 2.3.5 (Serie Convergente y Divergente.) Pizarro, López y Almira (2018). Una serie convergente es aquella cuya suma tiene un límite finito a medida que se consideran más términos. En contraste, una serie divergente no tiene una suma finita y puede crecer indefinidamente.

Definición 2.3.6 (Serie de Taylor.) Según Martínez (2017). Si $F(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes en $x = c$, la serie de Taylor de $F(x)$ en $x = c$ es la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

La serie de Taylor también se conoce como la expansión de Taylor de la función. En el caso especial $c = 0$, la serie de Taylor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

también se llama serie de Maclaurin de $F(x)$.

Definición 2.3.7 (Serie de Maclaurin.) Churchill, Brown y Rapun (1986). La Serie de Maclaurin es una forma específica de la Serie de Taylor centrada en cero. Esta serie es una expansión en serie infinita de una función alrededor de $x = 0$. La fórmula general para la Serie de Maclaurin de una función $f(x)$ es:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Definición 2.3.8 (Singularidad.) He y Ji (2019). Es un punto en el dominio de una función donde la función no está definida o donde pierde ciertas propiedades, como la continuidad o la diferenciabilidad.

2.3.1. Singularidad de las series de potencias

Teorema 2.3.1 Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$ sean dos series de potencias convergentes tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$$

para todo x en un intervalo abierto que contiene a . Entonces $c_n = d_n$ para todo $n \geq 0$.

Demostración: Suponga que

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots \\ &= d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + d_3(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

Entonces $f(a) = c_0 = d_0$. Mediante la Diferenciación e integración término a término de las series de potencias, se puede diferenciar ambas series término a término. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots \\ &= d_1 + 2d_2(x-a) + 3d_3(x-a)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

y así, $f'(a) = c_1 = d_1$. De la misma manera,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \cdots \\ &= 2d_2 + 3 \cdot 2d_3(x-a) + \cdots \end{aligned}$$

implica que $f''(a) = 2c_2 = 2d_2$, y por lo tanto, $c_2 = d_2$. Más generalmente, para cualquier número entero $n \geq 0$, $f^{(n)}(a) = n!c_n = n!d_n$, y en consecuencia, $c_n = d_n$ para todo $n \geq 0$. (Castorena, 2000).

2.4. Intervalo de convergencias de series de potencias

Teorema 2.4.1 Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

es una serie de potencias. Entonces se cumple exactamente uno de los siguientes tres casos:

- I) La serie converge para todo x en $\mathbf{R}$.
- II) Hay un número positivo R tal que la serie converge para todos los x que satisfacen $|x - c| < R$, y la serie diverge para todos los x que satisfacen $|x - c| > R$.
- III) La serie converge solo para $x = c$.

Discusión y ejemplos. El número R en el caso 2 se denomina radio de convergencia de la serie de potencias dada. Se puede extender el significado del radio de convergencia para cubrir el caso 1 ($R = \infty$) y el caso 3 ($R = 0$) también. Observe ejemplos de los tres casos.

Ejemplo 1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(Recuerde la convención: $0! = 1$). En este caso, la serie de potencias converge para todos los x reales. Por supuesto converge para $x = 0$ porque entonces todos los términos de la serie son iguales a 0 excepto el primero. Si $x \neq 0$, entonces se aplica la prueba de la razón, en realidad para probar la convergencia absoluta (que implica convergencia). La razón de los valores absolutos de los términos sucesivos no solo es menor que 1, sino que en realidad converge a 0:

$$\frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{textocomo } n \rightarrow \infty$$

(Recuerde que x es un número fijo). Por lo tanto, el radio de convergencia en este ejemplo es $R = \infty$. A partir de este trabajo sobre los polinomios de Taylor, se sabe incluso el límite de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Ejemplo 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

Calculando la razón de valores absolutos de términos sucesivos:

$$\frac{|\pm x^{n+1}/(n+1)|}{|\mp x^n/n|} = \frac{n}{n+1}|x|$$

Se sabe que $n/(n+1) \rightarrow 1$ como $n \rightarrow \infty$, por lo que la razón de los valores absolutos de los términos sucesivos de la serie de potencias es finalmente lo más cercana posible a $|x|$. Fácilmente se concluye por la prueba de la razón que la serie de potencias converge si $|x| < 1$ y diverge si $|x| > 1$. Por lo tanto el radio de convergencia es $R = 1$.

La serie converge en el intervalo abierto $(-1, 1)$ y diverge fuera del intervalo cerrado $[-1, 1]$. ¿Qué pasa con los puntos finales? En $x = 1$, la serie es la serie armónica alterna, por lo tanto, convergente. En $x = -1$, la serie es el negativo de la serie armónica, por lo tanto divergente.

De este estudio del polinomio de Taylor para $\ln x$, es claro que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1+x) \quad \text{para} \quad -1 < x < 1$$

La fórmula es realmente cierta para $x = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

pero esto es bastante difícil de justificar.

Ejemplo 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!) x^n$$

En este caso, si $x \neq 0$, entonces la razón de términos sucesivos

$$\frac{|(n+1)!x^{n+1}|}{|n!x^n|} = (n+1)|x| \rightarrow \infty \quad \text{como} \quad n \rightarrow \infty$$

Por lo tanto, la serie de potencias diverge, por lo que el radio de convergencia es $R = 0$ para esta serie de potencias.

Como los términos de una serie de potencias implican una variable x , la serie puede converger para ciertos valores de x y divergir para otros valores de x . Para una

serie de potencias centrada en $x = a$, el valor de la serie en $x = a$ está dado por c_0 . Por lo tanto, una serie de potencias siempre converge en su centro. Algunas series de potencias convergen solo en ese valor de x . Sin embargo, la mayoría de las series de potencias convergen para más de un valor de x . En ese caso, la serie de potencias converge para todos los números reales x o converge para todo x en un intervalo finito. Por ejemplo, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge para todo x en el intervalo $(-1, 1)$, pero diverge para todo x fuera de ese intervalo. Ahora resumiendo estas tres posibilidades para una serie de potencias general.

Teorema 2.4.2 (Convergencia de una serie de potencias). Según Churchill, Brown y Rapun (1986). Considere la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$. La serie satisface exactamente una de las siguientes propiedades:

- I) La serie converge en $x = a$ y diverge para todo $x \neq a$.
- II) La serie converge para todos los números reales x .
- III) Existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge si $|x - a| < R$ y diverge si $|x - a| > R$. En los valores x donde $|x - a| = R$, la serie puede converger o divergir.

Suponga que la serie de potencias está centrada en $a = 0$. (Para una serie centrada en un valor de a distinto de cero, el resultado se obtiene suponiendo que $y = x - a$ y considerando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n$.) Primero debe demostrar el siguiente hecho:

Si existe un número real $d \neq 0$ tal que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolutamente para todo x tal que $|x| < |d|$. Dado que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n d^n$ converge, el enésimo término $c_n d^n \rightarrow 0$ a medida que $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, existe un número entero N tal que $|c_n d^n| \leq 1$ para todo $n \geq N$.

Escribiendo

$$|c_n x^n| = |c_n d^n| \left| \frac{x}{d} \right|^n$$

concluyendo que, para todo $n \geq N$

$$|c_n x^n| \leq \left| \frac{x}{d} \right|^n$$

La serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{x}{d} \right|^n$$

es una serie geométrica que converge si $\left| \frac{x}{d} \right| < 1$. Por lo tanto, mediante la prueba de comparación, concluyendo que $\sum_{n=N}^{\infty} c_n x^n$ también converge para $|x| < |d|$. Como se puede añadir un número finito de términos a una serie convergente, concluye que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge para $|x| < |d|$. Con este resultado, ahora se puede demostrar el teorema. Considere la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

y suponga que S es el conjunto de números reales para los que converge la serie. Suponga que el conjunto $S = \{0\}$. Entonces la serie entra en el caso I) Suponga que el conjunto S es el conjunto de todos los números reales. Entonces la serie entra en el caso II). Suponga que $S \neq \{0\}$ y S no es el conjunto de los números reales. Entonces existe un número real $x^* \neq 0$ tal que la serie no converge. Por lo tanto, la serie no puede converger para cualquier x tal que $|x| > |x^*|$. Por tanto, el conjunto S debe ser un conjunto acotado, lo que significa que debe tener un límite superior mínimo. (Este hecho se desprende de la propiedad del límite superior mínimo para los números reales, que está más allá del alcance de este texto y se trata en los cursos de análisis real). Llame a ese límite superior más pequeño R . Dado que $S \neq \{0\}$, el número $R > 0$. Por lo tanto, la serie converge para todo x tal que $|x| < R$, y la serie entra en el caso III).

2.5. Desarrollo de series de potencia

2.5.1. Desarrollo de la serie de potencia de Maclaurin

Considere una función f que tiene una representación en serie de potencias en $x = a$. Entonces la serie tiene la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots \quad (2.5.5)$$

Si la serie de la ecuación (2.5.5) es una representación para f en $x = a$, ciertamente se quiere que la serie sea igual a $f(a)$ en $x = a$. Si evalúa la serie en $x = a$, observe que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n &= c_0 + c_1(a-a) + c_2(a-a)^2 + \cdots \\ &= c_0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie es igual a $f(a)$ si el coeficiente $c_0 = f(a)$. Además, se quiere que la primera derivada de la serie de potencias sea igual a $f'(a)$ en $x = a$. Diferenciando la Ecuación (2.5.5) término a término, observe que

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \right) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots$$

Por lo tanto, en $x = a$, la derivada es

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \right) &= c_1 + 2c_2(a-a) + 3c_3(a-a)^2 + \cdots \\ &= c_1\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de la serie es igual a $f'(a)$ si el coeficiente $c_1 = f'(a)$. Continuando de este modo, buscando coeficientes c_n tales que todas las derivadas de la serie de potencias de la Ecuación (2.5.5) coincidan con todas las derivadas correspondientes de f en $x = a$. La segunda y tercera derivadas de la Ecuación (2.5.5) están dadas por

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \right) = 2c_2 + 3,2c_3(x-a) + 4,3c_4(x-a)^2 + \cdots$$

y

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \right) = 3,2c_3 + 4,3,2c_4(x-a) + 5,4,3c_5(x-a)^2 + \cdots$$

Por lo tanto, en $x = a$, la segunda y tercera derivadas

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \right) &= 2c_2 + 3,2c_3(a-a) + 4,3c_4(a-a)^2 + \cdots \\ &= 2c_2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{d^3}{dx^3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \right) &= 3,2c_3 + 4,3,2c_4(a-a) + 5,4,3c_5(a-a)^2 + \dots \\ &= 3,2c_3\end{aligned}$$

igual a $f''(a)$ y $f'''(a)$, respectivamente, si $c_2 = \frac{f''(a)}{2!}$ y $c_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$. De forma más general, observe que si f tiene una representación en serie de potencias en $x = a$, entonces los coeficientes deben ser dados por $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$. Es decir, la serie debe ser

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots$$

Esta serie de potencias para f se conoce como la serie de Taylor para f en $\mathbf{a}$. Si $\mathbf{a} = 0$, entonces esta serie se conoce como la serie de Maclaurin para f .

Expansiones de Maclaurin de funciones pares e impares La expansión de Maclaurin de una función par involucra solo potencias pares de x . La expansión de Maclaurin de una función impar involucra solo potencias impares de x . (Mendoza, 2017).

Definición 2.5.1 (Funciones Pares.) Una función $f(x)$ es par si $f(-x) = f(x)$ para todo x en su dominio. Para funciones pares, la expansión de Maclaurin tiene términos que son potencias pares de x . La expansión general es:

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots$$

Esto se debe a que las derivadas impares de una función par evaluadas en $x = 0$ son cero.

Definición 2.5.2 (Funciones Impares.) Una función $f(x)$ es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en su dominio. Para funciones impares, la expansión de Maclaurin tiene términos que son potencias impares de x . La expansión general es:

$$f(x) = f'(0)x + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} x^5 + \dots$$

En este caso, las derivadas pares de una función impar evaluadas en $x = 0$ son cero, ya que las funciones impares tienen simetría respecto al origen.

Estas expansiones se derivan utilizando las definiciones de funciones pares e impares y las propiedades de las derivadas en $x = 0$.

2.5.2. Desarrollo de la serie de Taylor

Teorema 2.5.1 Desigualdades de Cauchy. Martínez (2017).

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie convergente en $D(z_0, R)$ y sea $M(r) = \sup \{|f(z)| \mid z \in \partial D(z_0, r)\}$ para $0 < r < R$. Entonces $|a_n| \leq M(r)/r^n$.

Teorema 2.5.2 (Teorema de Liouville.) Si $f(z)$ es una función entera y acotada, entonces $f(z)$ es constante.

Demostración: Suponga que $f(z)$ es una función entera y acotada. Esto significa que $f(z)$ es holomorfa en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ y existe un número real positivo M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z en $\mathbb{C}$.

Ahora, para demostrar que $f(z)$ es constante, consideremos la función auxiliar $g(z) = e^{-f(z)}$. La idea clave es analizar la función $g(z)$ y utilizar el principio de los máximos de funciones holomorfas.

1. $g(z)$ es entera: La función $g(z)$ es entera porque es la composición de funciones enteras (e^z y $-f(z)$).
2. $g(z)$ es acotada: Observamos que $|g(z)| = e^{-\operatorname{Re}(f(z))} \leq e^M$, ya que $|f(z)| \leq M$ por hipótesis. Esto implica que $g(z)$ es acotada en $\mathbb{C}$.

Teorema 2.5.3 Teorema fundamental del álgebra. Todo polinomio no constante en $\mathbb{C}[z]$ tiene al menos una raíz compleja.

Teorema 2.5.4 Principio de prolongación analítica. Sea Ω un abierto conexo en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Las afirmaciones siguientes son equivalentes: ¹

- a) f es constante en Ω .
- b) Existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\{z \in \Omega \mid f(z) = \lambda\}$ tiene un punto de acumulación en Ω .
- c) Existe un $z \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Cálculo de desarrollos de Taylor. Se obtienen las expansiones de Taylor de varias funciones calculando los coeficientes $\frac{f^n(c)}{n!}$. Este procedimiento suele ser demasiado laborioso y buscan formas más fáciles. A veces se demuestra que la expansión de Taylor en realidad converge a la función $F(x)$ en algún intervalo, demostrando que el resto $R_n(x) \rightarrow 0$, y esto también puede ser laborioso. En esta sección se dan métodos para obtener nuevas expansiones de Taylor a partir de las antiguas. Primero se necesita alguna información que proporcione una relación precisa entre los polinomios de Taylor y las series de Taylor. Se empieza con el lema. (Martínez, 2017).

Lema 2.5.1 Suponga que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ en un intervalo abierto de aproximadamente 0. Entonces $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$.

Teorema 2.5.5 Unicidad de la serie de Taylor Si

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

en algún intervalo $|x - c| < R$, entonces $a_n = F^{(n)}(c)/n!$.

Adición término por término. El siguiente resultado dice que se puede sumar (y restar) las expansiones de Taylor término a término. Suma término a término, suponga que $F(x)$ y $G(x)$ tienen expansiones de Taylor

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \quad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - c)^n$$

válido en un intervalo $|x - c| < R$. Entonces

$$F(x) \pm G(x) = \sum (a_n \pm b_n) (x - c)^n \quad \text{para} \quad |x - c| < R$$

Sustitución en Serie de Potencias. La sustitución en series de potencias es una técnica utilizada para expresar una función en términos de una serie de potencias diferente. Esta técnica es especialmente útil en el contexto de cálculo y análisis matemático, donde se busca representar funciones de una manera más manejable o más fácil de manipular.

Ejemplo. Encuentre la expansión de Taylor de $F(x) = 1/(1 - x^3)$ en $x = 0$.

Solución: Reemplaza x por x^3 en la expansión

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{para obtener} \quad F(x) = \frac{1}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n}$$

Reemplazar x por $-x$ en una serie de Maclaurin tiene algunas consecuencias útiles. Si

$$F(x) = \sum a_n x^n \quad \text{entonces} \quad F(-x) = \sum (-1)^n a_n x^n$$

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

En este capítulo se describe una serie de elementos que enmarcan los componentes metodológicos relacionados con el desarrollo de la investigación. Los cuales hacen referencia al diseño, tipo y método de la misma.

3.1. Método de investigación

Esta investigación utilizó el método cualitativo ya que puede ser visto como un término que cubre una serie de método y técnica con valor interpretativo que pretendes determinar, describir y evaluar el significado de hecho que se suscitan más o menos. (Franco y Solórzano, 2020).

3.2. Diseño de investigación

El diseño utilizado es el no experimental, orientado a comprender la convergencia de las Series de Taylor en la aproximación de funciones en torno a un punto c . El diseño adoptado fue transversal, abarcando un período temporal que permita analizar diferentes configuraciones planetarias a lo largo del tiempo. (Mendoza, 2020). Según la causa la investigación fue analítico y descriptivo, profundizando en la comprensión de las condiciones y técnicas o métodos para optimizar la convergencia y proporcionando una visión detallada en qué casos la serie de Taylor ofrece una aproximación aceptable de la función en su dominio completo. (Zamora, 2019).

3.3. Tipo de investigación

La investigación fue de tipos descriptivo, exploratorio y explicativo. Descriptivo porque comprende el análisis e interpretación de la naturaleza actual y la composición o proceso de los fenómenos (Inacio, 2019). Exploratorio ya que tiene como objeto examinar un problema de investigación poco estudiado, Hernández-Sampieri, y Mendoza (2020) y explicativo ya que busca analizar las condiciones de un fenómeno y por qué ocurre, y por qué se relacionan dos o más variables. (Sampieri, 2018).

3.4. Procedimiento de investigación

- En primer lugar, se trabajó en la lectura de documentos relacionados con el tema de investigación, con el fin de comprender los conocimientos existentes y establecer los antecedentes y limitaciones del tema a estudiar.
- Luego, en un segundo paso, se desarrolla la estructura del enfoque del contenido de la investigación y su análisis.
- Se buscó información de materiales físicos en Universidades para verificar la revisión de literatura sobre el tema.
- El asesor orienta el proceso de investigación.
- Se realizará una verificación del cumplimiento de los objetivos propuestos al inicio de la investigación.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados a la luz de los objetivos planteado.

4.1. Condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de una serie de Taylor en el entorno de un punto c

La convergencia de una serie de Taylor en el entorno de un punto c está determinada por las propiedades de la función para la cual se está desarrollando la serie. La serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de c se expresa como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \quad (4.1.1)$$

donde $f^{(n)}(c)$ es la n -ésima derivada de f evaluada en c .

Las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de la serie de Taylor en el entorno de c son proporcionadas por el teorema de Taylor. Este teorema establece que si $f(x)$ tiene derivadas de orden n en un intervalo que contiene a c , entonces la serie de Taylor converge a $f(x)$ en algún intervalo alrededor de c .

Condiciones necesarias y suficientes:

1. **Existencia de Derivadas:** La función $f(x)$ y sus derivadas hasta el orden n deben existir en un intervalo que contenga a c .
2. **Convergencia del Resto:** El resto de la serie debe tender a cero a medida que n tiende a infinito. Esto se expresa en términos del resto de Lagrange o del resto de Peano.

a) Resto de Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1} \quad (4.1.2)$$

donde ξ es un valor entre c y x . La condición es que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ para algún x en el intervalo.

b) **Resto de Peano:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(x)}{(x - c)^n} = 0 \quad (4.1.3)$$

Estas condiciones garantizan que la serie de Taylor converge a la función $f(x)$ en algún intervalo alrededor de c . Sin embargo, es importante tener en cuenta que la convergencia no necesariamente se extiende más allá de este intervalo. También hay casos en los que la serie converge pero no a la función original (fenómeno de Runge).

Ejemplo 4.1.1 Considere la función $f(x) = e^x$ y su expansión de Taylor alrededor de $c = 0$.

La expansión de Taylor para $f(x) = e^x$ alrededor de $c = 0$ (serie de Maclaurin) es:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (4.1.4)$$

Las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de esta serie son:

1. **Existencia de Derivadas:** La función e^x y todas sus derivadas existen para todos los x .
2. **Convergencia del Resto:** El resto de la serie debe tender a cero a medida que incluimos más términos. En este caso, el resto se puede expresar usando el término general del resto de Lagrange:

a) **Resto de Lagrange:**

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1}$$

Para $f(x) = e^x$, las derivadas son simplemente e^x , y ξ está en algún punto entre 0 y x . La condición es que $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Dado que e^x no tiene límite superior y $\frac{(x - 0)^{n+1}}{(n+1)!}$ tiende a cero para cualquier x , esta condición se cumple.

Por lo tanto, en este caso, las condiciones necesarias y suficientes se cumplen, y la serie de Taylor de e^x alrededor de $c = 0$ converge para todos los x .

4.1.1. Teorema de Taylor

El teorema de Taylor establece que si una función $f(x)$ tiene derivadas hasta el orden n en un intervalo que contiene a c , entonces la función puede ser expresada como una serie de potencias alrededor de c , conocida como la serie de Taylor. La fórmula general de la serie de Taylor alrededor de c es:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x - c)^3 + \cdots \quad (4.1.5)$$

Observación 4.1.1 La idea detrás del teorema de Taylor es que cualquier función suficientemente suave puede ser aproximada por un polinomio. El teorema de Taylor proporciona una forma sistemática de construir ese polinomio como se mostró en el ejemplo 4.2.1

4.1.2. Radio de Convergencia

El radio de convergencia de la serie de Taylor es la distancia máxima desde c hasta el punto donde la serie converge. Puede calcularse usando el criterio de la razón.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad (4.1.6)$$

donde a_n son los coeficientes de la serie de Taylor. Si $R = \infty$, la serie converge para todos los x . Si $R = 0$, la serie solo converge para $x = c$. En otros casos, la serie converge en un intervalo $(c - R, c + R)$.

A partir del ejemplo 4.2.1, la serie de Taylor para e^x alrededor de $c = 0$ es especialmente simple (ecuación 4.2.4). Por tanto, esta serie converge para todos los valores de x , por lo que su radio de convergencia es infinito.

4.2. Técnicas o métodos específicos para optimizar la convergencia de las series de Taylor en situaciones donde esta es lenta o inadecuada.

Optimizar la convergencia de las series de Taylor en situaciones donde es lenta o inadecuada puede lograrse mediante diversas técnicas y métodos. Algunas de estas estrategias incluyen:

1. **Suma parcial:** Utilizar la suma parcial de la serie de Taylor, es decir, truncar la serie después de un número finito de términos. Esto puede mejorar la convergencia en ciertos rangos y reducir el error asociado con la aproximación.
2. **Reordenamiento de términos:** Experimentar con el reordenamiento de términos de la serie puede mejorar la velocidad de convergencia en algunos casos. Algunas veces, reorganizar la serie puede hacer que los términos pequeños se cancelen entre sí.
3. **Métodos de aceleración de convergencia:** Aplicar métodos específicos de aceleración de convergencia, como la aceleración de Richardson o la aceleración de convergencia de Euler, puede ser beneficioso. Estos métodos buscan mejorar la tasa de convergencia de la serie.

Ejemplo 4.2.1 Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ alrededor de $c = 0$. La serie de Taylor para esta función es:

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (4.2.7)$$

Suponga que se quiere aproximar $f(0,5)$ utilizando solo los primeros términos de la serie de Taylor, pero se nota que la convergencia es lenta. Aquí, se exploran algunas técnicas para mejorar la convergencia:

1. **Suma parcial:**

Si se utilizan solo los primeros tres términos de la serie, se obtiene:

$$f(x) \approx 1 - x + x^2$$

Esta aproximación es más efectiva que la serie completa para valores cercanos a $x = 0,5$, mejorando la convergencia local.

2. Reordenamiento de términos:

Reorganizando la serie de manera que los términos pequeños se cancelen entre sí. Para $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$, si se suma x^2 y se resta x , se obtiene una serie alternativa:

$$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = (1 - x) + (x^2 - x^3) + \dots$$

Esta serie puede converger más rápidamente en ciertos rangos.

3. **Métodos de aceleración de convergencia:** Se puede aplicar transformada para acelerar la convergencia. Sea S_n la suma parcial de la serie, la transformada es:

$$S'_n = S_{n+1} - \frac{(S_{n+1} - S_n)^2}{S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n}$$

Calculando S'_n con los primeros términos de la serie y utilizando esta nueva serie para aproximar $f(0,5)$. Estas estrategias pueden mejorar significativamente la convergencia de la serie de Taylor en situaciones donde la convergencia es lenta o inadecuada, especialmente cuando se utiliza un número limitado de términos de la serie.

4.3. Casos donde la serie de Taylor ofrece una aproximación aceptable de la función en su dominio completo

La serie de Taylor puede ofrecer una aproximación aceptable de una función $f(x)$ en su dominio completo en casos donde la función es analítica. Si $f(x)$ es analítica en un intervalo que contiene el punto c , y si todas sus derivadas existen en ese intervalo, la serie de Taylor centrada en c converge a $f(x)$ en todo el intervalo. Esto se expresa matemáticamente como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n \quad (4.3.8)$$

donde $f^{(n)}(c)$ es la n -ésima derivada de f evaluada en c .

A partir del ejemplo 4.2.1, en la función exponencial $f(x) = e^x$. Su serie de Taylor centrada en $c = 0$ es la serie de Maclaurin:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (4.3.9)$$

Esta serie converge en todo el dominio de x , haciendo que la aproximación sea aceptable en todo ese rango. Sin embargo, existen situaciones donde la serie de Taylor puede ser inadecuada. Por ejemplo, considere la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Aunque esta función es suave en su dominio $(-\infty, 1)$, su serie de Taylor alrededor de $c = 0$ es la serie geométrica:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (4.3.10)$$

Esta serie converge únicamente en el intervalo $(-1, 1)$, y su uso fuera de este rango puede resultar en una aproximación insatisfactoria.

En casos de funciones no analíticas o con comportamientos particulares, otras técnicas de aproximación, como polinomios interpolantes o funciones específicas para la función dada, pueden ser más apropiadas. Por ejemplo, para aproximarse a una función con oscilaciones rápidas, como $f(x) = \sin(x)$, la serie de Taylor puede requerir un gran número de términos para ser precisa, mientras que métodos como la interpolación mediante splines cúbicos pueden proporcionar resultados más eficientes.

Ejemplo 4.3.1 Considere la función $f(x) = \ln(x)$. La serie de Taylor centrada en $c = 1$ es:

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots \quad (4.3.11)$$

Esta serie converge para $0 < x \leq 2$. Fuera de este rango, la convergencia puede ser lenta, especialmente alrededor de $x = 0$.

Ejemplo 4.3.2 La función tangente $f(x) = \tan(x)$ tiene singularidades en $\frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es un entero. La serie de Taylor centrada en $c = 0$ es:

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots \quad (4.3.12)$$

Esta serie tiene un radio de convergencia de $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, y fuera de este intervalo, la serie diverge en las singularidades.

Ejemplo 4.3.3 La función exponencial compleja $f(x) = e^{ix}$ es relevante en análisis complejo. La serie de Taylor centrada en $c = 0$ es:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - i\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + i\frac{x^5}{120} - \cdots \quad (4.3.13)$$

Esta serie tiene un radio de convergencia infinito, lo que significa que converge para todos los valores de x . Es un ejemplo de una función analítica para la cual la serie de Taylor converge en su dominio completo.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

En este capítulo, se presentan las conclusiones obtenidas en esta investigación, las cuales guardan estrecha relación con los objetivos planteados en la misma, al igual que se destacan otros elementos que generan posibles líneas de investigación.

5.1. Conclusiones

A la luz de los objetivos planteados, se obtienen las siguientes conclusiones:

1. Se han explorado las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de una serie de Taylor en el entorno de un punto c . Se estableció que la convergencia de la serie depende de la existencia de derivadas de la función $f(x)$ hasta un orden n en un intervalo que incluye a c . La fórmula general de la serie de Taylor proporcionó una expresión polinómica que se aproxima a la función alrededor de c , con cada término basado en las derivadas de f en c .
2. Se describen métodos estratégicos para mejorar la convergencia de las series de Taylor, siendo $f(x) = e^x$ un ejemplo ilustrativo. Mediante técnicas como sumas parciales, reordenamiento de términos (S_n) y aceleración de convergencia, en la que se buscó optimizar la aproximación polinómica. El ejemplo reveló que la convergencia es rápida en entornos cercanos a $c = 0$, subrayando la importancia de la elección adecuada del punto de expansión para maximizar la eficiencia de la serie. Estas herramientas son cruciales en el análisis matemático, proporcionando soluciones más precisas y eficaces en contextos científicos y computacionales.
3. Finalmente, se encontró que la serie proporcionó aproximaciones aceptables en casos donde las funciones eran analíticas y todas sus derivadas existían en los intervalos pertinentes. El ejemplo de la función exponencial $f(x) = e^x$ destacó la convergencia de la serie de Taylor en todo su dominio, asegurando una aproximación precisa en todo el rango de x . No obstante, se observó que para funciones no analíticas o con singularidades, como $f(x) = \frac{1}{1-x}$, la serie de Taylor resultó inadecuada debido a su limitada convergencia a un intervalo específico.

5.2. Líneas futuras de investigaciones

Como líneas futuras de investigación se propone:

- Extender la Convergencia de Series de Taylor a espacios de Banach.
- Comparación de Métodos de Aproximación: Series de Taylor versus Técnicas Alternativas
- Estudio de la Efectividad de las Series de Taylor en la Aproximación de Funciones Locales

Referencias

- Arana, J. (2017). Un ejemplo de transdisciplinariedad filosófico-literaria: Borges y las paradojas de Zenón. Un ejemplo de transdisciplinariedad filosófico-literaria, 15-24.
- Bayés, A., & Costa, V. A. (2022). Calculadora gráfica GeoGebra para el estudio de funciones polinómicas, polinómicas y series de Taylor. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 11.
- Castorena Martínez, L. A. (2000). Puntos críticos de la funcional área de una curva compleja cerrada sobre una variedad de métricas Kähler.
- Chambergo, E. J. S., & Alcarazo, D. E. T. (2019). Estrategias de marketing educativo para el posicionamiento de una institución educativa?2018. *Horizonte empresarial*, 6(1), 24-31.
- Churchill, R. V., Brown, J. W., & Rapun, L. A. (1986). Variable compleja y aplicaciones (pp. 14-22). McGraw-Hill.
- de Franco, M. F., & Solórzano, J. L. V. (2020). Paradigmas, enfoques y métodos de investigación: análisis teórico. *Mundo Recursivo*, 3(1), 1-24.
- García, G., Quintero, J. R., & Rodríguez, C. (2013). Funcionales no compactas y puntos críticos.
- He, J., y Ji, F. (2019). Solución de la serie de Taylor para la ecuación de Lane-Emden. *Revista de Química Matemática*, 57(8), 1932-1934.
- Herrera, A. R., Herrera-Alcántara, O., & Landassuri-Moreno, V. M. (2015). Aproximación de funciones con EPWavenets. *Res. Comput. Sci.*, 93, 95-109.

- Huttin, R., & Goedert, J. (2004). Aproximación de funciones por polinomios de Taylor en un intervalo cerrado. In X Congreso Argentino de Ciencias de la Computación.
- Jiménez Rodrigo, M. L. (2020). Posibilidades de la investigación documental para el análisis interseccional de las políticas de igualdad.
- Licera, R. M., Gascón, J., & Bosch, M. (2019). Las tres dimensiones fundamentales del problema didáctico de los números reales. *Contextos de Educación*, (26).
- Mardones A. y Zarate J. (2020). Sucesiones y series de funciones. Universidad del BIO-BIO.
- Martínez, J . (2018). Desarrollo de Taylor de la función binómica. Universidad Politécnica de Valencia.
- Martínez, M. J. (2017). Desarrollo de una función en polinomio de Taylor (McLaurin).
- Mercau, S., Holgado, L., Venturini, C., Camacho, M. B., Pérez, M. J., & Marcilla, M. (2019). Polinomios de Taylor Maclaurin: una experiencia b learning.
- Millán, G. (2021). On the time series length for an accurate fractal analysis in network systems. arXiv preprint arXiv: 2105.02920.
- Mendoza Guzmán, J. E. (2017). Las series de potencias en el proceso de formalización de lo trascendente en Matemáticas.
- Pizarro, D., López, C., y Almira, J. (2018). Etapa Superestructural de la Integral. *Revista Logos, Ciencia y Tecnología*, 10(2), 135-152.
- Ramos-Galarza, C. A. (2020). Los alcances de una investigación. *CienciAmérica*, 9(3), 1-6.
- Sundararajan, M., Dhamdhere, K., & Agarwal, A. (2018). The Shapley Taylor interaction

- index. In International conference on machine learning (pp. 9259-9268). PMLR.
- Suárez Alemán, C. O. (2011). Orígenes y evolución del Teorema de Rolle. Epsilon.
- Tong, Y., Xiong, S., He, X., Pan, G. y Zhu, B. (2021). Redes neuronales simplécticas en forma de serie de Taylor para sistemas hamiltonianos. Revista de Física Computacional, 437, 110325.
- Uribe, M. Z. (1984). Teoría de puntos críticos de funciones localmente lipschitzianas y sus aplicaciones. Revista colombiana de matemáticas, 18(3-4), 83-97.
- Vasilachis, I. (2019). Estrategias de investigación cualitativa. Buenos Aires: Editorial Gedisa.

Anexos

Anexo A.

La realización de esta investigación requirió la elaboración y el seguimiento de un meticuloso cronograma de estudios. La estructuración de dicho cronograma no solo brindó un marco organizativo esencial, sino que también garantizó la coherencia y la progresión lógica en la ejecución de cada fase del estudio.

Cronograma de estudios	
Entrega del anteproyecto.	10-12 Noviembre, 2023.
Evaluación del Anteproyecto.	13-15 Noviembre, 2023.
Observaciones de los jurados.	16-23 Noviembre, 2023.
Elaboración del proyecto completo	26 Diciembre, 2023.
Entrega de tesis a los jurados	27-28 Diciembre, 2023.
Presentación de tesis	4-5 Enero, 2023
Entrega de tesis	9-12 Febrero, 2023

Anexo B.

Se presenta una tabla de simbología basada en el contenido de esta investigación:

Símbolo	Significado
$f(x)$	Función f que depende de la variable x
$f(a)$	Valor de la función f evaluada en el punto a
$f'(x)$	Derivada primera de la función f respecto a x
$f''(x)$	Segunda derivada de la función f respecto a x
$E_0(x, p)$	Término de error de orden 0
$P_0(x, p)$	Polinomio de Taylor de orden 0 para f en el punto p
$E_1(x, p)$	Término de error de primer orden en la aproximación de $f(x)$
$P_1(x, p)$	Polinomio de Taylor de primer orden para f en el punto p
$E_2(x, p)$	Término de error de segundo orden en la aproximación de $f(x)$
$P_2(x, p)$	Polinomio de Taylor de segundo orden para f en el punto p
$\frac{f(x)-f(p)}{(x-p)^2}$	Razón de diferencia entre $f(x)$ y $f(p)$ dividida por $(x-p)^2$
M	Constante utilizada en la aproximación cuadrática
c_x^0, c_x^1, c_x^2	Puntos entre p y x utilizados en la demostración de aproximaciones
$F(x)$	Función F definida cerca de $x = c$
$P_n(x)$	Polinomio de Taylor de n -ésimo grado para F en $x = c$