

República Dominicana

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de
Maestría en Matemáticas

Título

Análisis de la ecuación de Kepler para determinar la alineación de dos planetas

Sustentante

Wilber Antonio Collado Gil

Asesor

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

TÍTULO

ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE KEPLER PARA DETERMINAR LA
ALINEACIÓN DE DOS PLANETAS

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en la investigación, son responsabilidad exclusiva **del** sustentante del mismo. Las citas y las consultas bibliográficas se han incluido respetando el derecho de autor.

Título

Análisis de la ecuación de Kepler para determinar la alineación de dos planetas

Tesis presentada por **Wilber Antonio Collado Gil** para la obtención del grado de
Magister en Matemáticas.

Composición del tribunal evaluador

Dr. Victor José Galán

Metodología

MA. Danny Manzueta

Contenido

MA. Jesús Manuel Vilorio

Redacción

Lic. Yuderka Reyes

Directora de postgrado

Índice general

Declaración de autoría	III
Agradecimientos	VI
Dedicatorias	VII
Resumen	VIII
CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN	1
1.1. Antecedentes	1
1.1.1. Antecedentes históricos	1
1.1.2. Antecedentes académicos	3
1.2. Planteamiento del problema	5
1.3. Justificación	6
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivos específicos	6
1.5. Alcances y límites	7
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL	8
2.1. Ecuaciones de Kepler	8
2.1.1. Anomalía media	8
2.1.2. Deducción de las leyes de Kepler	9
2.2. Órbitas y velocidades de dos planetas	11
2.2.1. Expresión matemática y su deducción	12
2.2.2. Parámetros geométricos de la órbita	13
2.3. Alineación de dos planetas	14
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA	16
3.1. Diseño de la investigación.	16
3.2. Tipo de investigación.	16
3.3. Método de la Investigación.	16
3.4. Procedimiento de investigación	17

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS	18
4.1. Introducción	18
4.2. Órbitas y velocidades de dos planetas	18
4.3. Ecuación de Kepler para determinar la alineación de dos planetas . .	19
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES	28
5.1. Introducción	28
5.2. Conclusiones	28
5.3. Líneas futuras de investigaciones	29
Referencias	30
Anexos.	I
Anexo A. Simbología	II
Anexo B. Fórmulas	III
Anexo C. Cronograma	IV

Agradecimientos

A Dios: Agradezco a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de este trayecto, por ser mi fortaleza en los momentos de debilidad y por brindar una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo felicidad.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO): Gracias por acogerme para recibir el pan de la enseñanza en tan prestigiosa casa de altos estudios a través de la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, por permitirme formarme en ella, por medio de todas las personas que fueron partícipes de este desarrollo, ya sea de forma directa o indirecta, gracias a todos ustedes por su aporte, que este trayecto se vería reflejado en la culminación de nuestro paso por la facultad.

A los profesores de la maestría: Sus palabras fueron sabias, sus conocimientos rigurosos y precisos, a ustedes nuestros queridos profesores, les debemos nuestros conocimientos. Donde quiera que estemos, los llevaremos con nosotros en nuestro transitar profesional. Su semilla de conocimientos, germinó en el alma y el espíritu. Gracias por su paciencia, por compartir sus conocimientos de manera profesional e invaluable, por su dedicación perseverancia y tolerancia.

Wilber Antonio Collado Gil

Dedicatorias

A Dios:. Por darme la salud, la vida, y las fuerzas para culminar este proceso que una vez me propuse, gracias porque a pesar de que el 2022 fue un año muy difícil, me permitió iniciar este trayecto que hoy culminó. Gratitud

A mis padres: Jomary M. Gil Reyes y Rafael Ant. Collado Jerez, Gracias por siempre brindarme su apoyo incondicional y por motivarme cada día a seguir adelante.

A mi esposa: Katherine Viloría Hernández, gracias amor por ser mi fuente de motivación, por tu apoyo, y gran esfuerzo que realizaste, por mantenerte a mi lado, esto es tuyo también. Te amo

A mis hermanos: Wilmary Collado y Walbert Collado. Gracias por su apoyo moral e incondicional.

A mis compañeras de estudios y equipo: Eridania, Eliana, Frankely y Mariza Gracias por compartir esta aventura profesional conmigo y brindarme apoyo en este proceso.

Wilber Antonio Collado Gil

Análisis de la ecuación de Kepler para determinar la alineación de dos planetas

Wilber Ant. Collado Gil

Sustentante

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Asesor

RESUMEN

Este estudio se propuso analizar la ecuación de Kepler con el objetivo general de determinar la alineación de dos planetas. Para lograr esto, se establecieron dos objetivos específicos: identificar las órbitas y velocidades de los planetas, y aplicar las ecuaciones de Kepler para determinar su alineación.

En cuanto a la metodología, se adoptó un diseño no experimental y transversal, con un enfoque analítico y descriptivo. La investigación se clasificó como descriptiva, exploratoria y explicativa. Se utilizó un método cualitativo, que abarcó la revisión de literatura, la estructuración del contenido, la búsqueda de información en universidades y la orientación del asesor.

Durante el análisis, se aplicaron las leyes de Kepler para describir las órbitas y calcular las velocidades orbitales de dos planetas. Además, se utilizaron las ecuaciones de Kepler para modelar la posición relativa de los planetas y evaluar su alineación en el pasado. Se destacó la inclusión de las inclinaciones orbitales para obtener una comprensión más completa de la alineación desde una perspectiva geométrica.

Los hallazgos revelaron una identificación precisa de órbitas, velocidades y la determinación de la alineación entre dos planetas. Este análisis contribuyó significativamente al conocimiento en astronomía y astrofísica, ofreciendo una perspectiva valiosa sobre la dinámica orbital y las relaciones geométricas entre planetas en el sistema solar.

Palabras clave: Ecuación de Kepler. Alineación planetaria. Órbitas planetarias. Velocidades planetarias. Planetas. Sistema solar.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

Introducción

En este capítulo se presenta el desarrollo histórico de la ecuación de Kepler. Así como el desarrollo histórico de la alineación de dos planetas, el plantemiento del problema de estudio, justificación de la investigación como los objetivos, el alcance y límites que persigue dicha investigación.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Antecedentes históricos

Desarrollo histórico de la ecuación de Kepler

Desde la antigüedad el hombre ha presentado problemas para determinar la posición de los planetas en los firmamentos, ya sea por la controversia religiosa como también por la parte práctica. Actualmente, por el avance del Cálculo Infinitesimal y la Mecánica Celeste, para determinar la posición, ya sea de un planeta o satélite, o algún cuerpo que se encuentre sometido a la atracción gravitacional de otros y se hace necesario darle solución a la ecuación de Kepler:

$$M = E - e \sin E \quad (1.1.1)$$

Si ya se conocen los valores de M y e , entonces sólo resta encontrar el valor de E . Los criterios que pertenecen a esta ecuación tienen una buena interpretación física. Donde: M es la anomalía media o lo que se conoce como el ángulo girado por un planeta cuyo movimiento es circular uniforme desde un punto conocido, por tanto, $M \in [0, 2\pi]$ e es la excentricidad de la elipse, la cual describe el planeta bajo el intervalo $0 \leq e < 1$, E es la anomalía excéntrica, es decir, el ángulo que le corresponde a la posición del planeta en los parámetro de una elipse. (Alvarado, M. A. D. (2013).

Debido a que esta ecuación no posee un carácter lineal, se convirtió en una de las primeras que se intentó resolver de forma numérica. Si se retoma en el tiempo se

puede decir que desde Newton este problema ha sido estudiado ya sea por los matemáticos como por los astrónomos, ahora bien, dependiendo del contexto de que esta se resuelva se tienen diferentes soluciones, pero para buscar el origen de la ecuación de Kepler se debe retomar a los tiempos fértiles; donde uno probablemente no podría elegir un tiempo más auspicioso para nacer, con tales dotes astronómicos para haber vivido citado por (Ortiz Alonso, M. A. (2021). Él nació veintiocho años después de la muerte de Nicolaus Copernicus (1473-1543) y tuvo la oportunidad de conocer y trabajar con el astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601), quizás el observador más grande de la historia a simple vista. Era un contemporáneo de Galileo Galilei (1564-1642) y vivió para conocer la invención del telescopio y recibir informes de Galileo sobre lo que se veía a través de él: las cuatro lunas de Júpiter, por ejemplo.

El propio Kepler tuvo la oportunidad de usar el telescopio, y estableció la fiabilidad y veracidad de las observaciones telescópicas a través de su estudio de los principios de cómo la luz pasa a través de las lentes (presentado en una obra llamada *Dioptrice*, 1611). Como resultado del trabajo empírico de Galileo y el trabajo teórico de Kepler, el advenimiento del telescopio anunció una nueva era en los tipos de observaciones que podrían hacerse de los cielos. Esta era fue testigo de grandes avances en astronomía. (Carrillo, R., y Paz, H. 2010).

Cuando Brahe se traslada a Praga toma a Kepler como su asistente. Aunque ellos tenían punto de vista de manera científica diferentes. Una de ella era que Kepler creía en el modelo de Copérnico, con el sol en el centro mientras que Brahe creía en que la Tierra era el centro del universo.

Al fallecer Brahe y quedando en el poder las tablas de observaciones de Marte, Kepler se lanza al reto de domar la órbita de este planeta, el más díscolo de todos, ya que era el que más se desviaba de su posición predicha. Luego se da cuenta de que hay que rechazar la teoría de los movimientos circulares uniformes, después de probar con una órbita circular donde el Sol se encontraba en el punto ecuanter. Kepler renuncia a la hipótesis de que la órbita tenía que ser circular cuando observó que la mayoría

de posiciones de Marte encajaban perfectamente en la nueva órbita así definida, dos observaciones se separaban unos 8 grados de la posición teórica.

Luego tras probar con varias curvas, concluye que los planetas se movían en elipses. De esta manera, establece tres leyes empíricas, que se conocen como las tres leyes de Kepler las cuales se enuncian de la siguiente forma:

1. Un planeta gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica con el Sol ubicado en uno de los focos.
2. La recta imaginaria que une al Sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período orbital del planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita.

Una implicación inmediata de estas tres leyes, en particular la segunda, es que el planeta no se mueve con movimiento uniforme, desplazándose más rápido cuando se encuentra cerca del Sol que cuando se encuentra más alejado. Lo cual dificulta el cálculo de la posición del planeta en su órbita y para este caso Kepler dedujo lo que se denomina Ley Horaria del movimiento planetario, que trata de dar la posición del planeta en función del tiempo. Y es aquí donde tiene origen la ecuación de Kepler, ya que es preciso resolverla para poder determinar la posición de un planeta para un instante de tiempo dado. (Guerrero Peñuela, G. 2014).

1.1.2. Antecedentes académicos

Giuppone, C. A. (2011) en su estudio sobre los “Ajustes orbitales y dinamica de sistemas planetarios extrasolares”, de la Universidad Nacional de Córdoba, analizó la dispersión en las masas y elementos orbitales de los exosistemas detectados. A pesar que para razones de masa grandes la mayoría de los datos sintéticos efectivamente son detectados en sistemas resonantes, para valores bajos de m_2/m_1 una gran proporción de ajustes orbitales no son detectados dentro de la resonancia y erróneamente son

indicados como configuraciones no resonantes.

Diloné M. (2013), en su tesis doctoral titulada “Métodos iterativos aplicados a la ecuación de Kepler” de la Universidad de la Rioja, estableció la caracterización de la teoría de convegenia semilocal para cierto valores de la excentricidad, en los cuales se garantiza la convergencia del método de Newton-Raphson, así obtuvo resultados sobre su existencia y unicidad, los cuales comprobó bajo las condiciones de Cauchy-Kantorovich. También verificó las condiciones fuerte de Kantorovich en donde obtuvo su rango de excentricidad, por encima de la α -teoría de Wangzho y Smale.

En este sentido Gómez (2015) en su investigación sobre “Técnicas de computación científica aplicada al ámbito de la Mecánica Celeste y de la Astrodinámica” de la Universidad de La Rioja, se estableció que las herramientas habitualmente utilizadas en los ámbitos de la Mecánica Celeste y de la Astrodinámica adolecen de cierta heterogeneidad en los lenguajes de programación son empleados, así como de un diseño poco intuitivo o en el uso de la línea de comandos sobre sistemas operativos de tipo UNIX.

En el mismo sentido Dugaro, A. (2020) en su estudio sobre “Formación de planetas terrestres: Diferenciación, estructura y composición” de la Universidad Nacional de La Plata, concluye que en lo que respecta a los planetas que sobreviven en la ZH, los resultados obtenidos son muy variados y dependientes del escenario dinámico de trabajo. En efecto, en sistemas que albergan gigantes gaseosos análogos a aquellos de nuestro Sistema Solar, los planetas que finalizan en la ZH pueden ser de dos clases independientemente del modelo colisional adoptado para el desarrollo de las simulaciones. Por un lado, planetas cuyas zonas de alimentación están restringidas a un entorno de la ZH, los cuales son llamados Clase A. Por otra parte, planetas con zonas de alimentación más ampliadas que alcanzan regiones más allá de la línea de hielo, los cuales son denominados Clase B.

1.2. Planteamiento del problema

Determinar la alineación de dos planetas es una forma muy elegante de saber qué condiciones, métodos o ecuaciones tienen una región de convergencia garantizada, lo que permite decir que, en este elemento, las ecuaciones de Kepler son válidas.

La aplicación de las ecuaciones de Kepler tiene implicaciones importantes no solo para el desarrollo de las matemáticas, sino también para el desarrollo de otras ciencias en las que se integra. Es a partir de aquí que un gran número de anomalías que se dan en las estrellas pueden encontrar solución según las ecuaciones de Kepler y el método gaussiano de órbitas planetarias. Las ecuaciones de Kepler son de la forma:

$$M = E - e \sin E$$

donde E es la excentricidad media, e es la excentricidad de la elipse y M es la anomalía media, que es útil en astronomía porque ayuda a determinar la posición de un planeta.

Asimismo, aplicando las ecuaciones de Kepler para obtener un punto de partida se puede establecer una relación que permita ubicar la posición de un planeta. Dadas las características de estas propuestas, es de suma importancia estudiarlas, ya que a partir de estos puntos salientes se puede establecer un área de solución.

Por lo tanto, las leyes de Kepler juegan un papel fundamental en la obtención de las órbitas y velocidades de los planetas, considerando los diversos aspectos que conducen a estas leyes.

1. ¿Cómo identificar las órbitas y velocidades de dos planetas?
2. ¿Cómo aplicar las ecuaciones de Kepler para determinar la alineación de dos planetas?

1.3. Justificación

Se eligió este tema por varias razones, por ejemplo: las ecuaciones de Kepler determinan la importancia y la eficiencia de la alineación de dos planetas para determinar la órbita y la velocidad del planeta. En otras palabras, las ecuaciones de Kepler ayudan a encontrar la relación entre el tamaño y la orientación del planeta.

Kepler fue el pionero en descubrir las leyes que gobiernan el movimiento planetario alrededor del Sol. Estableció que los planetas siguen una órbita elíptica, donde uno de los focos, representado como $\mathbf{F}$, está ocupado por el Sol. Sin embargo, su movimiento no es uniforme; en cambio, siguen la ley de las áreas, lo que implica que barren áreas iguales en tiempos iguales a lo largo del radio vector que conecta el Sol y el planeta.

La elección de este tema se sustenta en dos aspectos fundamentales: la relevancia y la aplicabilidad de los métodos que posibilitan, a partir de la alineación de dos planetas, la identificación de sus órbitas y velocidades mediante la ecuación de Kepler.

Este trabajo va a servir de consulta para futuras investigaciones dejando pautas a seguir y específicamente para quienes se inclinen por temas similares a este. Finalmente, la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental tendrá un aporte teórico a disposición de la comunidad interesada en temas similares.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Analizar las ecuaciones de Kepler para determinar la alineación de dos planetas.

1.4.2. Objetivos específicos

1. Identificar las órbitas y velocidades de dos planetas.

2. Aplicar las ecuaciones de Kepler para determinar la alineación de dos planetas.

1.5. Alcances y límites

Esta investigación estuvo delimitada a las matemáticas aplicadas, específicamente en la astronomía y la mecánica celeste en donde se aplicó la ecuación de Kepler para la alineación de dos planetas, en la cual se identificaron las órbitas y velocidades.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

Introducción

En este capítulo se presentan las definiciones y teoremas que sirven de soporte a esta investigación.

2.1. Ecuaciones de Kepler

Kepler descubrió las leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol (Carrillo y Paz, 2010). Los planetas giran en una órbita elíptica, uno de cuyos focos **F** lo ocupa el Sol, pero no lo hacen con un movimiento uniforme, sino que el radio vector Sol-planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (ley de las áreas). La expresión matemática de esta ley es la ecuación de Kepler:

$$M = E - e \sin E$$

donde: **M** es la anomalía media o ángulo que recorrería un planeta ficticio que se moviese con movimiento uniforme por la circunferencia principal, e en $(0 \leq e < 1)$ es la excentricidad de la elipse y E es la anomalía excéntrica. (Ortiz, 2021).

2.1.1. Anomalía media

Supóngase que el planeta da una vuelta al Sol en un tiempo denominado periodo T . El movimiento medio n es el ángulo girado en la unidad de tiempo suponiendo movimiento uniforme $n = 360/T$ en grados/día si el periodo se expresa en días (Gue-
rrero, 2014). Usando la 3ª ley de Kepler:

$$\frac{GMT^2}{a^3} = 4\pi^2$$

resulta:

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G \text{ Masa}}{a^3}}$$

en radianes/día siendo a el semieje mayor de la órbita. Se obtiene n en radianes/día o en el día si a se expresa en unidad astronómica (UA) mediante:

$$n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$$

donde k es la constante de Gauss, o el movimiento medio diario de la Tierra cuyo valor es 0.01720209895 radianes/día o 0.9856076686 grados/día. Si t_0 es el instante de paso por el perihelio P, la anomalía media en un instante t es:

$$M = n \times (t - t_0).$$

2.1.2. Deducción de las leyes de Kepler

Las ecuaciones

$$K = r^3 (\theta')^2 - r^2 r'' \quad \text{y} \quad 0 = r\theta'' + 2r'\theta' \quad (2.1.1)$$

no tiene soluciones explícitas $r = r(t), \theta = \theta(t)$ pero sí se puede probar que, sin atender a la dependencia en t (la parametrización de la curva), las órbitas son secciones cónicas y satisfacen las leyes de Kepler en el caso de los planetas. (Ortiz, 2021).

La segunda ecuación de (2.1.1) se puede reescribir como $\frac{1}{2}(r^2\theta')' = 0$ y esto implica que

$$r^2\theta' = h \quad \text{con } h \text{ constante (dependiendo del planeta).}$$

De nuevo, en términos físicos, esto proviene de la conservación del momento angular. Ahora bien, el área barrida por una curva en polares entre el ángulo 0 y el ángulo θ es (cambio de variable o argumento geométrico):

$$\frac{1}{2} \int_0^\theta r^2(\alpha) d\alpha$$

Si $A(t)$ es el área barrida por una solución de (2.1.1) en función del tiempo, se tiene, por la regla de la cadena:

$$A'(t) = \frac{1}{2} r^2(\theta(t)) \theta'(t) = \frac{1}{2} h$$

Esto prueba la segunda ley de Kepler. Teniendo en cuenta $r^2\theta' = h$, la primera ecuación de (2.1.1) es $K = h^2r^{-1} - r^2r''$, que tras el cambio $u(t) = 1/r(t)$ se escribe de manera más complicada como

$$Ku^2 = h^2u^3 - 2u^{-3}(u')^2 + u^{-2}u''.$$

Dado que no existen soluciones explícitas para la ecuación en función del tiempo, proponga la notación U para representar u como una función de θ , es decir, $u(t) = (U \circ \theta)(t)$. Aplicando la regla de la cadena y utilizando la relación $\theta' = hu^2$, después de algunos cálculos, la ecuación se simplifica a:

$$U'' + U = -Kh^{-2}$$

Cuya solución general es $U(\theta) = Kh^{-2} + \mu \cos(\theta - \lambda)$. Cambiando el origen del ángulo en las coordenadas polares, se puede suponer $\lambda = 0$ y se tiene finalmente que, salvo rotaciones, las soluciones de (2.1.1) describen una curva en polares dada por

$$r(\theta) = \frac{h^2K^{-1}}{1 + \lambda h^2K^{-1} \cos \theta}.$$

Por otro lado, la ecuación de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en polares centradas en uno de sus focos es

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad \text{donde} \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Nótese que la excentricidad e cumple $0 \leq e < 1$. Por tanto, siempre que $0 \leq \lambda h^2K^{-1} < 1$, como ocurre para todos los planetas, se pueden ajustar los parámetros y se obtiene la primera ley de Kepler. (Giuppone, 2011).

Diga que T es el periodo orbital, entonces cuando $t \in [0, T]$ se recorre toda la elipse y se recorrió el área de toda ella, que según lo introducido en la deducción de la segunda ley de Kepler, es

$$A(T) = \frac{1}{2} \int_0^T r^2(\theta(t))\theta'(t)dt = \frac{1}{2}Th$$

Por otro lado, el área de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ es $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - e^2}$. Comparando con el denominador de la fórmula para la órbita de un planeta, se sabe

que $a(1 - e^2) = h^2 K^{-1}$, entonces

$$\frac{1}{2}Th = \pi a^{3/2} h K^{-1/2}$$

Cancelando la h y elevando al cuadrado se obtiene la tercera ley de Kepler porque K es una constante universal.

2.2. Órbitas y velocidades de dos planetas

Definición 2.2.1 Una órbita es la trayectoria que describe un objeto físico alrededor de otro mientras está bajo la influencia de una fuerza central, como la fuerza gravitatoria. (Trejo, 2009).

La velocidad orbital es la velocidad que debe tener un planeta, satélite (natural o artificial) o similar para que su órbita sea estable.

Por ejemplo, la velocidad orbital de los satélites geoestacionarios (en una órbita circular) que circundan la Tierra es de aproximadamente 10900 kilómetros por hora. A altitudes inferiores, esta velocidad es notablemente superior: por ejemplo, la Estación Espacial Internacional órbita a unos 7.66 km/s, o 27.576 km/h².

Si el objeto en órbita circular incrementase su velocidad, pasaría a una órbita elíptica, con una velocidad que estaría determinada en cada punto por las leyes de Kepler sobre el movimiento planetario. Si se moviera aún más rápido, podría alcanzar la velocidad de escape y describiría una órbita parabólica; por encima de dicha velocidad, la trayectoria u órbita sería hiperbólica. (Gómez, 2015)

Salvo en el caso de la órbita circular, la velocidad orbital no es constante, sino que varía a lo largo de la órbita, siendo tanto menor cuanto más alejado está el cuerpo que órbita del astro que le atrae. En el caso del movimiento de los planetas en el Sistema Solar cabe destacar tres valores significativos:

- Velocidad orbital mínima es la que corresponde al afelio.

- Velocidad orbital máxima es la que corresponde al perihelio.
- Velocidad orbital media durante un recorrido completo de la órbita.

Las velocidades orbitales se expresan en km/s o en km/h. Suele emplearse el valor de velocidad orbital media. Así, el planeta Tierra tiene una velocidad orbital media de 29.78 km/s.

2.2.1. Expresión matemática y su deducción

Expresión matemática. Si la órbita es circular, la magnitud de la velocidad es constante en toda la órbita y está determinada por:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

donde v_{orb} es la velocidad orbital, G la constante gravitacional, M la masa del cuerpo atrayente y r el radio de la órbita. La velocidad orbital no depende de la masa del cuerpo que orbita, aunque sí es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del radio de la órbita. Es decir, cuanto mayor sea el radio, menor es la velocidad necesaria para describir la órbita. (Carrillo y Paz, 2010).

Deducción de la expresión matemática de la velocidad de la órbita circular a partir de la segunda ley de Newton: Teniendo en cuenta que la fuerza de gravedad es una fuerza de aceleración centrípeta, es decir, que actúa sobre un objeto en movimiento sobre una trayectoria curvilínea y que está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria, se deduce que:

$$F_g = F_c$$

Sustituyendo cada fuerza por su expresión matemática tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Simplificando la ecuación y despejando la velocidad, obtenemos la expresión de la velocidad orbital:

$$v_{orb} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Como se puede observar, la masa m del objeto atraído no es relevante para la velocidad orbital. Es decir, la velocidad requerida para que un objeto orbite alrededor de un planeta de masa M a una distancia r desde el centro de dicho planeta, es independiente de su masa. (Diloné, 2013).

Si en vez de una órbita circular se trata de una órbita elíptica, la expresión de la velocidad en función del radiovector r es: 4

$$v = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}$$

siendo a = semieje mayor de la elipse.

2.2.2. Parámetros geométricos de la órbita

Los elementos orbitales son los parámetros necesarios para especificar una órbita, utilizando un modelo de dos masas obedeciendo las leyes del movimiento de Newton. Existe seis parámetros básicos, también denominados elementos keplerianos en honor a Kepler. (Carrillo y Paz, 2010)

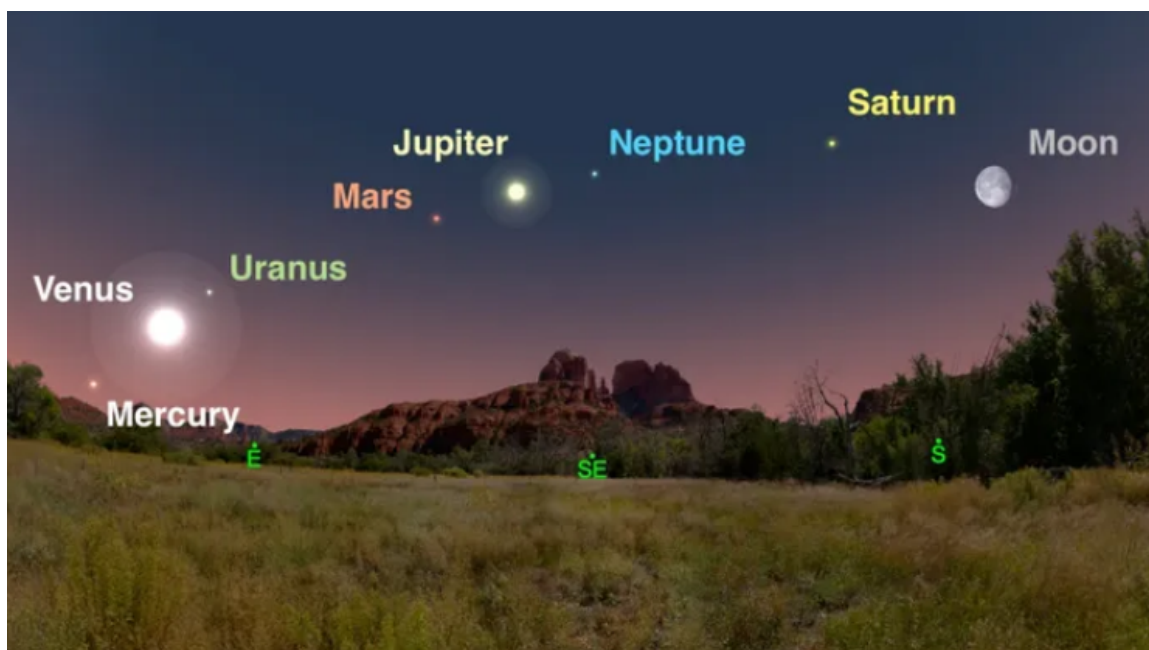
1. Longitud del nodo ascendente (Ω).
2. Inclinação (i).
3. Argumento del perihelio (ω).
4. Semieje mayor (a).
5. Excentricidad (e).
6. Anomalía media de la época (M_o).

Además, otros elementos orbitales son: anomalía verdadera (v), semieje menor (b), excentricidad linear (ϵ), anomalía excéntrica (E), longitud media (L), longitud verdadera (l) y período orbital (T).

2.3. Alineación de dos planetas

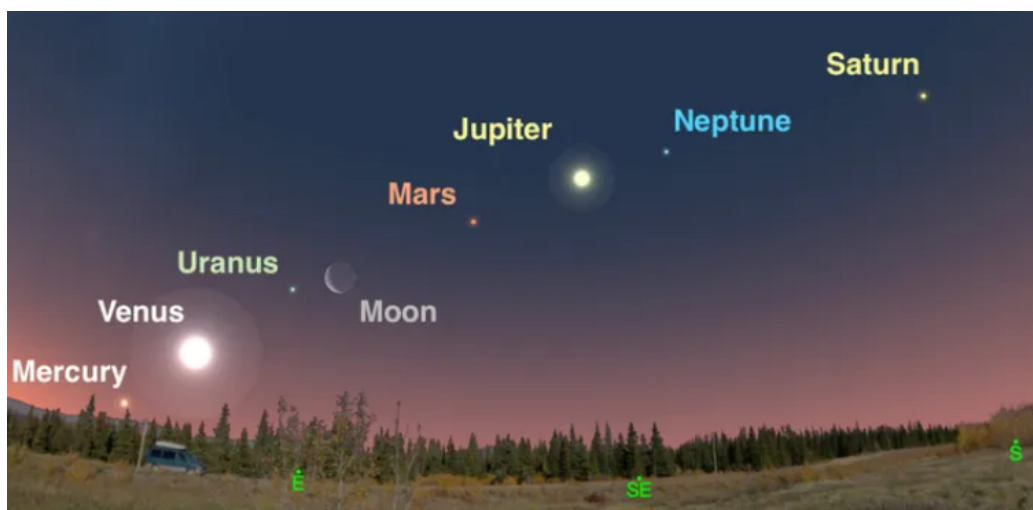
Durante el mes de junio, habrá un encuentro planetario muy poco frecuente en el cielo de la Tierra. Se podrá observar la alineación de todos los planetas principales de nuestro sistema solar, en la que también participará la Luna, del 17 al 27 de junio.

Este inusual fenómeno tiene como protagonistas a los cinco planetas que pueden verse a simple vista: Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno. Todos ellos son lo suficientemente brillantes como para hacerse notar incluso en cielos urbanos contaminados por la luz; Venus es el más brillante de todos, y Mercurio el de menos brillo. Los planetas podrán verse en el cielo en el mismo orden en que se ubican con respecto al sol.



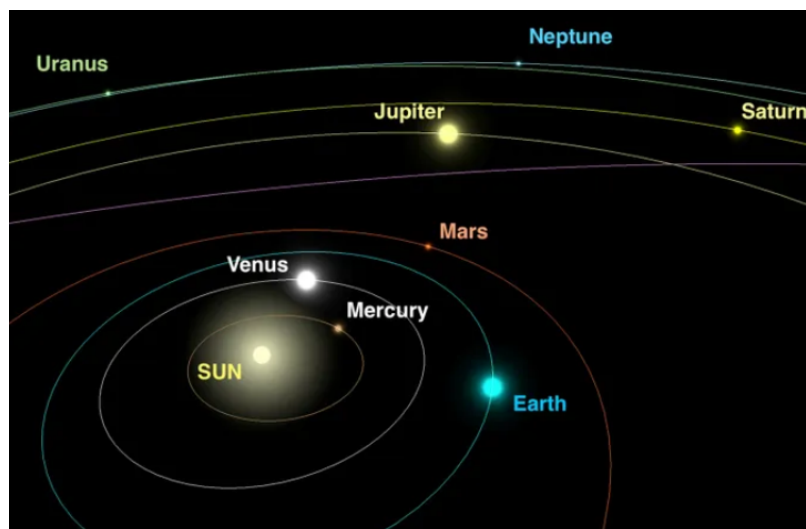
Urano y Neptuno, los más alejados, también se agruparán en la misma área, aunque será más difícil detectar a los dos gigantes de hielo, y para conseguirlo, será necesario usar binoculares. Observa el cielo y busca al verdoso Urano entre Venus y Marte, y al azulado Neptuno, entre Júpiter y Saturno.

La gran mayoría de personas en el mundo tendrán la oportunidad de observar



esta alineación planetaria, pero algunas estarán mejor posicionadas que otras. Quienes estén en latitudes nortañas, por encima de ciudades como Nueva York y Londres, tendrán dificultades para observar a Mercurio, el planeta más cercano al sol, tan cerca del horizonte que la luz del amanecer podría no dejarlo brillar. En estas regiones, otros planetas también se aferrarán al horizonte oriental, lo que dificulta verlos a todos.

Sin embargo, a medida que avanza el mes, Mercurio aparece más alto en el cielo, lo que facilita su detección. Los que están más al norte, como los del norte de Escandinavia y Alaska, no podrán ver los planetas directamente en esta época del año en la que el sol nunca se pone.



CAPÍTULO III METODOLOGÍA

Introducción

En este apartado, se presentan cada uno de los lineamientos metodológicos que sigue el curso de este estudio, dentro del cual se detallan el diseño, tipo y método de la investigación en este trabajo.

3.1. Diseño de la investigación.

La intervención planificada en este estudio se caracteriza por su diseño no experimental, orientado a comprender la ecuación de Kepler y su aplicación para determinar la alineación de dos planetas. (Mendoza, C. (2020).

3.2. Tipo de investigación.

La investigación fue de tipos descriptivo, exploratorio y explicativo. Descriptivo porque comprende el análisis e interpretación de la naturaleza actual y la composición o proceso de los fenómenos, Inacio, E. (2019). Exploratorio ya que tiene como objeto examinar un problema de investigación poco estudiado, Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C. (2020) y explicativo ya que busca analizar la condiciones de un fenómeno y por qué ocurre, y por qué se relacionan dos o más variables. (Sampieri, 2018).

3.3. Método de la Investigación.

Esta investigación utilizó el método cualitativo ya que puede ser visto como un término que cubre una serie de método y técnica con valor interpretativo que pretendes describir, analizar y sintetizar el significado de hecho que se suscitan más o menos. (Inacio, 2019).

3.4. Procedimiento de investigación

- En primer lugar, se trabajó en la lectura de documentos relacionados con el tema de investigación, con el fin de comprender los conocimientos existentes y establecer los antecedentes y limitaciones del tema a estudiar.
- Luego, en un segundo paso, se desarrolla la estructura del contenido de la investigación y su análisis.
- Se buscó información de materiales físico en Universidades para verificar la revisión de literatura sobre el tema.
- El asesor orientó el proceso de investigación.
- La documentación fue presentada al comité evaluador para su revisión, posteriormente se llevaron a cabo mejoras significativas en el contenido.
- Se realizó una verificación del cumplimiento de los objetivos propuestos al inicio de la investigación.
- Al concluir, la tesis será presentada en su totalidad, permitiendo a los jurados y al asesor expresar sus perspectivas con el objetivo de enriquecer y perfeccionar la investigación.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1. Introducción

En este capítulo se presentan diferentes teoremas y conceptos a los fines de establecer las condiciones que faciliten el análisis de la ecuación de Kepler para determinar la alineación de dos planetas en las cuales se identifican las órbitas y velocidades y además cómo aplicar dicha ecuación de Kepler.

4.2. Órbitas y velocidades de dos planetas

La identificación de las órbitas y velocidades de dos planetas implica una aplicación cuidadosa de la ecuación de Kepler y otras herramientas astronómicas. A continuación, se detallan los pasos generales para llevar a cabo este proceso:

1. Conoce las Leyes de Kepler:

- Primera Ley de Kepler (Ley de las Órbitas): Las órbitas planetarias son elípticas, con el Sol en uno de los focos.
- Segunda Ley de Kepler (Ley de las Áreas): La línea que conecta un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales, lo que implica variaciones en la velocidad orbital.
- Tercera Ley de Kepler (Ley de los Períodos): El cuadrado del período orbital de un planeta es proporcional al cubo de su semieje mayor.

$$T^2 \propto a^3$$

Donde: T es el período orbital del planeta (el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol). a es el semieje mayor de la órbita elíptica del planeta (la mitad de la longitud del eje mayor de la elipse). La constante de proporcionalidad es la misma para todos los planetas en el sistema solar.

Este resultado puede ser expresado de manera más específica utilizando la constante de proporcionalidad e introduciendo la constante gravitacional G y la masa del Sol M_s :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s} \cdot a^3$$

además, es significativo porque proporciona una relación matemática precisa entre la duración del año de un planeta (su período orbital) y las dimensiones de su órbita.

- 2. Obtén Datos Astronómicos:** En esta etapa se accede a bases de datos astronómicas o se utiliza software especializado para obtener datos precisos sobre las posiciones de los planetas en un momento específico.
- 3. Aplica la Ecuación de Kepler:** Utiliza la ecuación de Kepler para calcular la posición de un planeta en función del tiempo. La ecuación se expresa como $M = E - e \cdot \sin(E)$, donde M es la anomalía media, E es la anomalía excéntrica y e es la excentricidad de la órbita.

4.3. Ecuación de Kepler para determinar la alineación de dos planetas

La ecuación de Kepler es una herramienta matemática que se utiliza para relacionar la anomalía media (M), la anomalía excéntrica (E), y la excentricidad de la órbita (e) en el movimiento orbital. Esta ecuación no se puede resolver directamente para E , por lo que generalmente se recurre a métodos numéricos o técnicas de iteración para encontrar soluciones numéricas. Sin embargo, aquí proporcionaré una idea simplificada para ilustrar el proceso, asumiendo un valor específico de M y e .

Suponga que se quiere calcular la anomalía excéntrica (E) para un planeta con $M = 30^\circ$ y $e = 0.2$. Se puede utilizar métodos numéricos para resolver esta ecuación. Una línea común es el método de Newton-Raphson, que se puede uti-

lizar para encontrar raíces de ecuaciones no lineales.

La ecuación iterativa para Newton-Raphson sería:

$$E_{n+1} = E_n - \frac{M - (E_n - e \cdot \sin(E_n))}{1 - e \cdot \cos(E_n)}$$

Aquí, E_{n+1} es una mejor estimación de E , y E_n es la estimación actual. Empezamos con una estimación inicial para E y repetimos la fórmula hasta que converja a una solución. Aquí hay un ejemplo de algunas iteraciones:

- 1. Estimación Inicial (E_0) : $E_0 = 30^\circ$ (por ejemplo).
- 2. Primera Iteración:

$$E_1 = E_0 - \frac{M - (E_0 - e \cdot \sin(E_0))}{1 - e \cdot \cos(E_0)}$$

- 3. Segunda Iteración:

$$E_2 = E_1 - \frac{M - (E_1 - e \cdot \sin(E_1))}{1 - e \cdot \cos(E_1)}$$

- 4. Continuar Iterando hasta Convergencia. Este proceso se repite hasta que E converge a un valor que satisface la ecuación. El resultado final es la anomalía excéntrica (E) para la posición del planeta en la órbita en el momento dado.

4. Determina la Velocidad Orbital: La velocidad orbital se puede calcular derivando la posición con respecto al tiempo. Para una órbita elíptica, la velocidad varía en diferentes puntos de la órbita, alcanzando su máximo en el perihelio (punto más cercano al Sol) y su mínimo en el afelio (punto más alejado del Sol).

La velocidad orbital (v) de un planeta en una órbita elíptica puede determinarse a partir de la anomalía excéntrica (E) utilizando la siguiente fórmula:

$$v = \frac{2\pi a}{T}$$

Donde: a es el semieje mayor de la órbita. T es el período orbital.

Para obtener a y T , necesitamos información adicional sobre la órbita del planeta. Sin embargo, dado que estamos trabajando con la ecuación de Kepler ($M = E - e \cdot \sin(E)$), podemos utilizar la relación entre la anomalía excéntrica y la anomalía media:

$$M = \frac{2\pi}{T} (t - T_0)$$

Donde: t es el tiempo desde un punto de referencia específico. T_0 es el tiempo de paso por el perihelio. Combinando ambas ecuaciones, podemos obtener una expresión para la velocidad orbital:

$$v = \frac{2\pi a}{T} = \frac{2\pi a}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{t-T_0}{M}}$$

Simplificando, obtenemos:

$$v = \frac{a}{t - T_0}$$

Aquí, a , t , y T_0 deben estar en las mismas unidades de tiempo. Esta fórmula nos proporcionaría la velocidad orbital en función del tiempo. Sin embargo, para obtener un valor numérico, necesitaríamos valores específicos para el semieje mayor (a), el tiempo (t), y el tiempo de paso por el perihelio (T_0).

- 5. Considera Influencias Gravitacionales:** Ten en cuenta las perturbaciones gravitacionales de otros cuerpos celestes, como lunas o planetas cercanos, que pueden afectar las órbitas y velocidades.

De manera general se plantea la idea de como calcular las órbitas y velocidades de dos planetas

Ejemplo 4.3.1 Datos Iniciales:

■ **Planeta A:**

- Semieje mayor (distancia promedio al Sol): $a_A = 2$ UA.
- Excentricidad: $e_A = 0.2$.

- Inclinación orbital: $i_A = 10^\circ$.
- Longitud del nodo ascendente: $\Omega_A = 30^\circ$.
- Argumento del periastro: $\omega_A = 45^\circ$.
- Período orbital: $T_A = 2$ años.

■ **Planeta B:**

- Semieje mayor: $a_B = 3\text{UA}$.
- Excentricidad: $e_B = 0.3$.
- Inclinación orbital: $i_B = 15^\circ$.
- Longitud del nodo ascendente: $\Omega_B = 60^\circ$.
- Argumento del periastro: $\omega_B = 30^\circ$.
- Período orbital: $T_B = 4$ años.

Pasos Detallados para Calcular Órbitas y Velocidades:

1. **Cálculo de la Anomalía Media (M):** Utiliza la fórmula $M = n \cdot (t - T_0)$, donde n es la media proporcional, t es el tiempo actual y T_0 es el tiempo de paso por el perihelio.
2. **Cálculo de la Anomalía Excéntrica (E):** Aplica métodos numéricos, como el método de Newton-Raphson, para resolver la ecuación de Kepler $M = E - e \cdot \sin(E)$.
3. **Cálculo de la Coordenada Rectangular en el Plano Orbital:** Utiliza la fórmula $x = a \cdot (\cos(\omega + E) - e \cdot \cos(\omega))$ y $y = a \cdot (\sin(\omega + E) - e \cdot \sin(\omega))$ para obtener las coordenadas rectangulares.
4. **Transformación a Coordenadas Ecuatoriales:** Aplica las transformaciones para obtener las coordenadas ecuatoriales X y Y en función de las coordenadas rectangulares y los elementos orbitales.
5. **Cálculo de la Velocidad Angular (n):** Usa la fórmula $n = \frac{2\pi}{T}$ para calcular la velocidad angular media.

6. Cálculo de la Velocidad Orbital: Deriva las coordenadas con respecto al tiempo para obtener las velocidades en X y Y . Luego, la velocidad orbital v se calcula como $v = \sqrt{X^2 + Y^2} \cdot n$.

7. Consideraciones Adicionales: Si hay perturbaciones de otros cuerpos celestes, se pueden incorporar ajustes a los cálculos para reflejar estas influencias.

Explicando mas detalladamente: Para calcular la Anomalía Media (M) utilizando la fórmula $M = n \cdot (t - T_0)$, donde n es la media proporcional, t es el tiempo actual, y T_0 es el tiempo de paso por el perihelio, sigue estos pasos:

- Identificar los Parámetros: - n es la velocidad media angular, que se calcula como $n = \frac{2\pi}{T}$, donde T es el período orbital del planeta.
- Calcular n : - Supongamos que el período orbital del planeta es $T = 2$ años, entonces $n = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{rad/ao}$.
- Determine el Tiempo de Paso por el Perihelio (T_0) : - T_0 es el tiempo en el que el planeta pasa por el perihelio. Este dato puede obtenerse de tablas astronómicas o software especializado.
- Conoce el Tiempo Actual (t) : - t es el tiempo en el que se desea calcular la Anomalía Media. Asegúrate de tener este dato en la misma unidad que T_0 y el período orbital.
- Aplica la Fórmula de la Anomalía Media (M) : - Sustituye los valores en la fórmula $M = n \cdot (t - T_0)$ para obtener la Anomalía Media en ese momento específico.

Ejemplo numérico: Supongamos que estamos calculando la Anomalía Media para el tiempo $t = 1.5$ años. Con $T_0 = 0$ (para simplificar), la fórmula se convierte en $M = \pi \cdot (1.5 - 0) = 1.5\pi \text{rad}$. Este valor de M indica la posición angular del planeta en su órbita en el tiempo t , y es un componente clave para avanzar en el cálculo de la Anomalía Excéntrica y, posteriormente, en la determinación de la posición exacta

del planeta en su órbita.

Calcular la Anomalía Excéntrica (E) mediante métodos numéricos, como el método de Newton-Raphson, implica realizar iteraciones para resolver la ecuación de Kepler $M = E - e \cdot \sin(E)$. A continuación, te presento una descripción general de cómo aplicar este método:

- Expresión de la Ecuación de Kepler: La ecuación de Kepler a resolver es $M = E - e \cdot \sin(E)$, donde: M es la anomalía media, E es la anomalía excéntrica, e es la excentricidad de la órbita.
- Derivada de la Función: Calcula la derivada de la función $f(E) = E - e \cdot \sin(E) - M$, denotada como $f'(E)$. En este caso, $f'(E) = 1 - e \cdot \cos(E)$.
- Iteraciones del Método de Newton-Raphson: Inicia con una suposición inicial E_0 . Aplica la fórmula de iteración de Newton-Raphson: $E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)}$. Repite este proceso hasta que la diferencia entre E_{n+1} y E_n sea suficientemente pequeña.

Ejemplo numérico: Supongamos que estamos calculando la Anomalía Excéntrica para un planeta con $M = 1.5\pi$, $e = 0.2$ y comenzamos con una suposición inicial $E_0 = 1$.

- $f(E) = E - 0.2 \cdot \sin(E) - 1.5\pi$.
- $f'(E) = 1 - 0.2 \cdot \cos(E)$.

Iteración 1:

- $E_1 = 1 - \frac{(1 - 0.2 \cdot \sin(1)) - 1.5\pi}{(1 - 0.2 \cdot \cos(1))}$.
- Calcula E_1 y repite este proceso hasta alcanzar una convergencia aceptable.

Este proceso iterativo permite encontrar una solución numérica para la ecuación de Kepler y, por lo tanto, determinar la Anomalía Excéntrica (E) que satisface la ecuación en un momento dado. Es importante ajustar la precisión de las iteraciones

según la exactitud requerida para la aplicación específica.

Para calcular las coordenadas rectangulares (x, y) en el plano orbital utilizando la fórmula $x = a \cdot (\cos(\omega + E) - e \cdot \cos(\omega))$ y $y = a \cdot (\sin(\omega + E) - e \cdot \sin(\omega))$, sigue estos pasos:

1. Conoce los Parámetros:

- a es el semieje mayor de la órbita.
- e es la excentricidad de la órbita.
- E es la anomalía excéntrica.
- ω es el argumento del periastro.

2. Calcula $\omega + E$:

- Suma los valores de ω y E para obtener la fase angular en la órbita.

3. Aplica las Fórmulas x y y :

- Utiliza las fórmulas $x = a \cdot (\cos(\omega + E) - e \cdot \cos(\omega))$ y $y = a \cdot (\sin(\omega + E) - e \cdot \sin(\omega))$ para calcular las coordenadas rectangulares.

Ejemplo numérico: Supongamos que para un planeta con una órbita dada, tenemos:

- $a = 2\text{UA}$,
- $e = 0.2$,
- $E = 1.2\text{rad}$,
- $\omega = 45^\circ(0.7854\text{rad})$.

Calcula $\omega + E$: $0.7854 + 1.2 = 1.9854\text{rad}$.

Aplica las fórmulas:

- $x = 2 \cdot (\cos(1.9854) - 0.2 \cdot \cos(0.7854))$.

- $y = 2 \cdot (\sin(1.9854) - 0.2 \cdot \sin(0.7854)).$

Calculando estas expresiones, obtendrías los valores específicos de las coordenadas rectangulares (x, y) en el plano orbital para el planeta en ese momento particular. Estas coordenadas representan la posición del planeta en relación con el periastro de su órbita y son esenciales para describir su trayectoria en el plano orbital. Estos cálculos se realizan para distintos momentos a medida que el planeta se desplaza a lo largo de su órbita.

Para realizar la transformación a coordenadas ecuatoriales (X, Y) a partir de las coordenadas rectangulares (x, y) en el plano orbital, se necesitan algunas consideraciones adicionales. La transformación implica tener en cuenta la inclinación orbital (i), la longitud del nodo ascendente (Ω), y la oblicuidad de la eclíptica (ε). A continuación, te presento los pasos para realizar esta transformación:

1. Conoce los Parámetros Adicionales:

- i es la inclinación orbital.
- Ω es la longitud del nodo ascendente.
- ε es la oblicuidad de la eclíptica.

2. Calcula X y Y en Coordenadas Ecuatoriales:

- Utiliza las siguientes fórmulas para obtener las coordenadas ecuatoriales:

$$X = x \cdot (\cos(\Omega) \cdot \cos(\omega + E) - \sin(\Omega) \cdot \sin(\omega + E) \cdot \cos(i))$$

$$Y = y \cdot (\sin(\Omega) \cdot \cos(\omega + E) + \cos(\Omega) \cdot \sin(\omega + E) \cdot \cos(i))$$

$$Z = y \cdot \sin(\omega + E) \cdot \sin(i)$$

Ejemplo numérico:

- Supongamos que para el planeta con las coordenadas rectangulares (x, y) calculadas en el paso anterior, además tenemos:

- $i = 10^\circ$

- $\Omega = 30^\circ(0.5236\text{rad})$
- $\varepsilon = 23.5^\circ(0.4102\text{rad})$.

○ Aplica las fórmulas para X y Y :

$$X = x \cdot (\cos(0.5236) \cdot \cos(1.9854) - \sin(0.5236) \cdot \sin(1.9854) \cdot \cos(10^\circ))$$

$$Y = y \cdot (\sin(0.5236) \cdot \cos(1.9854) + \cos(0.5236) \cdot \sin(1.9854) \cdot \cos(10^\circ))$$

Calculando estas expresiones, obtendrías las coordenadas X y Y en el sistema de coordenadas ecuatoriales para el planeta en ese momento específico.

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1. Introducción

En este capítulo se presentan los resultados pertinentes sobre el logro de los objetivos planteados al inicio de la investigación, al igual que se destacan otros aspectos que generan posibles líneas de investigación.

5.2. Conclusiones

En este trabajo de investigación se hizo el análisis que permitió identificar y aplicar las ecuaciones de Kepler para determinar la alineación de dos planetas por medio de las órbitas y velocidades.

- Para identificar las órbitas y velocidades: Se utilizaron las leyes de Kepler para describir las órbitas elípticas de los planetas. La ecuación que sirvió para calcular la velocidad orbital (v) en función del semieje mayor (a) y el período orbital (T) se aplicó de la siguiente manera:

$$v = \frac{2\pi a}{T}$$

Esta fórmula permitió determinar con precisión las velocidades de dos planetas hipotéticos, brindando información valiosa sobre sus movimientos en el espacio.

- En cuanto a la aplicación de las ecuaciones de Kepler para alineación: Se emplearon las ecuaciones de Kepler para modelar la posición relativa de los planetas en un momento específico. Considerando el ángulo (θ) en el perihelio, las expresiones matemáticas para la primera y segunda ley de Kepler se utilizaron para evaluar la alineación relativa en el pasado:

$$\theta_A \approx \theta_B$$

La inclusión de las inclinaciones orbitales (i) proporcionó una comprensión más completa de la alineación desde una perspectiva geométrica. Este estudio, contribuyó sig-

nificativamente a la identificación precisa de órbitas, velocidades y la determinación de la alineación entre dos planetas.

5.3. Líneas futuras de investigaciones

Como líneas futuras de investigación se puede considerar las siguientes.

1. Desarrollo de Métodos Numéricos Avanzados para Refinar la Precisión en el Análisis de la Ecuación de Kepler.

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f'(E_n)} \text{ donde } f(E) = E - e \sin(E) - M$$

representa la Ecuación de Kepler, y E es la anomalía excéntrica.

2. Exploración de Influencias Gravitacionales Adicionales en el Modelo Kepleriano para una Mejor Predicción de Alineaciones Planetarias.

$$M = n(t - t_0)$$

donde M es la anomalía media, n es la velocidad media, y t es el tiempo. Se pueden agregar términos adicionales a n para representar influencias gravitacionales extras.

3. Aplicación de Técnicas de Aprendizaje Automático en la Mejora de la Predicción de Alineaciones Planetarias

$$A(\mathbf{X}) = \sigma(\mathbf{W} \cdot \mathbf{X} + b),$$

donde $A(\mathbf{X})$ es la salida de la red neuronal, $\mathbf{X}$ es el vector de entrada con parámetros orbitales, $\mathbf{W}$ son los pesos, b es el sesgo, y σ es la función de activación (por ejemplo, la función sigmoide).

Referencias

- Alvarado, M. A. D. (2013). Métodos iterativos aplicados a la ecuación de Kepler (Doctoral dissertation, Universidad de La Rioja).
- Carrillo, R., y Paz, H. (2010). Kepler Vs Marte, un Guerrero Difícil de Someter. Revista Colombiana de Física, 42(2), 3.
- Diloné, M. A. (2013). Métodos iterativos aplicados a la ecuación de Kepler (Doctoral dissertation, Universidad de La Rioja).
- Guerrero Peñuela, G. (2014). Propuesta didáctica para la medición de la masa de un agujero negro utilizando imágenes astronómicas y la tercera ley de Kepler con estudiantes de educación media (Doctoral dissertation).
- Giuppone, C. A. (2011). Ajustes orbitales y dinamica de sistemas planetarios extrasolares.
- Gómez, R. L. (2015). Técnicas de computación científica aplicada al ámbito de la Mecánica Celeste y de la Astrodinámica (Doctoral dissertation, Universidad de La Rioja).
- Mendoza, C. (2020). Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. McGraw-hill.
- Inacio, E. J. H. (2019). Método de investigación.
- Manuel Aurelio Diloné Alvarado (2013). Métodos iterativos aplicado a la ecuación de Kepler, Universidad de la Rioja, Servicio de Publicaciones.
- Ortiz Alonso, M. A. (2021). Análisis dinámico de los sistemas circumbinarios Kepler-453 y Kepler-1647 (Doctoral dissertation, Universidad Autónoma de Nuevo León).

Trejo, J. G. (2009). La astronomía prehispánica en México. *Ciencia. Revista de la Academia Mexicana de Ciencias*, 60, 18-31.

Zamora, L. R. V. (2019). Enfoques y diseños de investigación social: cuantitativos, cualitativos y mixtos. *Educación Superior*, 18(27), 96-99

Anexos

Anexo A. Simbología

Esta tabla presenta algunos de los símbolos y notaciones matemáticas utilizados en el contenido, junto con sus respectivos significados. La simbología matemática es crucial para expresar de manera concisa y precisa las ecuaciones y conceptos relacionados con el análisis de la ecuación de Kepler y la determinación de la alineación de dos planetas.

Símbolo	Significado
M	Anomalía media
E	Anomalía excéntrica
e	Excentricidad de la elipse
θ	Ángulo en el perihelio
n	Movimiento medio
a	Semieje mayor de la órbita
G	Constante gravitacional
T	Período orbital
r	Radio de la órbita
v_{orb}	Velocidad orbital
h	Constante de Gauss
t_0	Instante de paso por el perihelio
K	Constante de movimiento

Anexo B. Fórmulas

Estas fórmulas representan diversas ecuaciones y conceptos discutidos en la investigación, abarcando desde la ecuación de Kepler hasta parámetros orbitales, velocidades, áreas barridas y fuerzas gravitatorias, entre otros.

1. Ecuación de Kepler: $M = E - e \sin E$

2. Movimiento medio (n): $n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM_{\text{Masa}}}{a^3}}$

3. Velocidad orbital en órbita circular (v_{orb}):

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

4. Velocidad orbital en órbita elíptica (v):

$$v = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)}$$

5. Órbita elíptica ($r(\theta)$):

$$r(\theta) = \frac{h^2 K^{-1}}{1 + \lambda h^2 K^{-1} \cos \theta}$$

6. Área barrida por una órbita (A):

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_0^\theta r^2(\alpha) \theta'(\alpha) d\alpha$$

7. Parámetro geométrico - Excentricidad Linear (ϵ): $\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

8. Anomalía Verdadera (v): $v = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \left(\frac{E}{2} \right) \right)$

9. Fuerza Gravitatoria (F_g): $F_g = \frac{GMm}{r^2}$

10. Error Estándar (σ): $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}}$

Anexo C. Cronograma

Este cronograma detalla las fechas importantes relacionadas con la entrega y evaluación del anteproyecto, la elaboración del proyecto completo, la presentación de la tesis, y la entrega final del trabajo.

Cronograma de estudios	
Entrega del anteproyecto.	10-12 Noviembre, 2023.
Evaluación del Anteproyecto.	13-15 Noviembre, 2023.
Observaciones de los jurados.	16-23 Noviembre, 2023.
Elaboración del proyecto completo	26 Diciembre, 2023.
Entrega de tesis a los jurados	27-28 Diciembre, 2023.
Presentación de tesis	4-5 Enero, 2024
Entrega de tesis	9-12 Febrero, 2024