República Dominicana

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Magister en Matemática

TÍTULO

Análisis Fractal mediante los métodos de Halley y Whittaker

SUSTENTANTE

Yadiri Mosquea Santos

ASESOR

José Miguel Gómez Guzmán, MA

Cotuí, Prov. Sánchez Ramírez, Rep. Dom.

Año Académico 2023.

TÍTULO

ANÁLISIS FRACTAL MEDIANTE LOS MÉTODOS DE HALLEY Y WHITTAKER

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en el presente trabajo de investigación , es responsabilidad exclusiva de la sustentante del mismo. Las citas y consultas bibliográfica se han realizado respetando el derecho de autor, por lo que, se libera a la UTECO de cualquier responsabilidad, aunque se observa que para la reproducción total o parcial del mismo se requiere de su autorización.

Análisis Fractal Mediante los Métodos de Halley y Whittaker

Composición del tribunal evaluador

Leomar Antonio Reyes Abreu

Metodología

WilFran Rosario Reyes

Contenido

María Eufemia Fernández Acosta

Redacción

Índice general

Declaración de Autoría III
AGRADECIMIENTOS VII
DEDICATORIA VIII
Resumen IX

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN 1
1.1 INTRODUCCIÓN 1
1.2 Antecedentes. 1
1.2.1 Antecedentes históricos. 1
1.2.2 Antecedentes históricos del método de Halley 2
1.2.3 Desarrollo Histórico del Método de Whittaker 5
1.2.4 Antecedentes académicos de la teoría de fractales aplicando métodos iterativos 6
1.3 Planteamiento del problema 7
1.4 Justificación 9
1.5 Objetivos 9
1.5.1 Objetivo general 9
1.5.2 Objetivos específicos 9
1.6 Alcances y límites 10

CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL 11
2.1 Introducción 11
2.2 Marco teórico 11
2.2.1 Caos y Sistemas caóticos 11
2.2.2 Clasificación de los puntos fijos 11
2.2.3 Conjunto de Julia 12
2.2.4 Convergencia de una sucesión 12
2.2.5 Cuenca de atracción 12
2.2.6 Fractal 13
2.2.7 Conjunto de mandelbrot 13

2.2.8 Convergencia de una sucesión 13
2.2.9 Fractales lineales 13
2.2.10 Fractales no lineales 13
2.2.11 Funciones holomorfas 14
2.2.12 Geometría Dinámica 14
2.2.13 Grado de $\Re(z)$ 14
2.2.14 Iterando n-ésimo 14
2.2.15 Mathematica 14
2.2.16 Órbita de z 15
2.2.17 Órbita de un punto periódico 15
2.2.18 Orden de convergencia 15
2.2.19 Punto fijo 15
2.2.20 Punto periódico 15
2.3 Descripción del método de Halley 16
2.4 Descripción del método de Whittaker 24

CAPÍTULO III: DISEÑO METODOLÓGICO 26
3.1 Introducción 26
3.2 Marco metodológico 26
3.2.1 Diseño de la investigación 26
3.2.2 Tipo de investigación 26
3.2.3 Método de la investigación 26
3.2.4 Enfoque de la investigación 27
3.3 Procedimientos 27

CAPÍTULO IV: PRESENTACIÓN DE RESULTADOS 28
4.1 Introducción 28
4.1.1 Planos dinámicos y de convergencia 28

CAPÍTULO V: CONCLUSIONES 35
5.1 Introducción. 35

5.2 Conclusiones 35
5.2.1 Futuras Líneas de Investigación 36

Bibliografía 37

Anexo 40
Programación de los Métodos de Newton y Halley en el Software Mathematica
Para la Generación de Fractales 41
Algunos conjuntos fractales 47
Ejemplo del código para determinar la raíces por los métodos 48

Agradecimientos

A Dios: Porque sin él nada es posible, por ser mi guía, mi sustento, y darme la fuerza para poder culminar con éxito esta maestría, gracias mi Dios porque sin tí no podría llegar.

A mi asesor: **José Miguel Gómez Guzmán:** Un gran hombre y ser humano, que con su ayuda y dedicación, pude brindar lo mejor de mí en este trabajo final, por siempre darme las mejores orientaciones y apoyarme siempre durante todo el proceso de esta investigación.

A la **Universidad Tecnológica del Cibao Oriental (UTECO):** Por permitirme lograr un paso mas hacia el éxito y convertirme en una profesional preparada, llena de nuevos conocimientos y expectativas. También agradecer de una manera muy especial a todos mis maestros que de una manera u otra me brindaron una formación de calidad.

A mis coordinadores: **Efraín Martínez y Arismendi Batista:** Personas humildes y trabajadoras, que siempre estuvieron en todo el proceso de la maestría, dándome el gran apoyo para que yo hoy pueda terminar con éxito.

Al **Ministerio de Educación Superior, Ciencia y Tecnología (MESCYT):** Por confiar en mí siempre, sin su ayuda yo no hubiera podido realizar esta maestría. Muchas gracias.

A mis compañeros, por todos los buenos momentos que viví con ellos, y por brindarme su amistad siempre.

Dedicatoria

A Dios: Por ser mi guía, mi impulso en cada momento difícil, por darme la fuerza necesaria para seguir adelante y nunca rendirme. Gracias mi Dios por ayudarme a culminar con éxito esta maestría.

A mi esposo: Kelvin Manuel De La Cruz, quien formó parte de mi sacrificio, quien estuvo a mi lado en cada momento brindándome apoyo incondicional desde el principio, quien me ha dado fuerzas para que yo no me rindiera y por motivarme siempre para que yo pudiera lograr mis metas. Gracias por brindarme tu confianza, y sobre todo tu amor. Te Amo

A mis padres: Juan Esperanza Mosquea y Magdalena Santos. Por siempre apoyarme en todo, por su motivación que me ha permitido seguir adelante, por estar conmigo en todo momento y sobre todo por ayudarme con mi hijo siempre que era necesario.

A mi hijo: Keyden Yadiel De La Cruz Mosquea: Que a pesar de estar muy chiquito, ha superado quedarse con otras personas para que yo pudiera continuar con mis estudios, gracias mi amor, porque a pesar de los días que no pude estar contigo, siempre me brindaste tu amor de hijo. Te amo.

A mis hermanos: Quienes me apoyaron en cada etapa que he pasado, por apoyarme con mi hijo y darle todo el amor, para que yo siguiera adelante. Gracias, los quiero.

A mi Suegra: Por siempre brindarme su apoyo incondicional, por darme motivación y fuerza para que yo tuviera éxito. Gracias.

A todos mis compañeros: Por ser los mejores, unidos y divertidos, por formar parte de este camino, gracias a cada uno de ustedes por brindarme apoyo y ayuda.

Agradezco a mi familia y a todas las personas que, de manera especial, me han motivado y apoyado en mi camino hacia el éxito. ¡Muchas gracias!

República Dominicana

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL

UTECO

Facultad De Postgrado y Educación Continuada



Maestría en matemáticas

Título: Convergencia Semilocal del Método de Chun Aplicado a la Ecuación de Kepler

Sustentante: Yadiri Mosquea Santos

Dirigido por: José Miguel Gómez Guzmán

Resumen

La presente investigación, posee como objetivos fundamentales, generar fractales, mediante las aplicaciones de los métodos de Halley y Whittaker, utilizando polinomios cuadráticos y cúbicos, y caracterizar los fractales obtenidos mediante un análisis gráfico.

En consecuencia, se organizará en cinco secciones, en las que se abordan aspectos como: los antecedentes relacionados con la línea de investigación, la presentación del problema, su justificación y los límites establecidos. Además, se incluirá un marco de referencia que introduce los conceptos claves para el desarrollo del estudio. Posteriormente, se describirá la metodología utilizada, se presentarán los resultados obtenidos y, por último, se exponen las conclusiones que responden a los objetivos planteados.

Posee una metodología, enmarcada en el método deductivo, porque se parte de aspectos generales, para alcanzar conclusiones particulares, al mismo tiempo es de tipo analítica-exploratoria, y su enfoque pertenece al tipo cualitativo.

Se construyeron fractales usando los métodos iterativos de Halley y Whittaker en el software Mathematica 13.2, demostrando la viabilidad de generar estas complejas imágenes geométricas con estos métodos. Se analizaron los fractales resultantes, revelando que el método de Halley es más rápido pero genera fractales menos interesantes en comparación con el método de Whittaker. Se realizaron pruebas con diferentes polinomios para respaldar esta conclusión. Este estudio sugiere que los fractales pueden tener aplicaciones en el análisis de métodos numéricos y puede abrir nuevas oportunidades de investigación en diversas áreas científicas.

CAPÍTULO I
INTRODUCCIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentan un conjunto de investigaciones, que guardan estrecha relación con el tema de esta investigación, las cuales funcionarán como marco de investigación , para el desarrollo de este proyecto. Las investigaciones en cuestión, constituyen los antecedentes históricos y académicos, las cuales hacen referencia, a los métodos de Halley y Whitatker, así como la teoría de los Fractales.

Otros de los elementos que conforman este capítulo son, el planteamiento del problema, objetivos, justificación de la investigación y los alcances de la misma, elementos que ilustran, lo que se persigue conseguir con este proyecto.

1.2 Antecedentes.

1.2.1 Antecedentes históricos.

1.2.1.1 Antecedentes históricos de la teoria de fractales

Según Peitgen (1992), los orígenes de la teoría fractal se remontan al siglo XIX, con las ideas de Henri Poincaré, quien inició el estudio formal de los sistemas dinámicos. Posteriormente, diversos científicos matemáticos como: G. Cantor, W. Sierpinsky, H. Von Koch, G. Peano y D. Hilbert trabajaron con distintos aspectos de esta teoría. La teoría de los fractales no se desarrolló independiente de otras disciplinas, dicha teoría nace de secuencias matemáticas que datan a finales del siglo pasado. El problema de dimensión era crucial para la caracterización de conjuntos de puntos, curvas, superficies y volúmenes. A medida que se definía este importante concepto, se creaban por los mismos matemáticos, conjuntos de puntos o curvas que contradecían dichas definiciones. Estos matemáticos contribuyeron notablemente a elucidar el concepto de dimensión y el nacimiento de una nueva herramienta de investigación: la teoría de fractales, aunque ellos nunca lo supieron.

De acuerdo a Mandelbrot (1982), en su libro: La geometría fractal de la naturaleza. El desarrollo cronológico de los conceptos y técnicas que constituyen la teoría de fractales, ocurrió desde diferentes vertientes. El desarrollo histórico de dicha teoría no presenta una estructura estrictamente lineal ya que esta se ha nutrido de los matemáticos : N. Wiener, B. Mandelbrot, L. F. Richardson y de otras disciplinas muy diversas.

Perrín (1913), fue uno de los científicos que observaron y publicaron con respecto a objetos familiares de forma irregular o interrumpida, quien afirmó, que si bien las funciones derivables son las más simples, las más fáciles de manejar, constituyen a su vez la excepción, o bien si se prefiere un lenguaje geométrico, las curvas que no admiten tangente son la regla, y las curvas regulares, tales como el círculo, son casos interesantes, pero particulares y como ocurre la mayoría de las veces, aquellas personas que se les habla de curvas tangentes o funciones sin derivada piensan que la naturaleza no presenta tales complicaciones y que no nos sugiere esas ideas.

Rodriguez (1995), plantea que Mandelbrot es considerado como el padre de la geometría fractal. Sin embargo se piensa que varios de los fractales y su descripción vienen de las matemáticas clásicas, además varios matemáticos del siglo pasado inventaron algoritmos especiales para su creación, tales como: Cantor (1872), Peano (1890), Sierpinski (1916), solo por nombrar unos pocos. Es verdad que aquella matemática jugó un papel importante en los conceptos de Mandelbrot para la creación de la nueva geometría.

1.2.2 Antecedentes históricos del método de Halley

De acuerdo con Eggen(2023), Edmund Halley nace el 8 de noviembre según el calendario gregoriano y 29 de octubre según calendario juliano en el distrito de Haggerston, ciudad de Londres, muere el 14 de enero de 1742 en Greenwich, Inglaterra. Éste fue un astrónomo, matemático y físico inglés, quien realizó el cálculo de la órbita del cometa Halley. Fue amigo de Isaac Newton y miembro de la Royal Society.

En correspondencia con Scavo y Thoo(1995), Halley quedó impresionado por el

trabajo del ingenioso profesor de matemáticas Thomas Fautet de Lagny, quien publicó un libro en París en 1692, donde presentó fórmulas que servían para la extración de raíces de potencias puras, de manera especial, la raíz cúbica. El resultado que impresionó a Halley fue el de la raíz de $\sqrt[3]{a^3+b}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ el cual se encuentra entre

$$a + \frac{ab}{3a^3+b} \quad y \quad \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b}{3a}} \quad para \quad a^3 > b > 0 \tag{1.1}$$

Estas fómulas fueron nombradas por Halley como fórmulas racional e irracional, respectivamente. Cada caso es especial, sin embargo, Halley prefirió la fómula irracional antes que la racional debido al gran divisor que posee ésta última, lo que significa que dificultaría el trabajo del cálculo en algunas aplicaciones.

De acuerdo a Ezquerro(2001), Halley inició su demostración de la fórmula de Lagny tratando de conseguir un término corrector ε de forma que $(a+\varepsilon)^3 = a^3 + b$ lo cual lo lleva a $b = 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3$. obviando el término ε^3 quedando expresado como $b \approx 3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2$ de donde se pueden tener cálculos aproximados para ε como se muestra a continuación

$$\frac{b}{3a^2} \approx \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{a} \approx \varepsilon \tag{1.2}$$

$$\varepsilon \approx \frac{b}{3a^2 + 3a\varepsilon} \tag{1.3}$$

luego al reemplazar (1.2) en (1.3) se obtiene

$$\varepsilon \approx \frac{b}{3a^2 + 3a\dfrac{b}{3a^2}} = \frac{ab}{3a^3+b}$$

$\therefore$ la aproximación para la forma racional de Lagny estaría dada por:

$$\sqrt[3]{a^3+b} \approx \frac{ab}{3a^3+b} \tag{1.4}$$

Usando esta notación, definiendo $f(x) = x^3 - a^3 - b$ y tomando $x_0 = a$, entonces la expresión (1.4) corresponde a lo que sería el primer paso del Método de Halley expresado

de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.5}$$

de donde

$$L_f x_n = \frac{f(x_n) f''(x_n)}{f'(x_n)^2} \tag{1.6}$$

Según Scavo y Thoo(1995), Halley también admiraba el trabajo del matemático francés del siglo XVI, François Viéte, popularizador de lo que más tarde se conocería como el *método de Horner* una técnica de aproximación iniciada por varios matemáticos chinos en el siglo XII. El método de Viéte, como se le suele llamar, es un algoritmo lineal convergente similar al método de la Bisección y se le puede aplicar a cualquier polinomio que por lo menos tenga una solución real. También se puede usar para producir valores iniciales del método de Newton-Raphson y de otros métodos interativos de orden superior, algo que el mismo Halley podría haber hecho. Al parecer, el método de Viéte fue un importante precursor del método de Halley y de los métodos de búsqueda de raíces en general como el Newton-Raphson. Halley, al escribir su artículo en el año 1694, aparentemente no se percató de que su método hacía uso de las derivadas o fluxiones, como él lo habría llamado.

De acuerdo con Kollerstrom (1992), ésto no es sorprendente considerando que fue Simpson en 1740 quien conectara las derivadas con el método de Newton-Raphson; lo que es verdaderamente sorprendente es que Brook Taylor reconociera la derivada para el método de Halley en 1712, Feigenbaum (1985), es decir, notó lo que Halley no había logrado comprender: que los coeficientes en los ejemplos de Halley están directamente relacionados con las derivadas sucesivas del polinomio original.

A pesar del gran avance que tuvo Taylor, no pudo lograr una fórmula general para el método de Halley. Quien pudo obtener este gran alcance un siglo después fue Schrödinger, al derivar la función de iteración lo que conocemos hoy en día como el método de Halley. En su artículo Schröder E. (1870), hace mención a la fórmula del Halley de una manera muy pasajera debido a que estaba interesado en las funciones de interación orden superior,

por consiguiente Kobal(2002), en un artículo publicado en 1891 presentó la derivada de la fórmula de Halley pero por desgracia ésta quedó confusa . Luego, Frame(1944) tuvo éxito al derivar por primera vez la función de interación usando el polinomio de Taylor de segundo grado.

1.2.3 Desarrollo Histórico del Método de Whittaker

Según Westma(1982),"Edmund Taylor Whittaker"nació el 24 de octubre de 1873, el hijo mayor de John Whittaker y su esposa Selina, hija de Edmund Taylor, M.D. Obtuvo una beca de ingreso al Trinity College, Cambridge, en diciembre de 1891, y se colocó como segundo gobernador en los tripos matemáticos de 1895. Fue elegido miembro de Trinity en octubre de 1896, se incorporó al equipo y recibió el Primer Premio de Smith en 1897.

En 1906 Whittaker fue nombrado profesor de astronomía en la Universidad de Dublín, con el título de Astrónomo Real de Irlanda.En la primavera de 1912 fue elegido para la cátedra de matemáticas en la Universidad de Edimburgo. Un pequeño grupo de documentos deben su existencia al hecho de que Edimburgo es uno de los principales centros de seguros de vida. Whittaker formó amistades con muchos de los actuarios comprometidos en ella, quienes le contaron varios problemas matemáticos que habían surgido en su experiencia, principalmente relacionados con la interpolación, el ajuste de curvas y la probabilidad. Al interesarse en la teoría de la interpolación, intentó responder algunas de sus preguntas fundamentales. Si los valores de una función analítica $f(x)$ que corresponden a un conjunto de valores equidistantes de su argumento es decir

$$a, a+w, a-w, a+2w, , a-2w, a+3w \ldots$$

son conocidos, entonces podemos escribir una "tabla de diferencias"para la función. Se puede decir que todas las funciones analíticas que dan lugar a la misma tabla de diferencias son cotabulares; cualquier dos funciones cotabulares son iguales entre sí cuando el argumento tiene cualquiera de los valores, $a, a+w, a-w, \ldots$ pero en general no son iguales entre sí cuando el argumento tiene un valor no incluido en este conjunto."

En la teoría de la interpolación se introducen ciertas expansiones para representar

la función $f(x)$, para valores generales de x, en términos de las cantidades que ocurren en la tabla de diferencias: por ejemplo, la fórmula de Newton-Gauss

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{w}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-w)}{2!w^2}\Delta^2 f(a) + \dots$$

No hay ninguna razón a priori por la cual esta expresión represente $f(x)$ en preferencia a cualquier otra función del conjunto tabular con $f(x)$; y así surgen dos preguntas:

- ¿Cuál de las funciones del conjunto cotabular está representada por la expansión Newton-Gauss?
- Dada cualquier función $f(x)$ que pertenece al conjunto cotabular, ¿es posible construir a partir de $f(x)$ una expresión analítica simple para esa función del conjunto cotabular que se representa mediante la expansión de Newton-Gauss?

Estas preguntas fueron respondidas en un documento publicado en 1915. Se demostró que existe una función que pertenece al conjunto cotabular, y que, cuando se somete al análisis de Fourier, no tiene constituyentes periódicos de período inferior al doble del intervalo tabular w: y que esta función está definida de forma única por el conjunto. Él lo llamó la función cardinal del conjunto. Entonces la respuesta a la primera pregunta es que la función representada por la expansión Newton-Gauss es la función cardinal: la respuesta a la segunda pregunta es que la función cardinal está representada por la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(a+nw)\,\mathrm{sen}\left\{\frac{\pi}{w}(x-a-nw)\right\}}{\frac{\pi}{w}(x-a-nw)}$$

1.2.4 Antecedentes académicos de la teoría de fractales aplicando métodos iterativos

Rubiano (2007), publicó una investigación sobre el método de Newtom, matemática y fractales, donde aborda el problema concerniente a la iteración de una función de variable compleja.

Bermúdez (2009), realizó un estudio sobre los métodos iterativos de alto orden para ecuaciones no lineales, donde hace referencia al método de Chebyshev, analizando las

aproximaciones a las raices y la eficiencia de cada método iterativo.

Penkova (2011),estudió los métodos interactivos que permiten obtener las soluciones a ecuaciones no lineales, y consiguió una familia de variantes del método de Newton mediante cualquier cuadratura de Gauss. De igual modo resalta que estos métodos son multipasos y que el orden de convergencia puede variar desde el orden seis hasta el diecisiete.

García (2013), realizó una investigación sobre el método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de polinomios no lineales, donde se tratan todas las generalidades del método y sus características al resolver ecuaciones no lineales, lo que implicó el estudio de polinomios en el campo de los complejos, los cuales de acuerdo a su estudio, son capaces de generar fractales.

Maldonado (2016), hace referencia a métodos numéricos para resolver ecuaciones y problemas de optimización no lineales, donde destaca el uso del método de Chebyshev para la solución de problemas no lineales.

Rosario (2019), indica que en el ámbito de los números complejos, el método iterativo de Chebyshev exhibe un mayor grado de caos en comparación con otros métodos, como el método de Newton, ya que este último presenta menos incidencias de fractales.

Ventura(2022), Indica que el método de Newton es menos caótico que el método Chebyshev al momento de general los fractales.

1.3 Planteamiento del problema

Los fractales son objetos geométricos con propiedades interesantes, como la autosimilitud, que los hace repetirse a diferentes escalas. La naturaleza fractal se encuentra en muchas estructuras naturales y fenómenos, como las costas, los árboles y las nubes, lo que ha llevado al estudio y comprensión de estos objetos mediante ecuaciones no lineales.

Sin embargo, debido a su naturaleza abstracta, con dimensiones no necesariamente

enteras y su generación matemática basada en números complejos, representan un desafío significativo para su estudio.

En el ámbito de las matemáticas, una de las áreas más estudiadas se enfoca en determinar soluciones para ecuaciones no lineales del tipo $g(x) = 0$, las cuales son conocidas por ser fundamentales en diversas disciplinas científicas. La resolución de estas ecuaciones puede variar significativamente en dificultad, siendo algunas relativamente sencillas, mientras que otras implican un alto grado de complejidad.

Es esencial destacar que existen numerosas situaciones en diferentes campos científicos que dependen en gran medida de la capacidad de resolver este tipo de ecuaciones. Ante la necesidad de afrontar estos desafíos, muchos matemáticos han trabajado en el desarrollo de métodos iterativos que permiten aproximarse a soluciones para distintos tipos de ecuaciones no lineales y compleja. Estos métodos iterativos son una herramienta valiosa que ofrece la posibilidad de obtener soluciones cercanas y precisas, incluso en casos donde la resolución exacta no es factible. Un fascinante ejemplo que ilustra la importancia y el impacto de estas ecuaciones en la ciencia y otros campos es la teoría de fractales.

Uno de estos métodos es el método de Halley, un algoritmo ampliamente conocido utilizado para resolver ecuaciones en el campo de los números reales y complejos. Este método logra aproximaciones precisas de las raíces de manera más eficiente que otros métodos con un menor número de iteraciones. Otro método menos conocido es el método de Whittaker, que utiliza un algoritmo casi idéntico al anterior.

En base a lo mencionado anteriormente, cabe destacar que se ha demostrado que varios métodos iterativos son capaces de generar fractales cuando las soluciones de las ecuaciones en cuestión pertenecen al campo de los números complejos. Es por esta razón que surgen las siguientes interrogantes:

- ¿ Se podrán generar fractales, mediante la aplicación del método de Halley y Whittaker ,utilizando polinomios cuadráticos y cúbicos?
- ¿ Cuáles caracterizaciones a partir de las zonas de convergencia se podrían realizar utilizando los fractales generados?

- ¿ Cuáles de estos dos métodos mencionado sería el mejor generador de fractales?

1.4 Justificación

Esta investigación se enfoca en la generación de fractales utilizando los métodos de Halley y Whittaker, con el objetivo de proporcionar un documento que contribuya al campo actual de las matemáticas y la geometría. A través de estos métodos, se busca resaltar la belleza de los enfoques numéricos mediante la creación de fractales.

La razón principal de llevar a cabo este trabajo de tesis en el campo de los fractales se debe a la amplia relevancia de las matemáticas en el mundo globalizado, que se relaciona con todas las áreas del conocimiento y abarca todos los aspectos de la vida. Por lo tanto, este estudio se lleva a cabo con el propósito de profundizar y ampliar el conocimiento sobre los fractales, con el fin de cumplir con estos objetivos.

Es sabido que los fractales forman parte integral de la convivencia de la humanidad y de la propia naturaleza, y se encuentran representados en diversas formas como figuras, árboles, nubes, agricultura, medicina, entre otros. Por lo tanto, debido a su gran importancia, surge el interés en comprender más sobre ellos.

Es por estas y otras razones que se emplean las herramientas matemáticas con métodos iterativos, para obtener un mayor y mejor dominio en este campo crucial del conocimiento.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo general

Analizar los fractales generado con los Métodos de Halley y Whittaker

1.5.2 Objetivos específicos

- Caracterizar los fractales obtenidos mediante un análisis gráfico.

- Utilizar los polinomios de orden superior para generar fractales, mediante la aplicación de los métodos de Halley y Whittaker.
- Comparar los fractales generados por cada método Halley y Whittaker.

1.6 Alcances y límites

En esta investigación, se examinan los fractales que se generan mediante el uso de los métodos de Halley y Whittaker, centrándose específicamente en polinomios de grado 2 hasta 5 cuyas raíces pertenecen al campo de los números complejos. El estudio se enfoca en analizar las diferentes características de estos fractales, prestando especial atención a las regiones de convergencia.

CAPÍTULO II
MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción

En este apartado se exponen una serie de conceptos fundamentales necesarios para la demostración y el avance del objetivo general de la investigación. Estos conceptos se han tomado de la tesis doctoral de García (2013) titulada "El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales". Cabe destacar que aquellos conceptos que no se obtuvieron de dicha fuente han sido debidamente citados.

2.2 Marco teórico

2.2.1 Caos y Sistemas caóticos

El caos y los sistemas caóticos no implican necesariamente desorden en el sentido literal y popular de la palabra; los sistemas no lineales son sistemas irregulares, altamente imprescindibles, que se manifiestan en muchos ámbitos de la vida y la naturaleza, pero que no se puede decir que tengan comportamientos sin ley, dado que existen reglas que determinan su comportamiento aunque estas sean difíciles de conocer en muchas ocasiones (Almendro, 2003).

2.2.2 Clasificación de los puntos fijos

Sea $z^* \in \mathbb{C}$ un punto fijo de una función racional R. Se dice que z^* es

- Superatractor si $R'(z^*) = 0$.
- Atractor si $|R'(z^*)| < 1$.
- Indiferente si $|R'(z^*)| = 1$.
- Repulsor si $|R'(z^*)| > 1$ (García, 2013).

2.2.3 Conjunto de Julia

El conjunto de Julia de una función holomorfa f está constituido por aquellos puntos que bajo la iteración de f tienen un comportamiento caótico. EL conjunto se denota $J(f)$ (García, 2013).

2.2.4 Convergencia de una sucesión

Una sucesión x_n es convergente cuando existe y es finito $\lim_{n\to\infty} x_n$. Si dicho límite es infinito, la sucesión es divergente, y si no existe, la sucesión es oscilante (Martínez, 2016).

2.2.5 Cuenca de atracción

Sea ς un punto fijo atractor de $R(z)$. La cuenca de atracción de ς es el conjunto:

$$B(\varsigma) = \{z \ \in \overline{\mathbb{C}} : R^n(z) \to \varsigma\}$$

cuando $n \to \infty$. La cuenca de atracción de un punto fijo atractor ς de $R(z)$, denotado por $B^*(\varsigma)$, es la componente conexa de $B(\varsigma)$ que contiene a ς. Si z_0 es un punto periódico atractor de período n de $R(z)$, la cuenca de atracción de la órbita, $orb(z)$ es el conjunto

$$B(\ orb(z_0)) = \bigcup_{j=0}^{n-1} R^j(B(z_0))$$

Donde $B(z_0)$ es la cuenca de atracción de z_0 que es el punto fijo de R^n, y su cuenca inmediata de atracción es el conjunto.

$$B(\ orb(z)) = \bigcup_{j=0}^{n-1} R^j(B^*(z)), \ \text{(García, 2013).}$$

2.2.6 Fractal

Un fractal es un conjunto matemático que puede gozar de auto similitud a cualquier escala, su dimensión no es entera o si lo es, no es un entero normal. El hecho de que goce de auto similitud significa que el objeto fractal no depende del observador para ser en sí(Mandelbrot, 1982).

2.2.7 Conjunto de mandelbrot

Es una sucesión numérica contenida entre el intervalo $(0, 2)$, la cual es obtenida tras evaluar la función $f_z = z^2 + c.$ con z y c complejos (Mandelbrot, 1970).

2.2.8 Convergencia de una sucesión

Una sucesión x_n es convergente cuando existe y es finito $\lim_{n\to\infty} x_n$. Si dicho límite es infinito, la sucesión es divergente, y si no existe, la sucesión es oscilante (Martínez, 2016).

2.2.9 Fractales lineales

Es aquel que se origina a través de la iteración infinita de un proceso geométrico bien especificado. Este proceso geométrico elemental, que es generalmente de naturaleza muy simple, determina perfectamente la estructura final, que muy frecuentemente, debido a la repetición infinita que se ha efectuado, tiene una complicación aparente extraordinaria. Normalmente los fractales son autosemejantes, es decir, tienen la propiedad de que una pequeña sección de un fractal puede ser vista como una réplica a menor escala de todo el fractal. (ver Anexo 1, Anexo 2 y Anexo 3) (Váldez, 2016).

2.2.10 Fractales no lineales

Son aquellos que están formados por los números complejos, debido a esto se les designa el término de caóticos. Estos fractales son generados por computadoras y creados por el hombre, como lo son el Conjunto de Mandelbrot y el Conjunto de Julia, entre otros (ver Anexo 4 y Anexo 5)(Váldez, 2016).

2.2.11 Funciones holomorfas

Son funciones que se definen sobre un subconjunto abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$, que además son complejo-diferenciales en cada punto (García, 2013).

2.2.12 Geometría Dinámica

La expresión geometría dinámica se refiere a construcciones de objetos matemáticos empleando herramientas digitales que permiten el arrastre y la deformación, conservando invariantes ciertas propiedades geométricas que se les ha asignado en el proceso de construcción, (Costa & Sombra, 2019).

2.2.13 Grado de $\Re(z)$

Sea $R : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ una función racional sobre la esfera de Rieman ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$), es decir, $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios complejos sin factores comunes (García, 2013).

2.2.14 Iterando n-ésimo

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función y $z \in \mathbb{C}$, la raíz de dicha función. Se define el iterando n-ésimo f^n de f mediante $f^0 = Id$, donde Id es la función identidad en $\mathbb{C}$, y $f^{n+1} = fof^n$. En la expresión previa, fof^n indica una composición de función, que tiene el valor, $fof^n(z) = f(f^n(z))$, (García, 2013).

2.2.15 Mathematica

Es un programa utilizado en áreas científicas, de la ingeniería, matemática y áreas computacionales. Originalmente fue concebido por Stephen Wolfran, quien continúa siendo el lider del grupo de matemáticos y programadores que desarrollan el producto en Wolfran Research (Wolfran language, 2015).

2.2.16 Órbita de z

Para $z \in \mathbb{C}$ definimos su Órbita como el conjunto

$$orb(z) = z, R(z), R_2(z), ..., R_k(z), ...,$$

donde R^k indica la composición de R consigo misma k veces, $R^k = Ro...R$ (García, 2013).

2.2.17 Órbita de un punto periódico

La órbita de un punto periódico está constituida por los n diferentes puntos $z, R(z), R_2(z), ..., R_{n-1}$ y al conjunto de estos n puntos se le llama órbita periódica de período $n(o\ n - ciclo)$ (García, 2013).

2.2.18 Orden de convergencia

Sea una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge a x^* con $X_n \neq x^*$ para todo $n \in N$ y sean $p > 0$ y $c > 0$. Si,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = 0,$$

entonces se dice que la sucesión x_n converge a x^* con orden de convergencia p, y una constante de error asintótica c. Si $p = 1, 2, 3, 4, 5$, se dice que es de orden lineal, cuadrático, cúbico, cuartico y quintico respectivamente (Diloné, 2013).

2.2.19 Punto fijo

Se dice que $z^* \in \mathbb{C}$, es un punto fijo de $R(z)$ si $R(z^*) = z^*$ (García, 2013).

2.2.20 Punto periódico

Un punto periódico de la función R de período $n > 1$ es un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $R^n(z_0) = z_0$ y $R^j(z_0) \neq z_0$ para $0 < j < n$. Obsérvese que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto periódico de período $n \geq 1$, entonces z_0 es un punto fijo de R^n (García, 2013).

2.3 Descripción del método de Halley

El método de Halley es un algoritmo numérico el cual puede ser utilizado para resolver ecuaciones no lineales de la forma:

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

para el cual produce valores que por medio a su aproximación se espera que muestren el valor esperado para la solución de la ecuación. también este método puede ser expresado de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2\left[f'(x_n)\right]^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{2.2}$$

otra forma que se utiliza para expresarlo es la conexidad logarítmica en la cual su expresión resulta de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}L_f(x_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3\ldots \tag{2.3}$$

Partiremos de estas situaciones y de Diloné (2013) para así deducir la descripción del mencionado método, el cual se puede manejar por distintas técnicas que a traves del tiempo le han permitido multiples aplicaciones a las funciones, entre los cuales se encuentran:

2.3.0.1 A partir del desarrollo de Taylor

Dado el siguiente polinomio de Taylor de segundo grado

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2,$$

donde x_n es una raíz aproximada de (2.1). Aquí el objetivo es determinar un punto x_{n+1} dondela gráfica de $f(x)$ corta a X lo que sería resolver la siguiente ecuación:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2, \tag{2.4}$$

si factorizamos el término $(x_{n+1} - x_n)$ de la ecuación (2.4) se obtiene

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)\left(f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)\right),$$

luego

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \frac{1}{2}f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)}$$

Si se aplica la corrección de Newton $\frac{-f(x_n)}{f'(x_n)}$ y así aproximamos la diferencia de $x_{n+1} - x_n$ se obtiene que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)}\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

lo que sería la función de iteración del método de Halley.

2.3.0.2 Construcción Geométrica: Método de las Hipérbolas Tangentes

Aparentemente fue Salehov el primero en sugerir que la función iteración de Halley podría derivarse usando una función racional osculante de la forma

$$y(x) = \frac{x + c}{ax + b} \tag{2.5}$$

Sabiendo que una curva osculatriz de una función f en x_n es aquélla que satisface la ecuación

$$y^{(k)}(x_n) = F^{(k)}(x_n),\ para\ k = 0, 1, 2. \tag{2.6}$$

De acuerdo con Scavo(1995) donde por conveniencia se utiliza una ecuación equivalente a (2.5) de donde surge:

$$y(x) = \frac{(x - x_n) + c}{a(x - x_n) + b}, \tag{2.7}$$

Si combinamos las ecuaciones (2.6) y (2.7) se puede obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} &= f(x_n) \\ \frac{b-ac}{b^2} &= f'(x_n) \\ \frac{2a(ac-b)}{b^3} &= f''(x_n). \end{aligned}$$

cuya solución sería:

$$a = \frac{-f''(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \tag{2.8}$$

$$b = \frac{2f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \tag{2.9}$$

$$c = \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}. \tag{2.10}$$

Ahora bien, si se toma la ecuación (2.7) como una nueva aproximación produciría una intersección con el eje y, es decir si $y(x_{n+1}) = 0$, entonces se tiene que:

$$x_{n+1} = x_n - c \tag{2.11}$$

luego sigue que al sustituir la igualdad (2.10) en la (2.11) se puede obtener:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Lo cual sería la ecuación presentada en (2.3)

2.3.0.3 Interpolación Exponencial, otra interpretación Geométrica

Esta técnica esta basada en un desarrollo presentado por Kawar, en el cual utiliza una interpolación mediante funciones exponenciales y polinomiales. Sabiendo que la aproximación de una función $f(x)$ por una función oculatriz $y(x)$ de tal forma que

$y^j(x_n) = f^j(x_n)$, para $j = 0, 1, 2$, de donde se considera una curva

$$y(x) = e^{a(x-x_n)}\left[b(x - x_n) + c\right], \tag{2.12}$$

donde los parámetros a determinar son $a,\ b,$ y c.

Ahora bien, si se denota la intersección con la abscisa de la curva (2.12) por x_{n+1}, se tendrá que $y(x_{n+1}) = 0$, por lo que:

$$x_{n+1} = x_m - \frac{c}{b}.$$

Luego para que el método deseado tenga convergencia cuadrática se debe de cumplir que

$$y(x_n) = f(x_n),\ y'(x_n) = f'(x_n),$$

lo que nos lleva a las siguientes igualdades $c = f(x_n),\ b = f'(x_n) - a$. En conclusión, se obtiene la familia uniparamétrica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - af(x_n)},\ a \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

Para que el método presentado en (2.13) tenga convergencia cúbica , se debe exigir que

$$y''(x_n) = f'',$$

o lo que sería

$$a^2 f(x_n) - 2af'(x_n) + f''(x_n) = 0 \tag{2.14}$$

si se toman los valores de $a \neq 0$, pero muy próximos a este, para así depreciar el término a^2 el cual esta dado en la ecuación (2.14). Luego se puede obtener una solución aproximada de la siguiente forma

$$a = \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \tag{2.15}$$

Si se sustituye la expresión (2.15) en la (2.13) se puede obtener

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

la cual expresa el método de Halley

2.3.0.4 A partir de la interpolación racional inversa

Para este caso se considera resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, consideramos la función que a cada x le hace corresponder $y = f(x)$, denotando así a la función inversa como $x = \phi(y)$, para luego llegar a una solución aproximada de $f(x) = 0$, los cuales se transforman en la aproximación de de la inversa $x = \phi(y)$, en la cual se aplica el desarrollo de Taylor. Cabe destacar que esta idea se le atribuye matemático ruso Pafnuty Lvovich Chebyshev. Retomando el problema de la interpolación inversa y asumiendo una aproximación de $\phi(y)$ por una función racional de la forma

$$\phi(y) \backsimeq \frac{(y - y_0) + a}{b(y - y_0) + c} = R(y)'$$

de donde $\phi^{(k)}(y_0) = R^{(k)}(y_0)$, para cada $k = 0, 1, 2$, de donde sigue que

$$R(y) = \frac{(2f'(x_0) + x_0 f''(x_0))\,(y - y_0) + 2x_0 f'(x_0)^2}{f''(x_0)(y - y_0) + 2f'(x_0)^2}$$

Si tomamos una nueva aproximación para un $x_1 = R(0)$ sigue que

$$x_1 = \frac{-f(x_0)(2f'(x_0) + x_0 f''(x_0)) + x_0 f'(x_0)^2}{-f(x_0)f''(x_0) + 2f'(x_0)^2},$$

después de operar adecuadamente, se puede escribir el método de Halley que se presenta en (2.3)

$$x_1 = x_0 - \frac{2}{2 - L_f(x_0)} \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

2.3.0.5 Utilizando fracciones continuas

Esta es una idea que fue presentada por Frame para la obtención de método de Halley. En el cual se se debe obtener un ε y su posterior desarrollo en serie de potencias. Puesto que este procedimiento es una forma idéntica al de la interpolación inversa continuaremos con la misma notación de $x = \phi(y)$ para cada $y = f(x)$. El término corrector ε es de la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= r - x_0 = \phi(0) - \phi(y_0) = \sum_{k\geq 1} c_k \nu^k \\ &= \nu - \frac{f'' x_0}{2f'(x_0)}\nu_2 + \frac{3f''(x_0) - f'''(x_0)f'(x_0)}{6f'(x_0)}\nu^3 + \ldots, \end{aligned}$$

donde r representa la solución de $f(x) = 0,\ \nu = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ y $c_1 = 1,\ c_2 = -\frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}$, y así sucesivamente. Desarrollando en fracciones continuas el el desarrollo del término corrector será:

$$\varepsilon = \sum_{k\geq 1} c_k \nu^k = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \ldots \cfrac{a_j}{b_j + \rho_{j+1}}}}}, \tag{2.16}$$

donde

$$\rho_j = \frac{a_j}{b_j + \rho_{j+1}}.$$

Dependiendo de las diversas fracciones continuas y del lugar donde se trunque a la fracciones presentada en (2.16), se obtendrán diversos procesos iterativos. Para nuestro caso, debemos truncarla en el segundo término y calcular a a_2. Ahora bien, a_2 es el primer término del desarrollo en serie de potencias de ρ_2, Como:

$$\rho_2 = \frac{a_1 - \rho_1}{\rho_1} = -c_2\nu + (c_2^2 - c_3)\nu^3 + \ldots$$

Luego $a_2 = -c_2\nu = -\frac{L_f(x_0)}{2}$. Por tanto,

$$\varepsilon \simeq \frac{a_1}{1 + a_2} = -\frac{2}{2 - L_f(x_0)}\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

obteniendose así el término corrector del método de Halley.

2.3.0.6 Acelerando el método de Newton.

Uno de los problemas que intentan resolver los procesos iterativos es el de aproximar la solución de una ecuación de la forma $f(x) = 0$. En ocaciones existen casos en los que es preferible resolver una ecuación modificada de la forma $f(x)g(x) = 0$, donde $g(x)$ es una función convenientemente elegida, la cual debe cumplir que no se anule en un entorno de la raíz buscada, lo cual será que si r es tal que $f(r) = 0$, entonces $g(x) \neq 0$ en un entorno de r. Para nuestro caso debemos aproximar la solución de una ecuación empleando el método de Newton, lo ideal es que la función sea una recta, puesto que en este caso la solución exacta se obtendrá en la primera iteración. Sabiendo que en la práctica no tiene mucho sentido usar el método de Newton para resolver una ecuación lineal, ya que , los métodos iterativos se usan para resolver ecuaciones no lineales. La idea que fue sugerida por Browm(1977), de que podemos usar la función $g(x)$ para linealizar lo más posible la ecuación $f(x)g(x) = 0$. El cual comprobó que un aumento de la linealidad de la ecuación en un entorno de r, tiene incidencia en la velocidad de convergencia del método de Newton.

De acuerdo con Gerlach(1994) el cual demuestra que cuando se aplica el método de Newton a una ecuación de la forma $\Psi = 0$ en donde la solución r debe cumplir que $\Psi'(r) \neq 0, \Psi''(r) = 0$ y $\Psi'''(r) \neq 0$, en lo cual el método de Newton alcanzaría la convergencia de orden tres el cual su orden de convergencia es de dos. Bajo las condiciones que impone por Gerlach, ¿ Qué forma tiene el método de Newton ?

Si $\Psi(x) = f(x)g(x)$, buscamos a $g(x)$ de manera que $\Psi''(r) = 0$. Así

$$f''(r)g(r) + 2f'(r)g'(r) = 0.$$

Al resolver esta ecuación diferencial salvo, constantes multiplicativas, se llega a que la solución es:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{f'(x)}}.$$

Por lo que, la idea de Brown y Gerlach consiste en aplicar el método de Newton a la función

$\Psi(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}$. De donde se obtiene:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\Psi(x)}{\Psi'(x)} = x_n - \frac{2}{2 - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

expresión que bajo las condiciones de aceleración impuestas por Browm y Gerlach, el método de Newton se convierte en el de Halley presentado en la expresión (2.3).

2.3.0.7 A partir de iteraciones de Laguerre.

Este es un conocido método para encontrar las raíces de un polinomio. En la cual se considera la la derivación logarítmica de un polinomio $p(x)$ de grado n, con raíces reales $x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_n$, de la forma

$$\prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

Luego si denotamos $a_i = \dfrac{1}{(x - x_i)}$, $A = \dfrac{p'(x)}{p(x)}$ y $B = -\dfrac{dA}{dx}$ se llegá a

$$A = (\log p(x))' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)} = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$B = -\frac{d\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)}{dx} = \frac{p'(x)^2 - p(x)p''(x)}{p(x)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite deducir

$$(A - a_1)^2 = (a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq (n-1)(a_2^2 + \cdots + a_n^2) = (n-1)(B - a_1^2),$$

de una forma equivalente

$$na_1^2 - 2Aa_1 - (n-1)B + A^2 \leq 0$$

Luego se puede decir que a_1 se encuentra situado entre las raíces de la ecuación:

$$nu^2 - 2Au - (n-1)B + A^2 = 0, \tag{2.17}$$

Luego la Idea de Hansen(1977) fue la de sustituir por fuciones cualesquiera, el grado del polinomio por un parámetro λ en la expresión (2.17), manteniendo así la notación

$$A = \frac{f'(x)}{f(x)},\ B = -A' = \frac{f'(x)^2 - f''(x)}{f(x)^2}.$$

La iteración que aparece en el trabajo de Hansen(1977) es

$$x_+ = x - \frac{\lambda}{1 \pm \sqrt{(1-\lambda)(1-\lambda+\lambda L_f(x))}} \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.18}$$

Si racionalizamos el deonminador de la expresión (2.18) nos arrojarías

$$x_+ = x - \frac{1 \pm \sqrt{(1-\lambda)(1-\lambda+\lambda L_f(x))}}{2-\lambda-(1-\lambda)L_f(x)} \frac{f(x)}{f'(x)},$$

ahora bien, si tomamos el parámetro de $\lambda = 0$ y elegimos el signo positivo en el numerador llegaríamos al mencionado método de Halley el cual puede verse en la expresión (2.3).

2.4 Descripción del método de Whittaker

En el análisis numérico uno de los problemas más importantes es localizar las raíces de la ecuación

$$f(x) = 0 \tag{2.19}$$

Donde $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable con raíces simples, por lo que, si $f(\alpha) = 0$ entonces $f'(\alpha) \neq 0$.

Sea x^* una raíz simple de la ecuación (2.19) Esta raíz se puede determinar como un punto fijo de alguna función de iteración $g : [a, b] \to [a, b]$, es decir , $g(x^*) = x^*$ por medio del método de iteración de un punto

$$x_{n+1} = g(x_n),\ n \in \mathbb{N} \tag{2.20}$$

donde g es una función de la forma:

$$g(x) = x + \varphi(x)$$

y $x_0 \in [a, b]$ es un valor inicial de la ecuación 2.19 y esta dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{2f'(x_n)} \left(2 - L_f(x_n)\right), \tag{2.21}$$

donde $x_0 \in [a, b]$ y $L_f := \dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ en un intervalo que contiene x_0, en el que la primera derivada de f tiende a cero.

CAPÍTULO III
DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción

A continuación, se presenta la metodología utilizada durante el desarrollo de esta investigación, tomando en cuenta el diseño, tipo y método de investigación. De donde se ha tomado como referencia las definiciones de Hernandez (2010).

3.2 Marco metodológico

3.2.1 Diseño de la investigación

Esta investigación, de acuerdo a la búsqueda de las causas se considera no experimetal ya que posee un diseño analítico, puesto a que se analizan en sus partes los métodos de Halley y Whittaker así como la teoría de fractales, para de esta forma, conocer la naturaleza y composición de los mismos . En torno al tiempo de estudio, el diseño es transversal, porque se desarrolló durante un tiempo definido.

3.2.2 Tipo de investigación

El presente estudio se constituye en una investigación de tipo analítica-exploratoria. Exploratoria, porque en principio se documentó un tema que ha sido poco estudiado anteriormente y analítica, porque se analizaron las diferentes características de los fractales generados por los métodos de Halley y Whittaker.

3.2.3 Método de la investigación

Para esta investigación se utilizó el método deductivo, porque parte de aspectos generales de los métodos de Halley y Whittaker y la teoría de fractales, para llegar a conclusiones particulares de los mismos.

3.2.4 Enfoque de la investigación

La presente investigación posee un enfoque cualitativo, debido a que se analizó en sus partes, los métodos de Halley y Whittaker y la teoría de fractales, tomando en cuenta las características que definen a cada uno de los mismos. De igual forma, solo se presentaron los elementos característicos de cada imagen fractal.

3.3 Procedimientos

Para realizar esta investigación: primero se dio lectura a documentos relacionados con el tema de investigación, con la finalidad de comprender las informaciones existentes dentro de esta y así establecer los antecedentes y limitaciones del tema objeto de estudio. Luego se procederá a programar, los métodos de Halley y Whittaker en el software Mathematica, de modo tal, que se pudieran introducir diferentes polinomios pertenecientes al campo de los complejos y luego estos generaron diferentes imágenes, denominadas fractales. Una vez obtenidas estas imágenes, se realizará un análisis de los elementos que las componen.

CAPÍTULO IV
PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Introducción

Este capítulo aborda conceptos que impactan la faceta analítica de los fractales y las imágenes generadas utilizando el software Wolfram Mathematica, versión 13.2. Se exploran los enfoques del Método de Halley y Whittaker para este propósito. Además, se ofrece una interpretación y análisis exhaustivo de estas imágenes, fundamentando relaciones cruciales entre la imagen resultante y el método empleado.

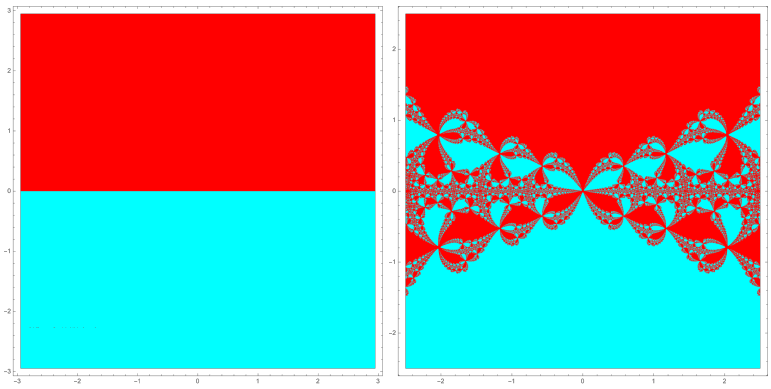
4.1.1 Planos dinámicos y de convergencia

La cuenca de atracción es un objeto matemático que se relaciona con los fractales de muchas maneras. En general, se define como el conjunto de puntos en el espacio de los parámetros que convergen a una órbita periódica en el espacio de las soluciones. Los planos de convergencia son útiles para comprobar el comportamiento de una familia de métodos iterativos cerca de puntos fijos extraños. El espacio de convergencia se obtiene asociando cada punto del plano con valores reales de a_1 (eje X) y b_2 (eje Y). Se han usado $800x800$ combinaciones diferentes de a_1 y b_2.

Imágenes Fractales Generada por el Método de Halley y Whittaker

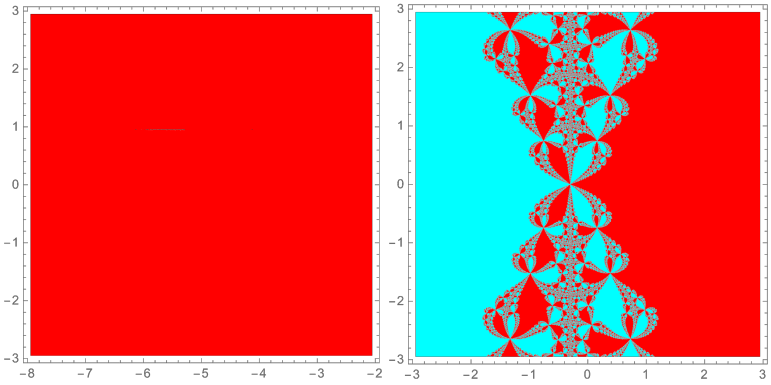
Como se observa en la figura 4.1, el dominio se subdivide en dos regiones y cada región es una zona de convergencia para la raíz que contiene, en la cual los puntos relacionados al color rojo convergen al punto $(0, i)$ y los puntos relacionados al color Cian convergen al punto $(0, -i)$, al cronometrar el tiempo de ejecución en el método de Halley se obtiene 21.875 seg y en el de Whittaker 176.266 seg, cabe destacar que la imagen generada por Halley no es un fractal.

Como se observa en la figura 4.2, al igual que 4.1 el dominio se subdivide en dos



(a) Método de Halley (b) Método de Whittaker

Figura 4.1: Fractal generado por el polinomio $z^2 + 1$ con el uso de los métodos iterativos

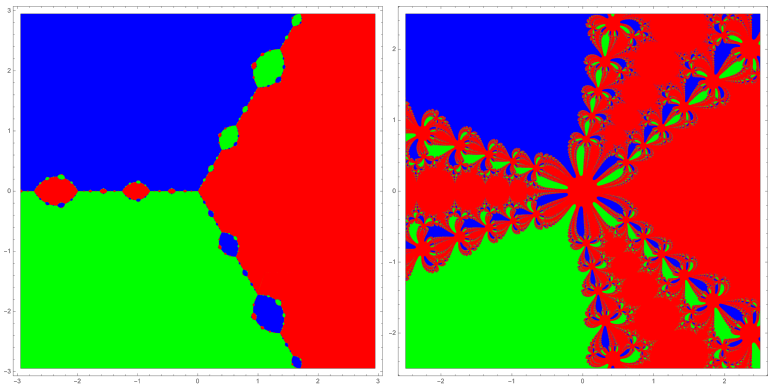


(a) Método de Halley (b) Método de Whittaker

Figura 4.2: Fractal generado por el polinomio $5z^2 + 3z - 8$ con el uso de los métodos iterativos Halley y Whittaker

regiones para el método de Whittaker y en una sola para el método de Halley, cada región es una zona de convergencia para la raíz que contiene, en la cual los puntos relacionados al color rojo convergen al punto $(1, 0)$ y los puntos relacionados al color Cian convergen al punto $(-\frac{8}{5}, 0)$, ambas raíces mencionadas es la representación del método de Whittaker, al cronometrar el tiempo de ejecución en el método de Halley se obtiene 10.1094 seg y en el de Whittaker 84.7188 seg, en este segundo caso Halley solo genera una imagen.

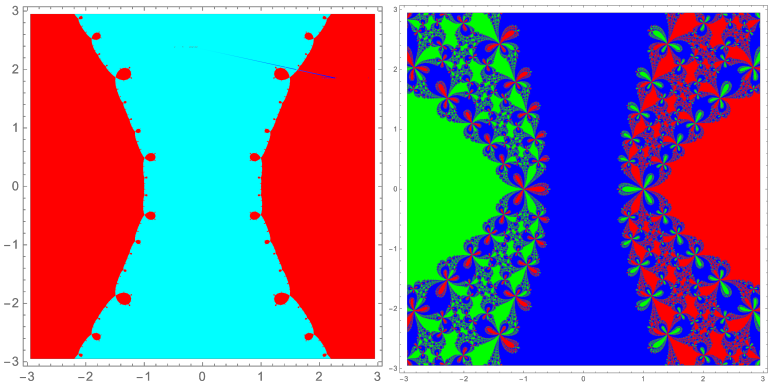
Se puede observar que la figura 4.3, se encuentra seccionada en tres partes y cada una de ellas está representada por un color, donde el color rojo se relaciona con la raíz $1+0i$ el azul a la raíz $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y el color verde con $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, en el metodo de Whittaker se



(a) Método de Halley (b) Método de Whittaker

Figura 4.3: Fractal generado por el polinomio $z^3 - 1$ con el uso de los métodos iterativos Halley y Whittaker

puede observa que los puntos de las fronteras en las secciones tienen un comportamiento caótico, en general estas zonas se conocen como conjunto de Julia y las zonas pintadas de un solo color como conjunto de Fatou. El tiempo de ejecución del método de Halley fue de 28.578125 segundo, mientras que el de Whittaker seria de 149.34375 segundo.



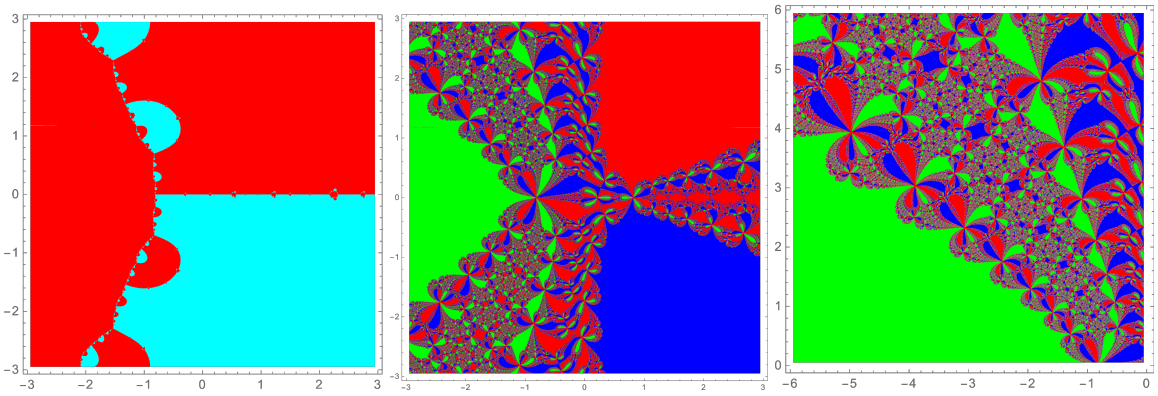
(a) Método de Halley (b) Método de Whittaker

Figura 4.4: Fractal generado por el polinomio $z\left(z^2 - 3\right)$ con el uso de los métodos iterativos Halley y Whittaker

El polinomio presentado en estos fractales de la figura 4.4, es un polinomio cúbico con ciertas característica de solución para cada unos de los métodos acá presentado, para la creación del fractal del método de Halley se presentan dos colores el rojo y el color Cian que representa la cuenca de atracción, para el método de Whittaker se presentan tres colores diferentes, cada uno de ellos representa una raíz, al igual que en la aplicación de Halley,

en este caso el color verde compone una solución que es $(-\sqrt{3}, 0i)$, el azul el cual es el cian en Halley es la raíz $(0, 0i)$ y el color rojo es $(\sqrt{3}, 0i)$, en este proceso de obtención del gráfico fractal la figura 4.4a llevó un tiempo de 28.4063 seg y de la figura 4.4b le tomó 194.313 seg.

En este contexto específico de la raíz $(0, 0i)$, se podría denominar "fractalidad de cuencas límite", lo cual implica una mayor complejidad para caracterizar las imágenes y, al mismo tiempo, conduce a soluciones particulares como los puntos fijos. Habitualmente, los límites de cuencas fractales se asocian con el método de Newton; sin embargo, gracias a la descripción del polinomio cúbico presentado previamente, se responde a una pregunta que se había planteado en investigaciones anteriores acerca de la posibilidad de obtener límites de cuencas fractales mediante enfoques numéricos distintos.



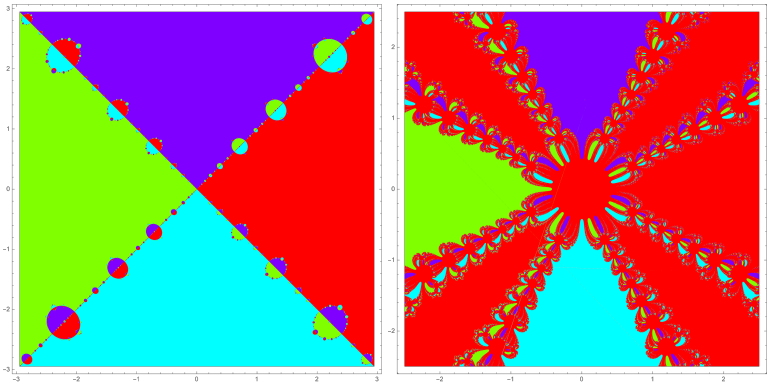
(a) Método de Halley (b) Método de Whittaker (c) Método de Whittaker con aumento de Zoom de $x8$

Figura 4.5: Fractal generado por el polinomio $z^3 - 2z + 2$ con el uso de los métodos iterativos Halley y Whittaker

El patrón fractal generado por la ecuación polinómica $z^3 - 2z + 2$, representado en la Figura 4.5, muestra una franja distintiva de color azul al hacer un aumento de 8x. Se hace evidente que el método de Whittaker no logra converger al resultado deseado en este caso.

En el contexto teórico de esta investigación, las líneas que conectan los límites de separación y las cuencas de atracción se denominan órbitas z ($orb(z)$ para $z \in \mathbb{C}$). Estas líneas revelan comportamientos intrigantes y excepcionales, dando lugar a formaciones intrincadas dentro de las líneas mencionadas. Básicamente, constituyen fractales puros, con

todas las características definitorias asociadas al concepto de fractales. Esta conclusión se obtuvo a través de un análisis visual de los resultados adquiridos. Cabe destacar que una de las características distintivas de los fractales es la autosimilitud, un rasgo que está ausente en algunas de las imágenes obtenidas mediante observación directa. Sin embargo, al examinar el gráfico del polinomio $z^3 - 2z^2 - 4$ bajo una ampliación óptima de $8x$, emergen estructuras similares a flores. Estas estructuras están compuestas por colores correspondientes a las raíces individuales. El aspecto intrigante de estas formaciones es su repetición indefinida a medida que la imagen se amplía aún más, un fenómeno conocido como autosimilitud.

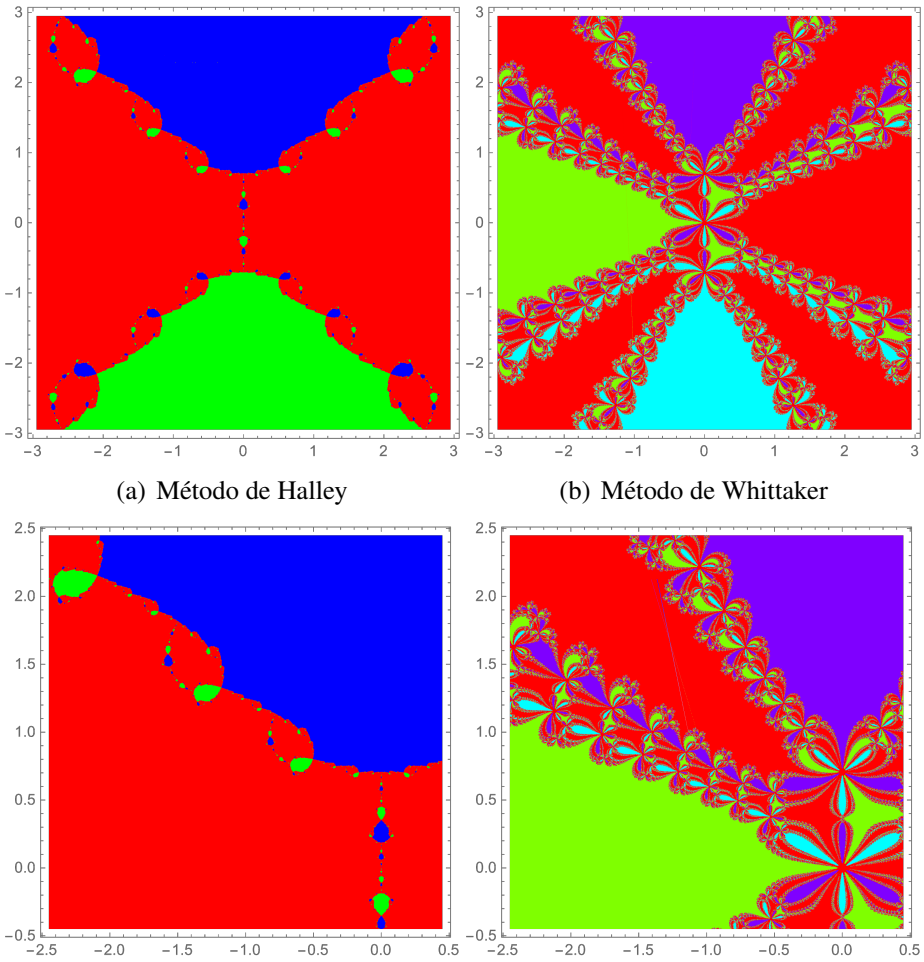


(a) Método de Halley (b) Método de Whittaker

Figura 4.6: Fractal generado por el polinomio $z^4 - 1$ con el uso de los métodos iterativos

En la figura 4.6, se puede apreciar cómo está dividida en cuatro partes, cada una representada por un color específico. El color rojo está asociado con la raíz $1 + 0i$, el violeta con la raíz $0 + i$, el verde con $-1 + 0i$ y el color Cian con $0 - i$. Nuevamente al emplear el método de Whittaker , se nota que los puntos en las fronteras de las secciones exhiben un comportamiento caótico, ya que en el mismo se nota como el color rojo en el centro de la flor es expandidos hacia otros lado. El método de Halley tomó 33.1406 segundos para ejecutarse, en comparación con los 179.625 segundos requeridos para el método de Whittaker.

Como se puede observar en las figuras 4.7 en el método de Halley (a) tiene tres colores, aunque el polinomio $z^4 + z^2 - 1$ tiene 4 soluciones, lo cual se puede ver en la aplicación del método de Whittaker (b) con 4 colores distintos, en ambos se puede notar lo



(a) Método de Halley

(b) Método de Whittaker

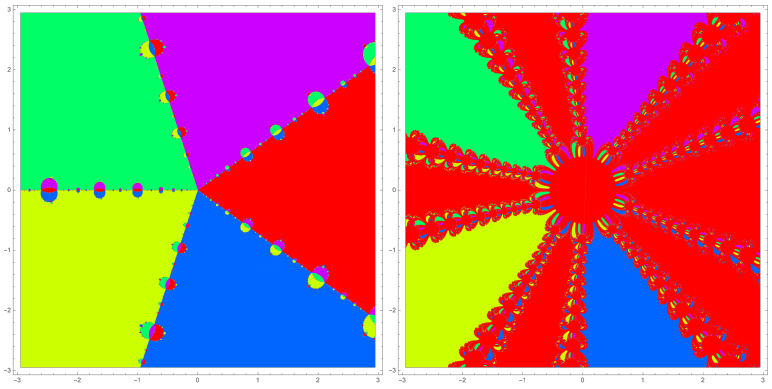
(c) Método de Halley con aumento de Zoom de $x8$

(d) Método de Whittaker con aumento de Zoom de $x8$

Figura 4.7: Fractal generado por el polinomio $z^4 + z^2 - 1$ con el uso de los métodos iterativos

que sería la cuenca fractal en la aplicación de Halley aparece como una bellota entrelazada entre sí la cual se puede apreciar en (c), en la aplicación de Whittaker se puede ver con tres forma de flores diferentes, cabe destacar que en el mismo se muestra un circulo de color rojo al hacer el Zoom de $x8$ que el método no converge a la solución el mismo se atrae y se expande creando separación hacia donde convergen la solución del mismo. La raíces buscada en en este polinomio son $0 + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)}$, de tal forma como se observa en la figura (a) y (b), azul y violeta respectivamente, $0 - \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)}$ en este caso el color verde y el cian en Whittaker, la raíz $-\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)} + 0$ representa el rojo de lado izquierdo de la cuenca de atracción del método de Halley y verde limón en Whittaker y $\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)} + 0$

el lado derecho en los mencionados métodos con el color rojo. Observando que esta es la solución que se logro expandir tanto en Halley como en Whittaker.



(a) Método de Halley (b) Método de Whittaker

Figura 4.8: Fractal generado por el polinomio $z^5 - 1$ con el uso de los métodos iterativos

En la figura 4.8, se puede apreciar cómo está dividida en 5 partes, cada una representada por un color específico con la línea de la cuenca de atracción hacia donde convergen las raíces. Nuevamente al emplear el método de Whittaker para analizar esta imagen fractal, se nota un comportamiento caótico al igual que la figura generada en 4.6 , ya que en el mismo se nota como el color rojo en el centro de la flor . El método de Halley tomó 20.5781 segundos para ejecutarse, en comparación con los 99.9219 segundos requeridos para el método de Whittaker.

CAPÍTULO V
CONCLUSIONES

5.1 Introducción.

En el presente capítulo, se ponen en evidencia el conjunto de conclusiones obtenidas en esta investigación, las cuales guardan estrecha relación con los objetivos planteados en la misma, al igual que se destacan otros elementos que generan posibles líneas de investigación.

5.2 Conclusiones

Se construyeron fractales, mediante la programación de los métodos iterativo de Halley y Whittaker en el software Mathematica 13.2, demostrando así, la posibilidad de generar estas imágenes geométricas complejas, con los elementos anteriormente mencionados.

Se lograron analizar los fractales generados, mediante una interpretación gráfica, en la cual se puso en evidencia, la fiabilidad de los métodos iterativos, al igual que la explicación de los elementos que componen los fractales.

Lo mencionado en el análisis, implica, que el método iterativo de Whittaker es una técnica más complicada y de convergencia más lenta en comparación con el de Halley . El mis Funciona mejor que el método de Whittaker para su propósito previsto, que es encontrar soluciones a las ecuaciones, pero su convergencia más rápida significa que los fractales que genera son en realidad menos interesantes. Ejemplos de esto se tiene al resolver los polinomios $z(z^2 - 3)$ y $z^3 - 2z + 2$(ver Figura 4.4, 4.5) con los dos métodos y bajo la misma programación, como se muestra en el capítulo anterior.

Es necesario destacar, que la conclusión vista anteriormente, no se obtuvo únicamente por los ejemplos mostrados, sino que se realizaron diferentes pruebas, a diversos

polinomios. Ambos métodos pueden generar los fractales pero el de Whittaker genera mejor fractal que el de Halley, ya que, este tiene una convergencia algo caótica en la solución.

El análisis realizado en la presente investigación, pone en evidencia un conjunto de aplicaciones que puede tener el uso de los fractales para el análisis de métodos numéricos, al igual que cuando se relaciona lo expresado en este trabajo con otras investigaciones, genera la expectativa de que el análisis fractal puede ser aplicado a otras áreas científicas. Por estas razones, se ilustran a continuación algunas ideas para futuras investigaciones.

5.2.1 Futuras Líneas de Investigación

- Estudiar el comportamiento de la sucesiones generadas por los métodos de Halley y Whittaker cuando se aplican a funciones singularidades o puntos críticos y analizar algún tipo de estructura fractal o caótica.
- Explorar la aplicación de los métodos de Halley y Whittaker a problemas de ingeniería, física o biología que involucren ecuaciones no lineales con soluciones fractales(Atractor de Lorenz, el problema del péndulo doble, el problema del crecimiento tumoral) .

Referencias bibliográficas.

Almedro, M. (2000), *El Significado de las Teorías del Caos en Psicoterapia.* Universidad Autónoma de Madrid.

Bermúdez, C. (2009), *Estudio unificado de métodos de alto orden para ecuaciones no lineales. XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones y XI Congreso de Matemática Aplicada*., (págs. 1-6). Ciudad Real.

Browm G. H.(1977), *On Halley's variation of Newton's method*, Amer. Math. Monthly, Vol. 84, 726-728.

Cajori, F. (1938), *A History of Mathematical Notations*. New York : Dover Publications.

Costa, V., & Sombra, L. (2019), *Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico*: un análisis praxeológico.

Diloné, M. (2013), *Métodos interactivos aplicados a la ecuación de Kepleer*, Universidad de la Rioja, Servicio de Publicaciones.

Eggen, Olin Jeuck. "Edmond Halley". Encyclopedia Britannica, 10 Jan. 2023, https://www.britannica.com/ Halley. Accessed 19 July 2023.

Ezquerro, José A., Gutiérrez José M., Hernández, Miguel A. Y M. Amparo Salanova (2001) *El Método De Halley: Posiblemente, El Método Más Redescubierto Del Mundo* (Luis Español y Juan L. Varona, editores), Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logroño, españa,

Feigenbaum,L.(1985) *Brook Taylor and the method of increments*, Arch. Hist. Exact Sci. 34 (1-2) , 1-140.

Frame, J. S.(1944), *A variation of Newton's method*. American Mathematical Monthly, **vol. 51** 36-38.

García, M. (2013), *El Método de Chebyshev para el Cálculo de Raíces de Ecuaciones no Lineales*. Univerdiad de Rioja.

Gerlach, J.(1994),*Accelerated convergence in Newton's Method*, SIAM Review, Vol. 36, 272-276.

Hansen E. (1977),*A family of root finding methods*, Numer. Math. Vol. 27, 257-269.

Hernandez, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010), *Metodología de la Investigación*.

Kollerstrom, N. (1992), *Thomas Simpson and Newtonś method of approximation: An enduring myth*. The British Journal for the History of Science, **Vol. 25 No. 4** , 347-354.

Kobal, E.(2002) , *Notice concerned with the calculation of roots of numerical equations*, Monatsh. Math. 02 pp. 331-332.

Mandelbrot, B. (1982), *The fractal geometry of nature*.

Martínez, S. (2016), *Construcción de nuevos Métodos Interativos para Resolver ecuaciones no lineales aplicando la técnica de composición*.

maths.ed.ac.uk/ v1ranick/whittakerbio.pdf

Penkova, M. (2011), *Métodos Interactivos Eficientes para la Resolución de Sistema No Lineales*. Universidad Politécnica de Valencia.

Plazas, S., & Gutiérrez, J. (2013, *Dinámica el Método de Newton* . Universidad de Rioja.

Rodríguez, R. (1995), *La Teoria de los Fractales: Aplicación Experimental e Implicaciones en la Metodología de la ciencia*.

Rosario, W. (2019), *Análisis Fractal del Método de Chebyshev*.

Scavo, T.R and Thoo, J.B (1995): *On The Geometry of Halley's* method The American Mathematical Monthly, **Vol. 102 No. 5** , pp. 417-426.

Schröder, E.(1870), *Ueber unendliche viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen.* Mathematische Annalen **Vol. 2** : 317-365. ¡http://eudml.org/doc/156449¿.

Terán, J., & Rúa, C. (2018). *El Método de Newton para Raíces Complejas. Fractales en el problema de Cayley*. Revista EIA, 15(29), 97–108. Obtenido de https://doi.org/10.24050/reia.v15i29.1131

Váldez, P. (2016), *Introducción a la Geometría Fractal*.

Ventura , Aurelina (2022), Generación de Fractales a partir de Superficies de Soluciones de Polinomios Cuadráticos, en Función del Método de Aproximación Utilizado, UTE-CO, Cotuí.

Westman, W.E., Peet, R.K. Robert H. Whittaker (1920–1980): The man and his work. Vegetatio 48, 97–122 (1982). https://doi.org/10.1007/BF00726879

Wolfran, S. (2015), *Wolfran Research. Wolfran language*.

ANEXO

Programación de los Métodos de Newton y Halley en el Software Mathematica Para la Generación de Fractales

$$ejecutarRutinasRaices[g_] := Block[,$$

$$hallaRaices = NSolve[g[z] == 0, z];$$

$$numRaices = Length[hallaRaices];$$

$$Do[raiz[k] = hallaRaices[[k, 1, 2]], k, 1, numRaices];$$

$$posicionRaiz = Compile[z,_C\, omplex,$$

$$Block[eps = 10.0^(-3), k, numLocal = numRaices,$$

$$For[k = 1, k <= numLocal, k++,$$

$$If[Abs[z - raiz[k]] < eps, Return[k]]$$

$$];$$

$$Return[0]$$

$$],$$

$$raiz[_],_C\, omplex$$

$$]$$

$$]$$

Este fragmento de código define una función llamada $ejecutarRutinasRaices$ que encuentra las raíces de una función $g[z] == 0$ y las almacena en variables individuales. También define una función compilada llamada $posicionRaiz$ que busca la posición de una raíz específica en relación con un argumento complejo z

$$calcularFuncionIteradora[g,metodo_] := Block[,$$

$$f = Compile[z,_C omplex,$$

$$Evaluate[Simplify[metodo[g, z]]]$$

$$]$$

$$]$$

En este código define una función llamada $calcularFuncionIteradora$ que toma una función g y un método de iteración $metodo$ como argumentos. La función crea una función compilada f que evalúa el método de iteración en g y z, donde z es un número complejo. La expresión resultante se simplifica y se almacena en f.

$$iterRaices = Compile[x,_R eal, y,_R eal, maxIter,_I nteger,$$

$$Block[z, contador, r,$$

$$z = x + y * I; contador = 0; r = posicionRaiz[z];$$

$$contador + +; z = f[z]; r = posicionRaiz[z]$$

$$];$$

$$Return[r]$$

$$],$$

$$f[]_C omplex, posicionRaiz[]_I nteger$$

$$]$$

Para este código se define una función compilada llamada $iterRaices$ que realiza iteraciones utilizando la función f y la función $posicionRaiz$ en un punto dado $(x + y * I)$. Realiza iteraciones hasta que se cumpla una condición de parada: r no sea igual a 0 o se alcance el número máximo de iteraciones $(maxIter)$. El resultado

final se devuelve como r.

Además se establecen diferentes parámetros, que pueden permitir, la aparición de diferentes tipos de puntos, como lo son, puntos fijos, puntos atractores y super-atractores.

$$CompiledFunction[11, 13.2, 5468]$$

$$Blank[Real],$$

$$Blank[Real],$$

$$Blank[Integer], 3, 0, 0, 3, 0, 1, 2, 0, 0, 2, 0, 3,$$

$$False, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 1,$$

$$omplex[0., 1.], 4, 0, 0, 1, 2, 0, 5,$$

$$0., 3, 0, 2, 4, 7, 3, 3, 0, 11, 1, 2, 2, 17, 2, 0, 2,$$

$$11, 0, 2, 1, 14, 1, 2, 1, 6, 1, 2,$$

$$47, posicionRaiz, 4, 0, 1, 2, 0, 3, 24, 3, 1, 0, 2, 0, 4, 25,$$

$$2, 0, 1, 5, 1, 3, 3, 2, 5, 2, 3, 2, 3, 9, 6, 2, 4, 12,$$

$$4, 5, 6, 6, 6, 2, 47, f, 4, 0, 1, 4, 0, 2, 8, 2, 1,$$

$$47, posicionRaiz, 4, 0, 1, 2, 0, 6, 6, 6, 3, 3, -14, 1, 1,$$

$$Function[x, y, maxIter,$$

$$Block[z, contador, r,$$

$$z = x + yComplex[0, 1]; contador = 0; r = posicionRaiz[z]; While[$$

$$And[r == 0, contador < maxIter],$$

$$Increment[contador]; z = f[z]; r = posicionRaiz[z]]; Return[$$

$$r]]], Evaluate]$$

En este conjunto de comandos, se compila la función, la cual arroja un conjunto finito de valores, acordes al número de iteraciones, donde también destacan elementos, como la posición de las posibles raíces en la gráfica. Es decir, el código proporcionado define una función compilada que realiza iteraciones utilizando f y $posicionRaiz$ en un punto dado $(x + yComplex[0, 1])$. El bucle $While$ se ejecuta hasta que se cumpla una condición de parada: r no sea igual a 0 o se alcance el número máximo de iteraciones $(maxIter)$. El resultado final se devuelve como r.

$$fractalRaices[centro, lado, maxIter, resolucion_] :=$$

$$Block[Messages =],$$

$$xxMin = centro[[1]] - lado/2, xxMax = centro[[1]] + lado/2,$$

$$yyMin = centro[[2]] - lado/2, yyMax = centro[[2]] + lado/2,$$

$$DensityPlot[iterRaices[x, y, maxIter],$$

$$x, xxMin, xxMax, y, yyMin, yyMax,$$

$$PlotPoints- > resolucion, Mesh- > False,$$

$$PlotRange- > 0, numRaices,$$

$$ColorFunction- > Hue$$

$$]$$

$$]$$

$$//Timing$$

La función $fractalRaices$ genera un fractal de raíces utilizando la función compilada $iterRaices$ y produce un gráfico de densidad utilizando $DensityPlot$. El tamaño del fractal y la resolución del gráfico se controlan mediante los argumentos $lado$ y

$resolucion$, respectivamente. El resultado del gráfico de densidad se muestra utilizando colores determinados por la función Hue. El tiempo de ejecución de la función también se mide y se muestra al final.

En otras palabras el conjunto de comando, es donde se plantean, las características de la gráfica, que se desea obtener, incluyendo la gráfica de los puntos destacados anteriormente, el rango de las raíces y el color que se le asigna a cada posible solución de forma individual, destacando que en este caso se le asignaron colores al azar.

$$g[z] := z^n;$$

En este comando, es donde se insertan los polinomios a graficar, dentro de los cuales solo fueron evaluados, polinomios cuadráticos y cúbicos, con el objetivo de dar respuesta a los objetivos específicos de la investigación.

$$metodo[g,z] :=$$

$$z - (0.5 * (g[z]/g'[z]) * (2.0 - (g[z]/g'[z]) * g''[z]/g'[z])); (*Whittaker*)$$

$$ejecutarRutinasRaices[g];$$

$$calcularFuncionIteradora[g, metodo];$$

$$fractalRaices[-0., 0., 5.9, 25, 800]$$

$$metodo[g,z] :=$$

$$z - (2 * g[z] * g'[z])/(2 * g'[z]^2 - g[z] * g''[z])(*Halley*)$$

$$ejecutarRutinasRaices[g];$$

$$calcularFuncionIteradora[g, metodo];$$

$$fractalRaices[-0., 0., 5.9, 25, 800]$$

En este último conjunto de comandos, es donde se introducen, los métodos iterativos a utilizar y el tamaño de imagen que se desea obtener, siendo este último, $800x800$, el cual genera un cuadro de 640000 de pixeles, los cuales poseerán las imágenes a obtener.

Luego de digital todos estos códigos se procede a evaluar la hoja de cálculo y esta generará diferentes tipos de gráficas, las cuales son consideradas fractales.

Algunos conjuntos fractales



Figura Anexo 1: Polvo de Cantor.

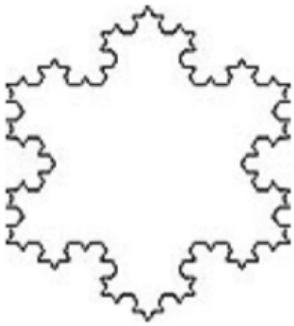


Figura Anexo 2: Curva de Von.



Figura Anexo 3: Triángulo de Sierpinski.

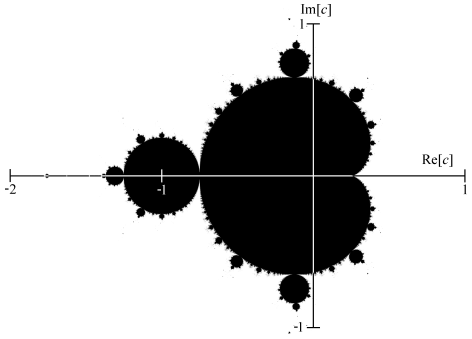


Figura Anexo 4: Representación matemática del conjunto de Mandelbrot como subconjunto del plano complejo.

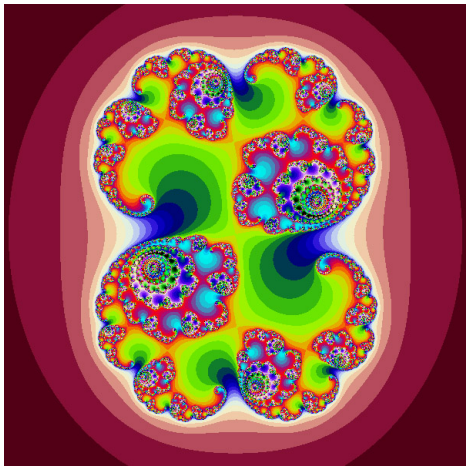


Figura Anexo 5: Conjunto de Julia, un fractal. $C = [0.285, -0.01]$

Ejemplo del código para determinar la raíces por los métodos de Halley y Whittaker

Punto de inicio $z^2 + 1$

$g(0) = 0.5 + 0.1i;$

Método de Halley

$$g[\text{n\_}]{:=}g(n) = g(n-1) - \frac{2\left(g(n-1)^2+1\right)\left(2g(n-1)\right)}{2(2g(n-1))^2 - 2\left(g(n-1)^2+1\right)};$$

Código para generar tabla:

$$\text{Print}\left[\text{Table}\left[\left\{k, g(k), g(k)^2+1\right\}, \{k, 0, 10\}\right]\right]$$

k	$g[k]$	$g[k]^2+1$
0	$0.5+0.1i$	$1.24+0.1i$
1	$1.90855\ +2.85202i$	$-3.49145+10.8864i$
2	$0.499271+1.16719i$	$-0.113054+1.16548i$
3	$0.00201075+0.973884i$	$0.0515537+0.00391648i$
4	$1.0817*10^{-6}+0.999995i$	$9.09281*10^{-6}+2.1634*10^{-6}i$
5	$1.64528*10^{-17}+1.i$	$0.+3.29055*10^{-17}i$
6	$0.+1.i$	$0.+0.i$
7	$0.+1.i$	$0.+0.i$
8	$0.+1.i$	$0.+0.i$
9	$0.+1.i$	$0.+0.i$
10	$0.+1.i$	$0.+0.i$

Punto de inicio z^2+1

$g(0)=0.5\ +0.1i$;

Método de Whittaker

$$h(\text{n\_}):=h(n)=h(n-1)-\frac{(h(n-1)^2+1)\left(2-\frac{2\left(h(n-1)^2+1\right)}{(2h(n-1))^2}\right)}{2(2h(n-1))};$$

Código para generar tabla:

$$\text{rint}\left(\text{Table}\left[\left\{k,h(k),h(k)^2+1\right\},\{k,0,10\}\right]\right)$$

k	$g[k]$	$g[k]^2+1$
0	$0.5+0.1i$	$1.24+0.1i$
1	$0.614048-0.367632i$	$1.2419-0.451487i$
2	$0.0678487-0.0686018i$	$0.999897-0.0093091i$
3	$-101.795+94.872i$	$1362.54-19315.i$
4	$-63.6206+59.2962i$	$532.537-7544.92i$
5	$-39.7608+37.0621i$	$208.319-2947.23i$
6	$-24.8471+23.1669i$	$81.6716-1151.26i$
7	$-15.5241+14.4844i$	$2.1999-449.712i$
8	$-9.69392+9.06074i$	$12.875-175.668i$
9	$-6.0449+5.67579i$	$5.32625-68.6192i$
10	$-3.75594+3.56784i$	$2.37765-26.8012i$

Se utilizó un $z = x + I * y;$, para determinar las raíces compleja así como también el comando $Solve$ de Wolfran mathematica