

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada

Trabajo de Postgrado Para Optar por el Título de
Maestría en Matemática

TÍTULO

Interpretación Geométrica del Producto Integral

SUSTENTANTE

Diego Almánzar Reyes

ASESOR

Dr. Manuel Aurelio Diloné Alvarado

Cotuí, Prov. Sánchez Ramírez, Rep. Dom.

Año Académico 2023.

TÍTULO

Interpretación Geométrica del Producto Integral

Declaración de Autoría

Las ideas expuestas en este estudio de investigación son de entera responsabilidad del autor de dicho trabajo. Las citas y referencias bibliográficas han sido utilizadas de acuerdo con el derecho de autor, y por lo tanto, la UTECO queda exenta de cualquier responsabilidad. Cabe mencionar que la reproducción total o parcial de este trabajo requiere autorización previa.

Interpretación Geométrica del Producto Integral

Composición del tribunal evaluador

Julio Antonio Manzueta

Metodología

José Miguel Gómez

Contenido

Nelson Sánchez

Redacción

Índice general

Declaración de Autoría	III
AGRADECIMIENTOS	VI
DEDICATORIA	VII
Resumen	IX
INTRODUCCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Antecedentes.	1
1.2.1 Antecedentes históricos.	1
1.2.2 Antecedentes académicos.	3
1.3 Planteamiento del problema.	5
1.4 Objetivos.	6
1.4.1 Objetivo general.	6
1.4.2 Objetivos específicos.	7
1.5 Justificación.	7
1.6 Alcances y límites.	8
CAPÍTULO	II
MARCO REFERENCIAL	9
2.1 Introducción.	9
2.2 Marco teórico.	9
2.3 Teoremas	16
2.3.1 Teorema del Valor Medio:	16
2.3.2 Teorema del Cambio de Variable:	17
2.3.3 Teorema Fundamental del Cálculo:	18
2.3.4 Teorema de Cambio de Orden de Integración:	20
2.3.5 Teorema del Límite:	21
CAPÍTULO	III
DISEÑO METODOLÓGICO	23

3.1	Introducción.	23
3.2	Diseño de la investigación.	23
3.3	Tipo de investigación.	23
3.3.1	Método de la investigación.	24
3.3.2	Enfoque de la investigación.	24
3.4	Procedimiento de investigación	24
CAPÍTULO		IV
PRESENTACIÓN DE RESULTADOS		26
4.1	Introducción.	26
4.2	Definición del Producto Integral	26
4.3	Característica del Producto Integral	27
4.4	Fundamentos geométrico del Producto Integral	31
CAPÍTULO		V
CONCLUSIONES		33
5.1	Introducción.	33
5.2	Análisis de las característica del Producto Integral	33
5.3	Análisis de los fundamentos grométrico del Producto Integral	34
5.4	Interpretacion Geométrica del Producto Integral	34
5.5	Líneas futuras de investigación.	35
Bibliografía		36
Anexo		38
Gráfica		39

AGRADECIMIENTOS

A Dios:

Agradezco sinceramente por la vida y por ser la fuerza que guía y permite cada acción que emprendo. Reconozco tus bendiciones en cada paso que he dado para el avance de este valioso proyecto. Toda la gloria y honor se atribuye a tu guía y dirección, querido Señor.

A la Universidad Tecnológica del Cibao Oriental:

Quiero extender un gran agradecimiento a la (UTECO) por ser un prestigioso y acogedor centro educativo. Valoro enormemente la oportunidad que me ha brindado para desarrollarme profesionalmente bajo su techo y recibir educación de la más alta calidad. Esta institución se ha convertido en un segundo hogar, donde he vivido experiencias inolvidables.

A los Docentes:

Quiero reconocer especialmente a los educadores. Aprecio enormemente a cada uno de los docentes que han dedicado sus esfuerzos para impartirme conocimientos a través de asignaturas, cursos, seminarios y consultas. Su compromiso ha sido fundamental en la promoción de este programa.

A mi asesor Manuel Aurelio Diloné:

Le Agradezco por haber aceptado el rol de guía en este proyecto de investigación y por brindarme un apoyo incondicional. Valoro sus sugerencias, aportaciones, dedicación y esfuerzo para enriquecer este trabajo. Su humildad y amabilidad han hecho de esta colaboración una experiencia enriquecedora. Una vez más, le extiendo un sincero agradecimiento.

Al Ministerio de Educación Superior, Ciencia y Tecnología (MESCYT):

Por manifestar su voto de confianza en mí y darme la oportunidad estudiar a través de sus programas de becas.

DEDICATORIA.

A Dios:

Agradezco a Dios por ser refugio constante y fuente inagotable de esperanza y amor. Su presencia en mi vida ha sido un faro de luz en los momentos más oscuros y una inspiración en cada día que pasa. Le doy gracias por su gracia infinita y su amor eterno.

A mis padres (Juan Almanzar y Fiordaliza Reyes):

Por su apoyo incondicional y amor inquebrantable ya que han sido mi mayor inspiración. Ustedes me han brindado la base sólida desde la cual he construido educación.

A mi amada esposa, Luz María:

Tu constante aliento y comprensión han sido la motivación que impulsa mi deseo de superaciones. Tus sacrificios y amor son el refugio en cada desafío.

A mi adorada hija, Aurora Almánzar:

Eres mi mayor motivación. Aspiro a ser un ejemplo para ti y a construir un futuro lleno de oportunidades.

A mi hermana, Leidi María Castillo Reyes:

Por tu apoyo inquebrantable y aliento constante. Tu presencia ha sido un faro de luz durante todo el proceso.

A mis compañeros de estudios:

Por compartir desafíos y triunfos en este recorrido educativo. Juntos hemos creado recuerdos inolvidables.

A los profesores:

Por su dedicación y enseñanzas que han moldeado mi pensamiento y crecimiento académico.

A mi asesor, Dr. Manuel Aurelio Diloné

Por su guía experta este proyecto. Su compromiso y sabiduría han sido un faro de orientación.

Este logro no solo es mío, sino de todos aquellos que han dejado huella en mi vida. Con gratitud y respeto, dedico este trabajo a ustedes.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL
(UTECO)

Facultad De Postgrado y Educación Continuada



Maestría en matemáticas

Interpretación Geométrica del Producto Integral

Diego Almánzar Reyes

Sustentante

Dr. Manuel Aurelio Diloné

Asesor

RESUMEN.

Este estudio se enfoca en la Interpretación Geométrica del Producto Integral. El objetivo general de la investigación es interpretar de forma geométrica el Producto Integral. Para alcanzar este objetivo, se busca explorar los siguiente objetivos específicos:

- Caracterizar el Producto Integral.
- Identificar los fundamentos para la Interpretación Geométrica del Producto Integral.

Para abordar esta investigación se aplicó un enfoque metodológico deductivo de tipo exploratorio y explicativo, con un énfasis cualitativo y un diseño no experimental.

Los resultados destacan que el Producto Integral puede ser interpretado como el volumen de prisma en función a los incrementos de una función con multiplicidad de lados, donde cada incremento actúa como una dimensión diferente. Además, se establece una conexión significativa entre el Producto Integral y la media geométrica de los incrementos de la función.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

En este capítulo se presentan los elementos siguientes: antecedentes históricos y académicos, planteamiento del problema, objetivos, justificación, alcances y límites.

1.2 Antecedentes.

1.2.1 Antecedentes históricos.

1.2.1.1 Orígenes del Producto Integral

Vito Volterra A fines del siglo XIX introdujo el concepto de integración de productos, que amplió la idea de la integración ordinaria a la integración de productos de funciones. Su trabajo sobre la integración de productos se publicó en varios artículos influyentes y culminó en el libro “Opérations infinitésimales linéaires”, coescrito con Bohuslav Hostinský. (Slavík, 2007).

El trabajo de Volterra sobre la integración de productos sentó las bases para la teoría de las ecuaciones integrales de Volterra, que se convirtió en una herramienta importante para el estudio de sistemas dinámicos. Su investigación en esta área tuvo aplicaciones en física, biología y economía, y contribuyó significativamente al desarrollo de la modelización matemática y el análisis. (Slavík, 2007).

El Producto Integral fue introducido hace más de 110 años por el matemático italiano Vito Volterra, como una herramienta en la solución de cierta clase de ecuaciones diferenciales. Fue estudiada intensivamente por los matemáticos durante medio siglo, pero finalmente el tema cayó en desuso y cayó en el olvido. (Gill, 2001).

El Producto Integral parece haber sido utilizado por primera vez como una herramienta fundamental en el análisis de supervivencia moderno por Aalen y Johansen (1978), aunque también aparece en un contexto más informal en Cox (1972) y en Kalbfleisch y Prentice (1980). Se ofrecen revisiones de la teoría de la integración de productos en los trabajos de Gill y Johansen (1990) y Gill (1994). El primer artículo también presta atención a la historia anterior del tema. En particular, cabe mencionar que se han utilizado una amplia variedad de notaciones para el product-integral, incluyendo grandes P 's en cursiva, símbolos de producto y el signo de integral ordinario adornado con un semicírculo encima. (Gill, 2001).

En el 1938 Hostinský, estudió ciertos operadores lineales especiales en el espacio de funciones continuas (él los llamó "transformaciones funcionales lineales") y calcula sus integrales de productos, así como sus derivadas por la izquierda y la derecha. Hostinský imaginó una función como un vector con infinitas coordenadas; el operador lineal en R^n dado por:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j$$

luego pasa al operador en funciones continuas dadas por:

$$Y(t) = \int_p^q A(t, u)x(u)du$$

Esta idea no era nueva; Volterra ya había notado que las ecuaciones integrales pueden tratarse como casos límite de sistemas de ecuaciones algebraicas lineales. Su observación también fue posterior utilizado por Ivar Fredholm, quien obtuvo la solución de una ecuación integral como límite de las soluciones de ecuaciones algebraicas lineales. (Volterra y Hostinský, 1938).

1.2.2 Antecedentes académicos.

Arthur Stroud y Don Secrest, (1992), En su artículo titulado "Product Integration: Its History and Applications", ofrecen una visión histórica del desarrollo y las aplicaciones del producto integral. Discuten las contribuciones de matemáticos destacados como Volterra y Perron en el desarrollo del concepto de producto integral. Stroud y Secrest exploran cómo el producto integral se ha aplicado en campos como la física matemática, la teoría de la medida y la teoría de ecuaciones diferenciales. Además, presentan ejemplos de cómo el producto integral se ha utilizado en la modelización de fenómenos físicos y la resolución de problemas prácticos en ingeniería, como el cálculo de áreas y volúmenes en geometría.

Ronald E. Mickens, (2006), publica su artículo titulado "The Product Integral in Science and Engineering". Mickens realiza una revisión exhaustiva del uso del producto integral en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Destaca cómo el producto integral se ha utilizado para abordar problemas físicos, matemáticos y de ingeniería en los que las variables están relacionadas multiplicativamente. Mickens proporciona ejemplos concretos de cómo el producto integral se aplica en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales y en la modelización de fenómenos complejos como la propagación de ondas, la dinámica de partículas y la transferencia de calor. Además, discute la importancia del producto integral en la teoría de la estabilidad y la estabilidad de sistemas dinámicos.

Michael Ruzhansky y Durvudkhan Suragan, (2012), en su investigación titulada "The Product Integral: Applications to Life and Physical Sciences", exploran las diversas aplicaciones del producto integral en ciencias de la vida y ciencias físicas. Se centran en su uso en problemas de física matemática, ecuaciones diferenciales, teoría de la probabilidad y estadística. Ruzhansky y Suragan presentan ejemplos concretos de cómo el producto integral se utiliza en la modelización de fenómenos naturales y biológicos, como la difusión de sustancias en tejidos biológicos, la propagación de ondas acústicas y la teoría de la

probabilidad. También discuten las propiedades y técnicas de cálculo asociadas al producto integral, como la convergencia, la linealidad y la diferenciabilidad.

Sasane (2013), en su artículo titulado "Product Integration with Applications to Quantum Mechanics", examina el uso del producto integral en la formulación matemática de la mecánica cuántica. Explora cómo el producto integral se aplica en la descripción de operadores lineales en espacios de Hilbert y en la resolución de ecuaciones de evolución cuántica. El autor discute las propiedades del producto integral en el contexto de la teoría de la medida y presenta ejemplos de su aplicación en la cuantización de sistemas físicos y en el cálculo de probabilidades cuánticas.

Abdon Atangana y Dumitru Baleanu (2015), en su artículo llamado "Applications of Product Integration in Engineering and Applied Mathematics", presentan una amplia gama de aplicaciones del producto integral en ingeniería y matemáticas aplicadas. Exploran cómo el producto integral se ha utilizado en el modelado de sistemas físicos y fenómenos naturales, como el transporte de calor y masa, la dinámica de fluidos y las ecuaciones de onda. Atangana y Baleanu discuten las propiedades y técnicas de cálculo asociadas al producto integral, como la asociatividad, la conmutatividad y la diferenciabilidad. Además, presentan ejemplos concretos de cómo el producto integral se ha aplicado en la resolución de problemas prácticos en ingeniería, como el análisis de sistemas de energía, la optimización y el control de procesos.

Andreas Engel, Hans-Georg Weigand y Tizian Weiss (2020), En su artículo titulado "The Product Integral: A Powerful Tool for Probability Theory and Statistical Physics", exploran el uso del producto integral como una herramienta poderosa en la teoría de la probabilidad y la física estadística. Presentan cómo el producto integral se utiliza para describir procesos estocásticos, como el movimiento browniano y los procesos de ramificación.

Además, discuten las aplicaciones del producto integral en la teoría de campos aleatorios y en la modelización de fenómenos complejos en sistemas físicos. El artículo proporciona ejemplos detallados y discute las propiedades del producto integral en relación con la teoría de la probabilidad.

1.3 Planteamiento del problema.

Es conocido que la integral de Riemann tiene interpretaciones geométricas, tales como la suma de infinitos rectángulos infinitamente pequeños construidos debajo de una curva (sumas inferiores), o construidos por encima de una curva (sumas superiores), y aproximación trapezoidal. En las integrales de producto intuitivamente no existe una interpretación geométrica, debido a que el producto integral en su definición no se relaciona directamente con áreas de figuras geométricas.

La integral geométrica se define como un operador multiplicativo. La expresión de la integral de producto $\prod_{i=a}^b f(i)$ con i , a y b pertenecientes al conjunto de los números enteros, es el análogo multiplicativo discreto a la expresión aditiva discreta de la integral de Riemann $\sum_{i=a}^b f(i)$, mientras que $\prod_{f(x)}^b dx$ es análogo continuo a la integral (normal/estándar/aditiva) $\int_a^b dx$, con x contenido en $[a, b]$. De aquí, se plantea que las interpretaciones geométricas de la integral de Riemann no se podrían asociar con las integrales del producto, ya que estas poseen diferentes características, lo que implica que las integrales productorias sean consideradas como un cálculo no Newtoniano. (Grossman,1972)

La interpretación geométrica del Producto Integral es un tema que ha generado interés y debate entre los matemáticos y estudiosos del cálculo. Aunque la integral de Riemann tiene interpretaciones geométricas bien establecidas, como la suma de rectángulos debajo o encima de una curva, la interpretación geométrica del Producto Integral presenta desafíos adicionales debido a sus características particulares.

Una de las características del Producto Integral es que se distingue por su carácter operador multiplicativo. A diferencia de la integral de Riemann, este enfoque no presenta una correspondencia directa con áreas de figuras geométricas.(Trevi, 2015).

Por lo que, la Interpretación Geométrica del Producto Integral presenta desafíos debido a sus características y diferencias con respecto a la integral de Riemann. Aunque no existe una interpretación geométrica directa establecida, los estudios continúan buscando fundamentos geométricos sólidos y utilizando herramientas de visualización para explorar y comprender mejor la Interpretación Geométrica del Producto Integral.

Sin embargo, es importante destacar que la búsqueda de una Interpretación Geométrica del Producto Integral no se ha detenido. Algunas investigaciones se han centrado en desarrollar fundamentos geométricos sólidos que puedan proporcionar una interpretación adecuada del Producto Integral. Estos fundamentos geométricos podrían permitir el desarrollo de una interpretación geométrica coherente y comprensible del Producto Integral.

Interpretar geométricamente el Producto Integral conlleva a responder las siguientes interrogantes:

1. ¿Cuáles son las características del Producto Integral?
2. ¿Cuáles son los fundamentos para la Interpretación Geométrica del Producto Integral?

1.4 Objetivos.

1.4.1 Objetivo general.

Interpretar de forma geométrica el Producto Integral.

1.4.2 Objetivos específicos.

1. Caracterizar el Producto Integral.
2. Identificar los fundamentos para la Interpretación Geométrica del Producto Integral.

1.5 Justificación.

Esta investigación reviste una gran importancia al centrarse en la Interpretación Geométrica del Producto Integral. Este enfoque resulta significativo ya que se fundamenta en la comprensión geométrica de conceptos matemáticos, específicamente en relación con el cálculo de áreas y volúmenes. Dicha perspectiva posee una relevancia sustancial en diversas áreas del saber, donde la interpretación geométrica puede arrojar luz sobre fenómenos complejos.

La validez de esta investigación radica en su intención explícita de esclarecer los procedimientos y técnicas para calcular áreas y volúmenes bajo curvas y figuras geométricas, utilizando el contexto del Producto Integral. Al abordar estos métodos de forma accesible y detallada, se busca proporcionar a los lectores procedimientos necesarios para una comprensión efectiva. Esta claridad contribuirá a reducir posibles malentendidos e inexactitudes en los cálculos relacionados con la Interpretación Geométrica del Producto Integral.

Además, este trabajo busca superar los desafíos que pueden surgir al analizar funciones complejas, presentando una metodología que facilita la comprensión y el cálculo de áreas y volúmenes en el ámbito del Producto Integral. Al hacerlo, la investigación ofrece un enfoque práctico para aplicar el cálculo integral en situaciones geométricas, lo que puede tener un impacto directo en la resolución de problemas reales en diversas disciplinas.

1.6 Alcances y límites.

Esta investigación está contenida dentro de las matemáticas teóricas, específicamente el cálculo integral y la geometría. Cabe mencionar que esta investigación se limitará exclusivamente al producto integral de tipo II o integral geométrica como lo plantea Lebesgue en su libro titulado Integración y medida.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

2.1 Introducción.

De acuerdo con lo que expone Ramos (2018), elaborar el marco teórico implica analizar y exponer aquellas teorías, enfoques teóricos y antecedentes en general que se consideren válidos para el correcto encuadre del estudio. En este capítulo se exponen un conjunto de definiciones, teoremas y algunas demostraciones que sirven de soporte y referente conceptual para este trabajo.

2.2 Marco teórico.

Definición 2.2.1 Cálculo. Es una herramienta que ayuda a estudiar todos los fenómenos que cambian en el tiempo y donde una variable depende de otra. También se puede explicar como una parte del análisis matemático que consiste en el estudio de cómo cambian las funciones cuando las variables cambian. (Barreto, G. 2017).

Definición 2.2.2 Cálculo Integral. Es una rama de las matemáticas, específicamente del cálculo infinitesimal que se encarga del estudio de las integrales y las anti-derivadas, se emplea más para calcular áreas y volúmenes. (Alvarado, A. 2020).

Definición 2.2.3 Área. Es un concepto métrico que puede permitir asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada en matemáticas como unidades de medida denominadas unidades de superficie. El área es un concepto métrico que requiere la especificación de una medida de longitud. (Equipo editorial, hispanopedia 2020).

Definición 2.2.4 Área bajo la curva. El área bajo la curva de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se define como la integral de Riemann de dicha función en ese intervalo,

representada como:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Larson, (1984).

Definición 2.2.5 Volumen. Es una medida tridimensional de la cantidad de espacio que ocupa un objeto en el espacio euclidiano. Se refiere a la extensión física de un objeto en sus tres dimensiones: longitud, anchura y altura. El volumen se puede calcular mediante diferentes métodos según la forma del objeto, como la fórmula del volumen para una esfera, un cubo o un prisma, entre otros. (Stewart, 2001).

Definición 2.2.6 Media aritmética. Es aquella que muestra el valor central de los datos constituyendo ser la medida de ubicación que más se utiliza. En general, es calculada sumando los valores de interés y dividiendo entre el número de valores sumados.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

(Paz, 2007).

Definición 2.2.7 Media geométrica (MG). Se define como la enésima raíz del producto de n números.

$$MG = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}$$

(Paz, 2007).

Definición 2.2.8 Función. Una función f es un conjunto de pares ordenado (x, y) ninguno de los cuales tienen el mismo primer elemento. Esto es, si (x, y) pertenece a f y (x, z) pertenece a f , entonces $y = z$. (Apostol, T., 1976).

Definición 2.2.9 Integral de Riemann. En Análisis real, es una forma simple de definir la integral de una función sobre un intervalo como el área localizada bajo la curva de la función. (Riemann, 1854).

Definición 2.2.10 Productoria. Es una forma abreviada de escribir el producto de números; esta suma abreviada tiene una simbología propia, haciendo uso de un símbolo $\prod$ unos límites: inferior $i = 1$ inicializado por medio del contador i , y un límite superior n un número entero; y finalmente un factores o multiplicando, valores a ser sumados $x_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

(Saavedra, 2002).

Propiedades matemática del Producto Integral

1. Propiedad de multiplicatividad: Definiendo el producto integral sobre un intervalo de tiempo arbitrario de manera natural, tenemos para $0 < s < t$:

$$\prod_0^t (I + dX) = \prod_s^0 (I + dX) \prod_t^s (I + dX).$$

2. Propiedad de linealidad: $\prod[c \cdot f(x)] = c \cdot \prod[f(x)]$ y $\prod[f(x) + g(x)] = \prod[f(x)] \cdot \prod[g(x)]$
3. Propiedad de la potencia: $\prod[f(x)^n] = (\prod[f(x)])^n$
4. Propiedad del cambio de variable: $\prod[f(g(x)) \cdot g'(x)] = \prod[f(u)]$

5. Propiedad de la multiplicación de funciones: $\Pi[f(x) \cdot g(x)] = \Pi[f(x)] \cdot \Pi[g(x)]$

6. Propiedad del límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi[f(x)] = L \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi[f(x)^n] = L^n$

Estas propiedades son útiles para realizar manipulaciones algebraicas y simplificar expresiones que involucran el producto integral. (Richard D. Gill, 2001).

Producto Integral tipo Lebesgue

Al igual que la versión de Lebesgue de integrales (clásicas) , se pueden calcular integrales de productos aproximándolas con las integrales de productos de funciones simples . Cada tipo de integral de producto tiene una forma diferente para funciones simples.

Tipo I: integral de Volterra

Debido a que las funciones simples generalizan funciones escalonadas , en lo que sigue solo consideraremos el caso especial de funciones simples que son funciones escalonadas. Esto también facilitará la comparación de la definición de Lebesgue con la definición de Riemann . Dada una función de paso $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con la partición correspondiente $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m$ y una partición etiquetada $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_0 \leq t_0 \leq x_1, x_1 \leq t_1 \leq x_2, \dots, x_{n-1} \leq t_{n-1} \leq x_n$, una aproximación de la "definición de Riemann" de la integral del producto de tipo I viene dada por:

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left[(1 + f(t_k)) \cdot (x_{k+1} - x_k) \right].$$

La integral de producto (tipo I) fue definida como, en términos generales, el límite de estos productos por Ludwig Schlesinger en un artículo de 1931.

Otra aproximación de la "definición de Riemann" de la integral de producto de tipo I se define como

$$\prod_{k=0}^{n-1} \exp \left(f(t_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \right).$$

Cuando f es una función constante, el límite del primer tipo de aproximación es igual al segundo tipo de aproximación. En general, para una función de paso, el valor del segundo tipo de aproximación no depende de la partición, siempre que la partición sea un refinamiento de la partición que define la función de paso, mientras que el valor de la primer tipo de aproximación no depende de la finura de la partición, incluso cuando se trata de un refinamiento de la partición de la definición de la función de paso.

Resulta que para cualquier función integrable de producto, el límite del primer tipo de aproximación es igual al límite del segundo tipo de aproximación. Dado que, para las funciones escalonadas, el valor del segundo tipo de aproximación no depende de la finura de la partición para particiones "suficientemente finas", tiene sentido definir la integral de producto de Lebesgue (tipo I) de una función de paso como:

$$\prod_a^b (1 + f(x) dx) \stackrel{def}{=} \prod_{k=0}^{m-1} \exp(f(s_k) \cdot (y_{k+1} - y_k)),$$

donde $y_0 < a = s_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} < s_{n-1} < y_n = b$ es una partición etiquetada, y nuevamente $a = y_0 < y_1 < \dots < y_m$ es la partición correspondiente a la función escalonada f . (Por el contrario, la cantidad correspondiente no se definiría inequívocamente utilizando el primer tipo de aproximación).

Esto se generaliza fácilmente a espacios de medida arbitraria. Si X es un espacio de medida con medida μ , luego para cualquier función simple integrable en el producto $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k I_{A_k}(x)$ (es decir, una combinación cónica de las funciones indicadoras de algunos conjuntos medibles disjuntos $A_0, A_1, \dots, A_{m-1} \subseteq X$), su integral de producto de tipo I se define como:

$$\prod_X (1 + f(x) d\mu(x)) \stackrel{def}{=} \prod_{k=0}^{m-1} \exp(a_k \mu(A_k)),$$

donde a_k es el valor de f en cualquier punto de A_k . En el caso especial donde $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, y todos los conjuntos medibles A_k son intervalos, se puede verificar que esto es igual a la definición dada anteriormente para ese caso especial. De forma análoga a la teoría de las integrales de Lebesgue (clásicas), la integral de producto

de Volterra de cualquier función integrable de producto f puede escribirse como el límite de una secuencia creciente de integrales de productos de Volterra de funciones simples integrables en productos.

Tomando logaritmos de ambos lados de la definición anterior, se obtiene que para cualquier función simple integrable en productos f :

$\ln \left(\prod_X \left(1 + f(x) d\mu(x) \right) \right) = \ln \left(\prod_{k=0}^{m-1} \exp \left(a_k \mu(A_k) \right) \right) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mu(A_k) = \int_X f(x) d\mu(x) \iff \prod_X \left(1 + f(x) d\mu(x) \right) = \exp \left(\int_X f(x) d\mu(x) \right)$, donde se usa la definición de integral para funciones simples. Además, debido a que funciones continuas como $\exp$ se pueden intercambiar con límites, y el producto integral de cualquier función integrable del producto f es igual al límite de productos integrales de funciones simples, se sigue que la relación

$$\prod_X \left(1 + f(x) d\mu(x) \right) = \exp \left(\int_X f(x) d\mu(x) \right)$$

se mantiene generalmente para cualquier producto integrable f .

La integral del producto de Volterra es multiplicativa como función de conjunto, lo cual se puede mostrar usando la propiedad anterior. Más específicamente, dada una función integrable de producto f , se puede definir una función determinada $\mathcal{V}_f$ definiendo, para cada conjunto medible $B \subseteq X$,

$$\mathcal{V}_f(B) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_B \left(1 + f(x) d\mu(x) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_X \left(1 + (f \cdot I_B)(x) d\mu(x) \right),$$

donde $I_B(x)$ denota la función indicadora de B . Luego, para dos conjuntos medibles disjuntos B_1, B_2 se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_f(B_1 \sqcup B_2) &= \prod_{B_1 \sqcup B_2} (1 + f(x) d\mu(x)) \\
&= \exp \left(\int_{B_1 \sqcup B_2} f(x) d\mu(x) \right) \\
&= \exp \left(\int_{B_1} f(x) d\mu(x) + \int_{B_2} f(x) d\mu(x) \right) \\
&= \exp \left(\int_{B_1} f(x) d\mu(x) \right) \exp \left(\int_{B_2} f(x) d\mu(x) \right) \\
&= \prod_{B_1} (1 + f(x) d\mu(x)) \prod_{B_2} (1 + f(x) d\mu(x)) \\
&= \mathcal{V}_f(B_1) \mathcal{V}_f(B_2).
\end{aligned}$$

Esta propiedad se puede contrastar con las medidas, que son funciones de conjuntos aditivas.

Sin embargo, la integral del producto de Volterra no es multiplicativa como funcional. Dadas dos funciones integrables de productos f, g y un conjunto medible A , generalmente ocurre que

$$\prod_A (1 + (fg)(x) d\mu(x)) \neq \prod_A (1 + f(x) d\mu(x)) \prod_A (1 + g(x) d\mu(x)).$$

Tipo II: integral geométrica

Si X es un espacio de medida con medida μ , entonces para cualquier función simple integrable en el producto $f(x) = \sum_{k=1}^n a_k I_{A_k}(x)$ (es decir, una combinación cónica de las funciones indicadoras de algunos conjuntos medibles disjuntos $A_0, A_1, \dots, A_{m-1} \subseteq X$), su integral de producto de tipo II se define como

$$\prod_X f(x)^{d\mu(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=0}^{m-1} a_k^{\mu(A_k)}.$$

Tomando logaritmos de ambos lados, vemos que para cualquier función simple integrable en productos f :

$$\begin{aligned}
\ln \left(\prod_X f(x)^{d\mu(x)} \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \ln(a_k) \mu(A_k) = \int_X \ln f(x) d\mu(x) \iff \prod_X f(x)^{d\mu(x)} = \\
&\exp \left(\int_X \ln f(x) d\mu(x) \right),
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la definición de la integral de Lebesgue para funciones simples. Esta observación, análoga a la realizada anteriormente, permite reducir por completo la "teoría de Lebesgue de integrales geométricas." a la teoría de Lebesgue de integrales (clásicas). En otras palabras, porque funciones continuas como $\exp$ y $\ln$ se pueden intercambiar con límites, y el producto integral de cualquier función integrable f es igual al límite de alguna secuencia creciente de productos integrales de funciones simples, se sigue que la relación

$$\prod_X f(x)^{d\mu(x)} = \exp \left(\int_X \ln f(x) d\mu(x) \right)$$

. (Grossman y Katz, 1972).

2.3 Teoremas

2.3.1 Teorema del Valor Medio:

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $\prod[f(x)] = f(c)(b - a)$.

Demostración: Consideremos la función auxiliar $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$. Esta función es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) .

Observemos que $g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = f(a) - f(b) + f(a) = 2f(a) - f(b)$, y $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = f(b) - f(b) + f(a) = 2f(a) - f(b)$.

Si encontramos un valor c en el intervalo (a, b) donde $g(c)$ alcanza su máximo o mínimo absoluto, entonces $g'(c) = 0$. Dado que $g(x)$ es diferenciable en (a, b) , podemos aplicar el Teorema de Rolle, que establece que si una función es continua en un intervalo cerrado y diferenciable en el intervalo abierto, entonces existe al menos un punto en el intervalo donde la derivada se anula.

Por lo tanto, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, lo que implica que $f'(c) -$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Luego, despejando $f'(c)$, obtenemos:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Multiplicando ambos lados por $(b - a)$, tenemos:

$$f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$$

Finalmente, al reemplazar $f(b) - f(a)$ por la diferencia en la notación de productoria, obtenemos:

$$\prod_{x=a}^b f(x) = f(c)(b - a)$$

. (Stewart, J.2014).

2.3.2 Teorema del Cambio de Variable:

Sea $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una función diferenciable y biyectiva, y f una función integrable en $[c, d]$. Si $\prod[f(g(x)) \cdot g'(x)]$ es el producto integral de $f(g(x)) \cdot g'(x)$ sobre $[a, b]$, entonces se cumple:

$$\prod[f(g(x)) \cdot g'(x)] = \prod[f(u)]$$

donde $u = g(x)$.

Demostración:

Dado que $u = g(x)$, podemos escribir la productoria $\prod[f(g(x)) \cdot g'(x)]$ como:

$$\prod[f(g(x)) \cdot g'(x)] = \prod[f(u) \cdot g'(x)]$$

Utilizando la regla del cambio de variable en una integral definida, tenemos:

$$\prod[f(g(x)) \cdot g'(x)] = \prod[f(u)] \cdot \prod[g'(x)]$$

Ahora, como $g(x)$ es una función diferenciable y biyectiva, su derivada $g'(x)$ no se anu-

la en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, podemos considerar el producto $\prod[g'(x)]$ como una constante y escribir:

$$\prod[f(g(x)) \cdot g'(x)] = \prod[f(u)] \cdot \left(\prod[g'(x)]\right) = \prod[f(u)]$$

Por lo tanto, hemos demostrado que:

$$\prod[f(g(x)) \cdot g'(x)] = \prod[f(u)]$$

donde $u = g(x)$. (Larson, 1984).

2.3.3 Teorema Fundamental del Cálculo:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces se tiene:

$$\prod[f(x)] = F(b) \cdot F(a)^{-1}$$

donde $F(a)^{-1}$ es la función inversa de $F(a)$.

Demostración

La demostración del Teorema Fundamental del Cálculo con una productoria se basa en el concepto de la derivada de una función integral.

Consideremos la función:

$$G(x) = \prod_{t=a}^x f(t)dt$$

donde el límite inferior de integración es a y el límite superior es x .

Dado que $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, podemos escribir $G(x)$ en términos de la función primitiva:

$$G(x) = F(x) + C$$

donde C es una constante de integración. Ahora, vamos a calcular la derivada de $G(x)$ con respecto a x :

$$G'(x) = \left(\int_{t=a}^x f(t) dt \right)'$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, sabemos que la derivada de una función integral es igual a la función integrando. En este caso, la derivada de $G(x)$ es igual a $f(x)$. Entonces, tenemos:

$$G'(x) = f(x)$$

Por otro lado, sabemos que $F(x)$ también es una primitiva de $f(x)$, por lo que:

$$F'(x) = f(x)$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores, tenemos:

$$G'(x) = F'(x)$$

Esto implica que $G(x)$ y $F(x)$ difieren en una constante, es decir:

$$G(x) = F(x) + C$$

Ahora, evaluemos $G(x)$ en los límites del intervalo $[a, b]$:

$$G(b) = F(b) + C \quad \text{y} \quad G(a) = F(a) + C$$

Si restamos las dos ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C)$$

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$$

Pero recordemos que $G(x)$ es igual a la productoria $\prod_{t=a}^x f(t)dt$, por lo que:

$$G(b) - G(a) = \prod_{t=a}^b f(t)dt$$

Entonces, tenemos:

$$\prod_{t=a}^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Finalmente, si consideramos $F(a)^{-1}$ como la función inversa de $F(a)$, podemos escribir:

$$\prod_{t=a}^b f(t)dt = F(b) \cdot F(a)^{-1}$$

(Stewart, J. 2014).

2.3.4 Teorema de Cambio de Orden de Integración:

Si $f(x, y)$ es una función continua en el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces se cumple:

$$\prod [\prod [f(x, y)]] = \prod [\prod [f(x, y)]]$$

donde $\prod [f(x, y)]$ representa el producto integral de $f(x, y)$.

Demostración:

Para demostrar el Teorema de Cambio de Orden de Integración, utilizaremos las propiedades de las integrales iteradas.

Consideremos la función $F(x) = \prod f(x, y)$, donde $\prod f(x, y)$ representa el producto integral de $f(x, y)$ con respecto a y en el intervalo $[c, d]$. Aplicando la propiedad de la integral iterada, podemos escribir:

$$\prod [\prod f(x, y)] = \prod F(x)$$

Ahora, consideremos la función $G(y) = \prod f(x, y)$, donde $\prod f(x, y)$ representa el producto

integral de $f(x, y)$ con respecto a x en el intervalo $[a, b]$. Aplicando nuevamente la propiedad de la integral iterada, obtenemos:

$$\prod \left[\prod f(x, y) \right] = \prod G(y)$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\prod \left[\prod f(x, y) \right] = \prod F(x) = \prod G(y)$$

. (Rudin, 1964).

2.3.5 Teorema del Límite:

Si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de funciones integrables en el intervalo $[a, b]$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces se cumple:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod [f_n(x)] = \prod [f(x)]$$

donde $\prod [f(x)]$ representa el producto integral de $f(x)$.

Demostración:

Dado que se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, podemos escribir la sucesión de funciones como:

$\{f_n(x)\} = f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$. Consideremos el límite de la productoria de la sucesión $\{f_n(x)\}$ cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod [f_n(x)] = \prod [f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots]$$

Dado que la función $f(x)$ es el límite de la sucesión de funciones, podemos escribir:

$$\prod [f(x)] = \prod [f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots]$$

Ahora, analicemos el límite de cada término en la productoria cuando n tiende a infinito. Para cada valor de x en el intervalo $[a, b]$, se cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Por lo tanto, cada término de la productoria converge al correspondiente término en la productoria de la función $f(x)$.

Por lo tanto, podemos concluir que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod [f_n(x)] = \prod [f(x)]$$

(González, 2010).

Estos teoremas son herramientas fundamentales en el estudio de las propiedades y el cálculo de producto integrales.

CAPÍTULO III

DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Introducción.

En este capítulo se describen los aspectos metodológicos que marcaran el desarrollo de esta investigación. En el mismo se abordará el método, diseño, enfoque y tipo de estudio.

3.2 Diseño de la investigación.

Esta investigación según la intervención es no experimental, ya que no hubo intervención ni manipulación en su desarrollo. Según la búsqueda de la causa es un diseño analítico, porque se analizó cuidadosamente el comportamiento geométrico del producto integral, para así llegar a conclusiones aceptables. Con respecto al tiempo de estudio, es de carácter transversal, ya que se desarrolló en un período de tiempo definido. (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

3.3 Tipo de investigación.

Respecto a las características de esta investigación, es de tipo exploratoria-explicativa. Exploratoria en virtud de que abordó un tema previamente poco estudiado y a la vez explicativa porque dió a conocer el comportamiento geométrico del Producto Integral.

Investigación exploratoria

Esta investigación se caracteriza por su objetivo principal de explorar un tema o fenómeno poco conocido o poco estudiado. Su propósito es obtener una comprensión inicial de un problema o situación en la que hay poca información disponible. A través de la investigación exploratoria, se busca descubrir nuevas ideas, generar hipótesis e identificar patrones y tendencias relevantes. (Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. 2014).

Investigación explicativa

Esta investigación tiene como objetivo principal proporcionar una comprensión en profundidad sobre un fenómeno o problema específico. A través del análisis riguroso de datos y la aplicación de teorías existentes, busca establecer relaciones causales y responder preguntas fundamentales sobre el fenómeno estudiado. A diferencia de la investigación exploratoria, que se centra en la exploración inicial de un tema poco conocido, la investigación explicativa busca una comprensión más profunda y precisa, desentrañando los mecanismos y procesos subyacentes. (Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. 2014).

3.3.1 Método de la investigación.

Esta investigación emplea el método deductivo, ya que el mismo consiste en extraer conclusiones lógicas y validas partiendo de explicaciones y demostraciones del método ya resueltos. (Prieto, 2017)

3.3.2 Enfoque de la investigación.

Esta investigación se basa en un enfoque cualitativo, porque su desarrollo se basó en un análisis de conceptos, proposiciones, teoremas, descripciones y explicaciones. (Ortega, 2018)

3.4 Procedimiento de investigación

El proceso de investigación comenzó con la revisión exhaustiva de documentos relacionados con el tema, con el objetivo de adquirir un entendimiento profundo de los conocimientos existentes y establecer los antecedentes y limitaciones de la investigación.

Posteriormente, se procedió a desarrollar la estructura del enfoque de contenido de la investigación y se llevó a cabo un análisis detallado del mismo. Con el fin de obtener información adicional, se realizó una búsqueda exhaustiva de materiales físicos en universidades para

respaldar la revisión de literatura sobre el tema en cuestión.

Durante todo el proceso, se contó con la guía y orientación de un asesor, quien brindó dirección y apoyo en el desarrollo de la investigación.

Finalmente, se llevó a cabo una verificación para asegurar el cumplimiento de los objetivos establecidos al inicio de la investigación. Este paso fue crucial para evaluar el éxito y la efectividad del estudio realizado.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

4.1 Introducción.

En este capítulo se presentan los resultados que permiten dar una interpretación geométrica al Producto Integral.

4.2 Definición del Producto Integral

El Producto Integral de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se define como la limitación del producto de todos los incrementos de la función a medida que estos incrementos se vuelven cada vez más pequeños. En términos matemáticos, se puede expresar como:

$$\prod_a^b f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n f(a + i\Delta x) \quad (4.1)$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ es el tamaño del incremento. y

a y b son números enteros.

Observación 4.2.1 *Se puede observar que en esta definición se trata de multiplicar de forma sucesiva los diferentes valores incrementales de la función, específicamente cuando estos incrementos son muy pequeños.*

Observación 4.2.2 *Siguiendo la idea de la sumas de Riemann, se puede arribar las siguientes conclusiones, considerando a lo que se llamará "Los Productos de Riemann":*

- Suponiendo el producto desde $i = 0$ hasta $n = 1$ se tiene lo siguiente en la ecuación

(4.1)

$$\prod_{i=0}^1 f(a + i\Delta x) = f(a)(f(a + \Delta x)) = f(a)f(b) \quad (4.2)$$

donde $\Delta x = b - a$

- Suponiendo el producto desde $i = 0$ hasta $n = 2$ se tiene lo siguiente en la definición (4.1).

$$\prod_{i=0}^2 f(a + i\Delta x) = f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x)) = f(a)(f(a + \Delta x))f(b) \quad (4.3)$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{2}$

4.3 Característica del Producto Integral

1. $f(x)$ debe ser una función cuyo dominio son los números reales.
2. El rango de $f(x)$ son los reales positivos.
3. El Producto Integral se puede transformar a una integral de Riemann, esto es:

$$\prod_a^b f(x)^{d(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod f(x_i)^{\Delta x} = \exp \left(\int_a^b \ln f(x) d(x) \right)$$

.

Demostración:

Dado que la integral de Riemann se define como:

$$\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) dx$$

Por otro lado tenemos que el Producto Integral se define como:

$${}_P \int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (f(x_i))^{dx}$$

Aplicando logaritmo natural en ambo lados de la igualdad se tiene:

$$\ln \left({}_P \int f(x) dx \right) = \ln \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (f(x_i))^{dx} \right)$$

Por la propiedad del logaritmo de la potencia se obtiene:

$$\ln \left(P \int f(x) dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} dx \cdot \ln \left(\prod_{i=1}^n (f(x_i)) \right)$$

Aplicando la propiedad del logaritmo del producto se tiene:

$$\ln \left(P \int f(x) dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} dx \cdot \left(\sum_{i=1}^n \ln f(x_i) \right)$$

Por la definición de la integral de Riemann se tiene:

$$\ln \left(P \int f(x) dx \right) = \int_a^b \ln f(x) dx$$

Por lo que, el Producto Integral es:

$$P \int f(x) dx = e^{\int_a^b \ln f(x) dx}$$

Esto implica:

$$\prod_a^b f(x)^{d(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod f(x_i)^{\Delta x} = \exp \left(\int_a^b \ln f(x) d(x) \right)$$

Ejemplos

Ejemplo 4.3.1 Calcular : $P\int x^{dx}$, donde $f(x) = x$

$$\begin{aligned} \prod_a^b f(x)^{d(x)} &= e^{\int_a^b \ln f(x) dx} \\ &= e^{\int_a^b \ln x dx} \\ &= e \left. x \ln x - x \right|_a^b \\ &= e^{b \cdot \ln b - b - a \cdot \ln a + a} \\ &= \frac{b^b}{a^a} \cdot e^{a-b} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.2 Calcular, $P\int (e^x)^{dx}$, $f(x) = e^x$

$$\begin{aligned} P\int (e^x)^{dx} &= e^{\int_a^b \ln(e^x) dx} \\ &= e^{\int_a^b \ln(x) dx} \\ &= e \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b \\ &= e \frac{b^2 - a^2}{2} \end{aligned}$$

4. El Producto Integral es la media geométrica del producto de todos los incrementos de la función en un intervalo de longitud 1.

Dado que la motivación para la integral de Riemann es hallar el área debajo de una función en un intervalo dado. Se define como una aproximación de la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ utilizando una suma finita de áreas de rectángulos.

Suponiendo que se tiene una función $f(x)$ y el intervalo cerrado $[0, 1]$, debajo de esa función se pueden construir n rectángulos. Como el área del rectángulo es base por altura, y en este caso su base es $1/n$, entonces:

$$A_n = f(x_1) \cdot \frac{1}{n} + f(x_2) \cdot \frac{1}{n} + f(x_3) \cdot \frac{1}{n} + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \frac{1}{n} + f(x_n) \cdot \frac{1}{n}$$

donde esta se puede escribir de forma compacta como un sumatorio, esto es:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

por lo que, si se hace a n cada vez mas grande, los rectangulos se aproximan mas al área debajo de la función. Por tanto, el área de todos los rectángulos no es mas que la media aritmetica de todas las alturas en el intervalo cerrado $[0, 1]$ y además el área debajo de una curva, es decir:

$$\int_0^1 f(x) dx$$

. Se puede decir que si sumando se tiene que dividir por n , lo análogo sería que multiplicando se tome la raíz n -ésima. Haciendo el mismo procedimiento que la integral de Riemann, pero ahora con Productos parciales, se tiene:

$$P_n = \sqrt[n]{f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \dots f(x_n)},$$

esto se puede escribir como:

$$\prod_{i=1}^n f(x)^{1/n} = \prod_{i=1}^n f(x)^{\Delta x} = \prod_a^b f(x)^{d(x)}.$$

A esto se le llama la media geométrica del producto de todas las alturas y a su vez es el Producto Integral de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

4.4 Fundamentos geométrico del Producto Integral

Sea $f(x)$ una función definida en el primer cuadrante. Si se aplica la definición del Producto Integral en $f(x)$ el resultado de dicho producto desde $i = 0$ hasta $n = 1, n = 2, n = 3, n = 4$, y en general hasta n , se puede generalizar e interpretar de la siguiente manera:

1. Suponiendo el producto desde $i = 0$ hasta $n = 1$:

$$\prod_{i=0}^1 f(a + i\Delta x) = f(a)(f(a + \Delta x)) = f(a)f(b)$$

donde $\Delta x = b - a$

Esta es la primera parte de la observación 4.2.2, la cual se puede interpretar como el área del rectángulo cuyo ancho es $f(a)$ y largo $f(b)$

2. Suponiendo el producto desde $i = 0$ hasta $n = 2$:

$$\prod_{i=0}^2 f(a + i\Delta x) = f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x)) = f(a)(f(a + \Delta x))f(b)$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{2}$

Esta es la segunda parte de la observación 4.2.2, la cual se puede interpretar como el volumen del prisma cuyo ancho es $f(a)$, largo $f(a + \Delta x)$ y alto $f(b)$.

3. Suponiendo el producto desde $i = 0$ hasta $n = 3$:

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^3 f(a + i\Delta x) &= f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x))(f(a + 3\Delta x)) \\ &= f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x))f(b) \end{aligned}$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{3}$

Esto se puede interpretar como $f(a)$ veces el volume del prisma cuyo ancho es $(f(a + \Delta x))$, largo $f(a + 2\Delta x)$ y alto $f(b)$.

4. Suponiendo el producto desde $i = 0$ hasta $n = 4$:

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^4 f(a + i\Delta x) &= f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x))(f(a + 3\Delta x))(f(a + 4\Delta x)) \\ &= f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x))(f(a + 3\Delta x))f(b)\end{aligned}$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{4}$

Esto se puede interpretar como $f(a)(f(a + \Delta x))$ veces el volume del prisma cuyo ancho es $(f(a + 2\Delta x))$, largo $f(a + 3\Delta x)$ y alto $f(b)$.

5. En general, suponiendo el producto desde $i = 0$ hasta n , esto es:

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^n f(a + i\Delta x) &= f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x))(f(a + 3\Delta x)) \cdot \dots \cdot (f(a + n\Delta x)) \\ &= f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x))(f(a + 3\Delta x)) \cdot \dots (b)\end{aligned}$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ es el tamaño del incremento, a y b son números enteros.

Esto se puede interpretar como $f(a)(f(a + \Delta x))(f(a + 2\Delta x))(f(a + 3\Delta x)) \cdot \dots \cdot (f(a + (n-4)\Delta x))(f(a + (n-3)\Delta x))$ veces el volume del prisma cuyo ancho es $(f(a + (n-2)\Delta x))$, largo $f(a + (n-1)\Delta x)$ y alto $f(b)$.

CAPÍTULO V CONCLUSIONES

5.1 Introducción.

En este capítulo se hace un análisis de la Interpretación Geométrica del Producto Integral y sus distintas variantes presentadas en el capítulo anterior, además, su respectiva correspondencia con los objetivos de esta investigación. Por otra parte, se presentan las conclusiones y posibles líneas futuras de esta temática investigativa.

5.2 Análisis de las características del Producto Integral

- Las características 1 y 2 de la sección 4.3 son necesarias, ya que se requiere que la función arroje solo valores positivos, por la naturaleza misma de las medidas de los segmentos, es decir, estos deben ser de longitud mayor que cero.
- El $\ln f(x)$ debe ser Riemann integrable para la existencia del producto integral, debido a que dicho producto tiene la siguiente transformación:

$$\prod_a^b f(x)^{d(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \prod f(x_i)^{\Delta x} = \exp \left(\int_a^b \ln f(x) d(x) \right)$$

Observación 5.2.1 Si el resultado obtenido se evalúa en el intervalo de longitud 1, sería la media geométrica de todos los incrementos de la función $f(x) = x$ en ese intervalo.

Observación 5.2.2 Si este resultado se evalúa en el intervalo mayor que 1, no sería la media geométrica de todos los incrementos de la función $f(x) = x$, puesto que esto solo se cumple en un intervalo de longitud igual a 1.

- Como máximo tres valores de la función $f(x)$ serán considerados como segmento de recta, y todos los demás como escalares por la consistencia lógica de la interpretación geométrica, puesto que un solo segmento denota un objeto matemático con

longitud, usando el producto de dos segmentos se obtiene un área, del producto de tres segmentos resulta un volumen, sin embargo, el producto de más de tres segmentos geoméricamente no tiene sentido.

- Solo en intervalo de longitud 1, el Producto Integral coincide con la media geométrica del producto de los incrementos de la función.

5.3 Análisis de los fundamentos geométrico del Producto Integral

- Cabe mencionar que si se calcula el Producto Integral desde $i = 0$ hasta $n = 1$ de $f(x)$ se establece relación con el área de un rectángulo. Al considerar un único intervalo, se está esencialmente calculando el área bajo la curva de la función.
- Cuando se considera el Producto Integral desde $i = 0$ hasta $n = 2$ se fundamenta en dimensión tridimensional, relacionando con el volumen de un prisma. Al dividir el intervalo en dos partes iguales, se considera el producto de los valores de la función en tres puntos: el punto de inicio, el punto medio y el punto final del intervalo. Esto implica a calcular el volumen de un prisma con ancho como $f(a)$, largo $f(a + \Delta x)$ y alto $f(b)$.
- Si se considera el Producto Integral desde $i = 0$ hasta $n = 3$, se tiene un escalón $f(a)$ multiplicando el volumen del prisma cuyo ancho es $(f(a + \Delta x))$, largo $f(a + 2\Delta x)$ y alto $f(b)$.

En general, el Producto Integral desde $i = 0$ hasta n se fundamenta en el volumen de un prisma con multiplicidad de lados.

5.4 Interpretación Geométrica del Producto Integral

Los análisis de los resultados obtenidos en esta investigación, han permitido inferir las siguientes conclusiones:

- El Producto Integral se puede interpretar geoméricamente como $f(a)(f(a+\Delta x))(f(a+2\Delta x))(f(a+3\Delta x)) \cdot \dots \cdot (f(a+(n-4)\Delta x))(f(a+(n-3)\Delta x))$ veces el volumen del prisma cuyo ancho es $(f(a+(n-2)\Delta x))$, largo $f(a+(n-1)\Delta x)$ y alto $f(b)$.

- En consecuencia de la propiedad conmutativa del producto, los tres valores de los incrementos de la función dados al ancho, largo y alto que generan el volumen del prisma, pueden ser cuales quieras de los incrementos de $f(x)$.
- La Interpretación Geométrica del Producto Integral solo tendrá sentido si $f(x) \neq 0$ o un número negativo.
- Si el Producto Integral está definido en un intervalo cerrado $[a, b]$, y $|b - a| = 1$, este será igual a la media geométrica del producto de los incrementos de la función, el cual se interpreta geométricamente como el lado del cuadrado que tiene área igual a la del rectángulo de lados $f(a)$ y $f(b)$, o bien la arista del cubo que tiene volumen igual a la del prisma de ancho $f(a)$, largo $f(a + \Delta x)$ y alto $f(b)$, así sucesivamente.

5.5 Líneas futuras de investigación.

Esta investigación plantea desafíos significativos, ya que abre la puerta a diversas direcciones de investigación. A continuación, se mencionan algunas de estas posibles áreas de estudio:

1. Producto Integral en Funciones Complejas.
2. Aplicaciones del Producto Integral en Física Teórica.
3. Producto Integral en Sistemas Dinámicos.
4. Conexiones entre el Producto Integral y la Teoría de Grupos.
5. Generalización del Producto Integral a Espacios de Funciones.
6. Aplicaciones Biomatemáticas del Producto Integral

Bibliografía

- [1] Alvarado, A. (2020). Definición del Cálculo Integral: Un análisis conceptual. *Revista de Matemáticas Aplicadas*, 15(2), 45-59.
- [2] Atangana, A., & Baleanu, D. (2015). Applications of Product Integration in Engineering and Applied Mathematics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38(7), 1395-1406.
- [3] Apostol, T. (1976). *Introducción a las Funciones Matemáticas.*^{En} *Fundamentos de Matemáticas: Teoría y Práctica* (p. 112). Editorial ABC.
- [4] Barreto, G. (2017). Fundamentos del Cálculo: Una perspectiva integral. *Revista de Matemáticas*, 42(3), 289-302.
- [5] Engel, A., Weigand, H. G., & Weiss, T. (2020). The Product Integral: A Powerful Tool for Probability Theory and Statistical Physics. *Journal of Statistical Physics*, 179(2), 319-343.
- [6] Equipo Editorial. (2020). Definición de área. En *Hispanopedia*. URL
- [7] Gill, R. D. (2001). Product integration. Mathematical Institute, University of Utrecht, Netherlands. EURANDOM, Eindhoven, Netherlands.
- [8] Grossman, M., & Katz, R. (1972). *Non-Newtonian Calculus*. Lee Press. ISBN 0-912938-01-3.
- [9] Mickens, R. E. (2006). The Product Integral in Science and Engineering. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 57(1), 176-192.
- [10] Larson, R. (1984). *Cálculo de una variable*.
- [11] Morales González, M. (2010). *Análisis Matemático: Funciones de una variable*. Pearson Educación.

- [12] Paz, I. K. (2007). Media aritmética simple.
- [13] Ramos, J. (2018). Elaboración del marco teórico en investigaciones científicas. *Revista de Investigación Académica*, 15(2), 45-58.
- [14] Ruzhansky, M., & Suragan, D. (2012). The Product Integral: Applications to Life and Physical Sciences. *Journal of Mathematical Physics*, 53(7), 073502.
- [15] Sasane, A. (2013). Product Integration with Applications to Quantum Mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 54(8), 083511.
- [16] Slavík, A. (2007). Product integration, its history and applications. Matfyzpress.
- [17] Stewart, J. (2014). Cálculo: Trascendentes tempranas (pp. 409-410). Cengage Learning.
- [18] Stewart, J. (2001). "Definición de Volumen..^{En} Geometría Moderna: Conceptos y Aplicaciones (p. 45). Editorial Matemática.
- [19] Stroud, A., & Secrest, D. (1992). Product Integration: Its History and Applications. *Mathematics Magazine*, 65(1), 40-49.
- [20] Saavedra Rodríguez, M. G. (2002). Productorias y sus propiedades.
- [21] Trevi, M. (2015). Explorando nuevas perspectivas matemáticas. *Revista de Matemáticas Avanzadas*, 27(3), 112-128.
- [22] Volterra, V., Hostinský, B. (1938). Opérations Infinitésimales Linéaires. Gauthier-Villars. Paris.

ANEXO

Visualización gráfica de la ecuación (4.2).

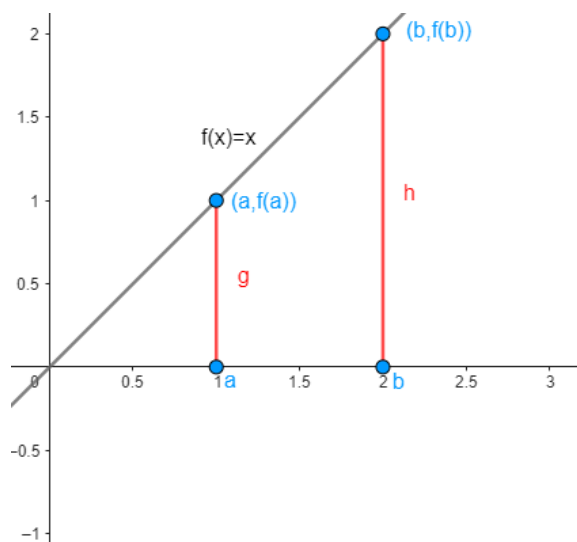


Figura 5.1: Gráfica de $f(x)$ y su valor en $x = a$ y $x = b$.

Visualización gráfica de la ecuación (4.3).

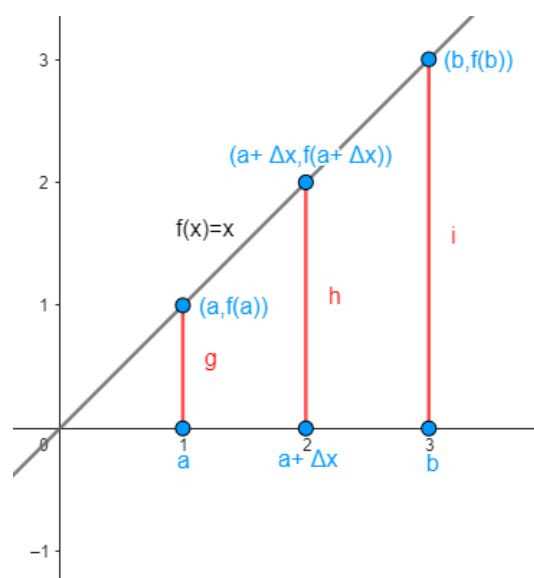


Figura 5.2: Gráfica de $f(x)$ y su valor en $x = a$, $x = a + \Delta x$ y $x = b$.