

República Dominicana  
**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)**  
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada  
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en  
Matemáticas

**Título**

Análisis de las propiedades de recurrencia para sistemas dinámicos lineales desde la  
perspectiva de la teoría ergódica.

**Sustentante**

Ana Dolores Cruz Rosa

---

**Asesor**

MA. Leomar Antonio Reyes Abreu

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

## **TÍTULO**

ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES DE RECURRENCIA PARA SISTEMAS  
DINÁMICOS LINEALES DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA  
ERGÓDICA.

## **Declaración de Autoría**

Los conceptos emitidos en este trabajo de investigación son de la exclusiva responsabilidad de la autora. Las citas y referencias bibliográficas se han realizado respetando los derechos de autor, liberando a la UTECO de cualquier responsabilidad, sin embargo, para la reproducción total o parcial de este trabajo, es necesaria su autorización.

## **Título**

Análisis de las propiedades de recurrencia para sistemas dinámicos lineales desde la perspectiva de la teoría ergódica.

Proyecto de Postgrado presentado por Ana Dolores Cruz Rosa para optar por el título de Maestría en Matemáticas

## **Composición del tribunal**

---

Jurado de metodología

---

Jurado de Redacción

---

Jurado de Contenido

**Lic. Yuderka Reyes**

---

Directora de Postgrado

**CALIFICACIÓN FINAL:**\_\_\_\_\_

# Índice general

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Declaración de autoría . . . . .                                       | III       |
| Agradecimientos.....                                                   | VI        |
| Dedicatorias.....                                                      | VII       |
| Resumen.....                                                           | IX        |
| <b>CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.</b>                                       | <b>1</b>  |
| 1.1 Introducción. . . . .                                              | 1         |
| 1.2 Antecedentes . . . . .                                             | 1         |
| 1.2.1 Antecedentes históricos de la Recurrencia Lineal . . . . .       | 1         |
| 1.2.2 Antecedentes históricos de los sistemas dinámicos lineales . . . | 2         |
| 1.2.3 Antecedentes históricos de la teoría ergódica . . . . .          | 3         |
| 1.2.4 Antecedentes académicos . . . . .                                | 4         |
| 1.3 Planteamiento del problema. . . . .                                | 7         |
| 1.4 Justificación. . . . .                                             | 9         |
| 1.5 Objetivos. . . . .                                                 | 9         |
| 1.5.1 General. . . . .                                                 | 9         |
| 1.5.2 Específicos. . . . .                                             | 10        |
| 1.6 Alcances y límites . . . . .                                       | 10        |
| <b>CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL.</b>                                 | <b>11</b> |
| 2.1 Introducción. . . . .                                              | 11        |
| 2.2 Marco Teórico . . . . .                                            | 11        |
| 2.2.1 Fundamentos de los espacios de medida . . . . .                  | 11        |
| 2.2.2 Medidas invariantes . . . . .                                    | 13        |
| 2.2.3 Sistemas dinámicos . . . . .                                     | 15        |
| 2.2.4 Recurrencia . . . . .                                            | 17        |
| 2.2.5 Teoría Ergódica . . . . .                                        | 22        |
| <b>CAPÍTULO III. METODOLOGÍA</b>                                       | <b>32</b> |
| 3.1 Introducción . . . . .                                             | 32        |
| 3.2 Marco metodológico . . . . .                                       | 32        |

|                                                       |                                                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2.1                                                 | Diseño de la investigación . . . . .                                                                    | 32        |
| 3.2.2                                                 | Método de investigación . . . . .                                                                       | 32        |
| 3.2.3                                                 | Tipo de investigación . . . . .                                                                         | 32        |
| 3.2.4                                                 | Enfoque de la investigación . . . . .                                                                   | 33        |
| 3.3                                                   | Procedimientos. . . . .                                                                                 | 33        |
| <b>CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS</b>    |                                                                                                         | <b>34</b> |
| 4.1                                                   | Introducción . . . . .                                                                                  | 34        |
| 4.2                                                   | Recurrencia puntual para sistemas dinámicos lineales desde el enfoque<br>de la Teoría Ergódica. . . . . | 34        |
| 4.3                                                   | Construcción de medidas invariantes para una clase general de sistemas<br>dinámicos lineales. . . . .   | 41        |
| 4.4                                                   | Generalización de propiedades de recurrencia a sistemas dinámicos pro-<br>ductos e inversos . . . . .   | 48        |
| <b>CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS</b> |                                                                                                         | <b>57</b> |
| 5.1                                                   | Introducción . . . . .                                                                                  | 57        |
| 5.2                                                   | Análisis de los resultados . . . . .                                                                    | 57        |
| 5.3                                                   | Conclusiones . . . . .                                                                                  | 58        |
| 5.4                                                   | Líneas futuras de investigación . . . . .                                                               | 59        |
| <b>Referencias</b>                                    |                                                                                                         | <b>60</b> |
| Anexos . . . . .                                      |                                                                                                         | 63        |

## Agradecimientos

**A Dios.** Señor, te doy gracias con todo mi corazón por las bendiciones que has derramado sobre mi vida. Gracias por la fuerza en los momentos difíciles, por la alegría en los días buenos, y por tu constante guía .te agradezco por cada nuevo amanecer, por las oportunidades que me das y por las personas que has puesto en mi camino, gracias mi señor por poder terminar mi maestría en matemática.

**A la universidad UTECO.** Agradezco a la universidad por brindarme la oportunidad de crecer académica y personalmente. Esta universidad ha sido un lugar donde he encontrado no solo conocimiento, sino también una comunidad y un sentido de pertinencia. Estoy profundamente agradecida por todos los recursos, el apoyo y las oportunidades que he recibido aquí, que han contribuido de manera significativa en mi desarrollo.

**Al MESCyT.** Por su invaluable apoyo y compromiso con la educación superior en nuestro país. Gracias a las oportunidades qué nos han brindado, hemos podido ampliar nuestros conocimientos y desarrollar nuestras capacidades, lo que nos ha permitido alcanzar este importante logro.

**A los profesores.** Por su dedicación, paciencia y compromiso con nuestra educación. sus enseñanzas han sido mas que lecciones en un aula; han sido guías para la vida. Cada uno de ustedes ha dejado una huella en mi desarrollo, no solo como estudiante, sino como persona.

**Al asesor.** Por su invaluable guía y apoyo a lo largo de mi proceso académico. su sabiduría, paciencia y constante motivación han sido fundamentales para mi crecimiento tanto personal como profesional, aprecio mucho el tiempo que ha dedicado a escucharme orientarme y ayudarme a superar los desafíos que he encontrado en el camino.

## Dedicatorias

**A Dios.** Por ser mi gran fuerza de lucha, darme la fuerza necesaria para seguir en la lucha día tras día, por tu hermosa manera de reconocer tu presencia en mi vida para logro otro de mi sueño, gracias por tu bendición mi creador.

**A mi esposo Wlfarin Jesús Jiménez Sánchez.** Amor, quiero agradecerte desde el fondo de mi corazón por todo lo que haces por mi y por nuestra vida juntos. Tu amor, apoyo y comprensión significan el mundo para mí, gracias por estar siempre a mi lado en los momentos difíciles y por celebrar conmigo en los momentos de alegría. Eres mi compañero, mi mejor amigo y mayor fortaleza, no tengo palabras suficientes para expresar lo agradecida que estoy por tenerte en mi vida. Gracias por ser tú, por construir juntos nuestro futuro.

**A mi padre Apolinar Cruz Tejada,** aunque ya no estes físicamente aquí, quiero agradecerte por todo lo que hiciste por mí. Gracias por tu amor, tu sabiduría y por cada enseñanza que me diste. Tus valores y consejos siempre han sido y seguirán siendo una guía en mi vida. Extraño tu presencia todos los días, pero llevo en mi corazón todo lo que compartimos.

**A mi madre Dolores Rosa.** Por el amor incondicional que me ha dado a lo largo de vida. Gracias por enseñarme valores, por ser mi guía y por sacrificar tanto para que yo pudiera tener la oportunidad que he tenido. Ha sido mi refugio, mi fuerza y mi mayor ejemplo, no hay palabras suficientes para expresar lo agradecida que estoy por todo lo que ha hecho por mi.

**A mis hijos. Wilfrandy Jesús Jiménez cruz,** mi gran amor, eres mi niño adorable, por ti lucho cada día para continuar avanzando y ser tu ejemplo a seguir y que mi señor te llene de sabiduría para ser un niño de bien. Te amo mi bebé. **Wisleidy Chisleisy Jiménez Cruz,** mi reina espero que el señor de colme de bendiciones

para seguir creciendo y puedas desarrollar habilidades y destrezas para ser una niña ejemplar. Te amo mi princesa.

**A mis hermanos:** Deyanira Tejada Rosa, Kenia Tejada Rosa, Arileida Tejada Rosa, Ana Lucia Cruz Rosa, Wendy María Cruz Rosa y Apolinar Cruz Rosa, por tener la dicha de estar con ustedes en cada proceso y ser ejemplos a seguir con mis sueños y brindarme ideas para seguir avanzado en cada proceso de enseñanza y aprendizaje.

**A mis sobrinos:** Yessica, Gabriela, Kelfrin, Carolin, Dalauri, Alejandro, Dani, Kaina, Shaira, Franly, Jonelfri, Joelfrin y Frailiana, por formar parte de mi vida y mi hermosa familia. Espero que todos puedan lograr sus sueños.

**A mis compañeros:** Raquel Basora, Damaris, Yissel, Gloria Estefany, Yusmeri, Ana Mercedes, Marisely, Heidy, Wandry y Ricaury. Quiero agradecerles a todos mis compañeros por su apoyo y colaboración durante este proyecto. su dedicación, compromiso y trabajo en equipo fueron fundamentales para alcanzar los objetivos que nos propusimos. cada uno de ustedes aportó valiosas ideas y esfuerzos que enriquecieron enormemente nuestro trabajo conjunto. Agradezco también la paciencia y el buen ánimo que mantuvimos a lo largo de este proceso, incluso en los momentos más desafiantes. Ha sido un privilegio trabajar con un equipo tan talentoso y comprometido.

**A mis amigas:** Lucitania Pérez Molina, Diosmary Rivas Paulino y Darleny Rosario. Por ser mi soporte en mi lugar de trabajo, fueron un pilar fundamental para terminar mi maestría. Doy gracias a DIOS por encontrarlas en mi vida, por siempre ayudarme y brindarme todo su apoyo. Gracias mis chicas, las quiero mucho.

República Dominicana  
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)  
Universidad Patrimonio de la Comunidad



**Facultad de Postgrado y Educación Continuada**

**Sustentante**

Ana Dolores Cruz Rosa

**Asesor**

MA. Leomar Antonio Reyes Abreu

**RESUMEN**

Esta investigación contempla un análisis de la recurrencia puntual para sistemas dinámicos lineales desde el enfoque de la teoría ergódica, la construcción de medidas invariantes a partir de puntos recurrentes para una clase general de sistemas dinámicos lineales y la generalización a sistemas dinámicos productos e inversos.

La metodología de esta investigación se basó en un diseño no experimental y un enfoque transversal, empleando el método analítico-deductivo para estudiar las propiedades de recurrencia en sistemas dinámicos lineales desde la teoría ergódica. Con un enfoque cualitativo y un tipo de investigación descriptiva, se buscó caracterizar y analizar dichos sistemas sin manipular intencionalmente las variables.

Las conclusiones más relevantes señalan que la recurrencia en sistemas dinámicos lineales depende de la invariancia y ergodicidad, lo cual permitió la construcción de medidas invariantes mediante puntos recurrentes y el límite de Banach, y se establece que en sistemas dinámicos productos e inversos, la recurrencia se preserva y es analizable en función de los sistemas individuales.

**Palabras claves:** Sistemas dinámicos. Teoría ergódica. Invariancia. Recurrencia.

## **CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN.**

### **1.1. Introducción.**

En este capítulo se contempla la introducción de la investigación, los antecedentes, el planteamiento del problema, los objetivos propuestos, la justificación, los alcances y límites.

### **1.2. Antecedentes**

#### **1.2.1. Antecedentes históricos de la Recurrencia Lineal**

De acuerdo con D'Agostino (1987), las ecuaciones de recurrencia han sido objeto de estudio por numerosos matemáticos a lo largo de los siglos, estando su evolución profundamente ligada a la historia de las matemáticas. Antes de su formalización, muchas civilizaciones antiguas ya empleaban patrones recursivos. La aparición de las relaciones de recurrencia se puede rastrear hasta Fibonacci y su problema de cría de conejos, que establece una recurrencia. Jacob y Kepler observaron que las proporciones límite de términos consecutivos se acercan a la proporción áurea. Posteriormente, Girard escribió explícitamente sobre la recurrencia en 1634, y De Moivre junto a Bernoulli, la resolvieron explícitamente, derivando la conocida fórmula de Binet.

El trabajo de Moivre titulado “Miscelánea analítica sobre series y cuadraturas” publicado en 1730, a menudo se considera como el primer estudio sistemático de las recurrencias lineales. Además, introdujo la idea de una función generadora y la aplicó a la sucesión de Fibonacci (Moreau, 2012).

Las recurrencias han sido un componente fundamental de las matemáticas desde tiempos remotos. Durante los siglos XVII y XVIII, con el avance del álgebra y el cálculo, los matemáticos comenzaron a examinar las propiedades y soluciones de las ecuaciones de recurrencia en un contexto más amplio. En ese periodo, se descubrió que estas ecuaciones estaban estrechamente relacionadas con las series y secuencias infinitas. En el siglo XIX, con el desarrollo de la teoría de números y el álgebra abs-

tracta, las recurrencias lineales fueron estudiadas con mayor detalle. Se desarrollaron métodos generales para resolver y caracterizar estas ecuaciones, encontrando aplicaciones en múltiples áreas, desde la teoría de números hasta la física. Este progreso continuó en los siglos siguientes, con la implementación de algoritmos en la teoría de la codificación y el análisis de algoritmos, lo que permitió un análisis más profundo de sus propiedades y comportamientos gracias a la capacidad de calcular rápidamente grandes cantidades de términos (Koshy, 2019).

### 1.2.2. Antecedentes históricos de los sistemas dinámicos lineales

La teoría de sistemas dinámicos tiene su origen en los trabajos de Newton y sus ecuaciones diferenciales, que expresan el ritmo de cambio de una magnitud. Esta idea permitió a Euler sentar las bases de la dinámica clásica, aplicando las leyes de Newton a partículas y sólidos rígidos (Fernández, 2005). En su esencia, una ecuación diferencial es una función que describe cómo cambia una magnitud con el tiempo, y estas ecuaciones lineales permitieron predecir con precisión los estados posibles de un sistema bajo la premisa del determinismo laplaciano (Madrid, 2011).

El determinismo laplaciano, nombrado así por Pierre-Simon de Laplace, sugería que si una inteligencia conociera todas las fuerzas de la naturaleza, nada sería incierto. Sin embargo, a medida que se profundizaba en el estudio de los sistemas dinámicos, surgieron problemas con ecuaciones diferenciales no lineales. Estas ecuaciones no tienen una proporcionalidad simple entre causas y efectos, muchas veces carecen de soluciones analíticas y pueden presentar comportamientos caóticos (Madrid, 2011). Un ejemplo significativo es el problema de los  $n$  cuerpos, especialmente para  $n = 3$ , que implica determinar el movimiento de tres cuerpos con diferentes masas y fuerzas gravitacionales mutuas.

El problema de los tres cuerpos motivó a matemáticos y físicos a buscar soluciones, pero su complejidad era mucho mayor que la del caso de dos cuerpos. Henri Poincaré, al intentar resolver este problema, encontró indicios de caos determinista,

donde el comportamiento de los sistemas depende sensiblemente de las condiciones iniciales, desafiando el determinismo laplaciano. Poincaré fue el primero en abordar la posibilidad de la existencia del caos, describiéndolo como una conducta aperiódica en sistemas deterministas (Madrid, 2011).

Con el avance de la tecnología y la aparición de las computadoras en la década de 1950, el estudio de sistemas dinámicos no lineales experimentó un auge significativo. En 1963, Lorentz descubrió el movimiento caótico de un atractor mientras estudiaba un modelo de convección atmosférica. Observó que las soluciones de su modelo nunca llegaban a un estado periódico, sino que continuaban oscilando de forma irregular y eran extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. Este descubrimiento fue crucial para entender que algunos sistemas son inherentemente impredecibles (Sayama, 2015).

El estudio de sistemas dinámicos ha demostrado que no es posible predecir con certeza el estado futuro de sistemas complejos como el clima o la economía. Estos estudios han desafiado la creencia predominante durante los siglos XVIII, XIX y gran parte del XX de que conocer las reglas de un fenómeno permite predecir su evolución a largo plazo. En cambio, han resaltado la importancia de prever posibles escenarios con herramientas cualitativas. La naturaleza y los sistemas socioeconómicos son más diversos y complejos de lo que se pensaba en siglos pasados, y el estudio del caos ha permitido comprender mejor esta complejidad (Madrid, 2011).

### **1.2.3. Antecedentes históricos de la teoría ergódica**

La teoría ergódica es el estudio de los sistemas dinámicos desde la perspectiva de la teoría de la probabilidad. El sistema dado por  $T : X \rightarrow X$  es determinista, pero hay factores como la falta de información, la incapacidad de hacer mediciones precisas o la complejidad del sistema que hacen que sea útil estudiarlo probabilísticamente (Martínez, 2019).

Este enfoque nació en la segunda mitad del siglo XIX, con la mecánica estadística. Hasta ese momento, la teoría cinética de los gases intentaba describir la termodinámica en términos de la mecánica. A partir de ella, Ludwig Boltzmann desarrolló la mecánica estadística, que usa la probabilidad para estudiar sistemas mecánicos cuyo estado exacto es incierto. La famosa hipótesis de Boltzmann, formulada en 1868, se refiere a un sistema conservativo con una cantidad enorme de partículas, tal como un gas, y describe la distribución de los momentos de estas partículas. Así, en estos sistemas extremadamente complejos, se renuncia a la pretensión de entender el comportamiento de cada partícula individualmente, y se apunta a entender propiedades globales del sistema expresadas en el lenguaje de las probabilidades (Catsigeras, 2013).

La teoría ergódica propiamente dicha nació en 1890, cuando Henri Poincaré probó, estudiando la mecánica celeste, el primer y más básico resultado de la misma: el Teorema de Recurrencia de Poincaré. No fue sino hasta 50 años después que George D. Birkhoff y John von Neumann establecieron los teoremas ergódicos que llevan sus nombres. En 1940, Claude E. Shannon escribió un artículo intitulado *A mathematical theory of communication*, trabajo fundacional de la teoría de la información. Basado en las ideas de Shannon, en 1959, Andréi Kolmogórov definió el concepto matemático de entropía, que es una cantidad que mide la complejidad de un sistema. El estudio del mismo fue profundizado años más subsiguientes por el mismo Kolmogórov y su alumno Yákov Sinaí. En esa época, la década de los 1960s, hizo eclosión la moderna teoría de los sistemas dinámicos, así como la teoría de la medida. En estos sistemas, como los atractores extraños de las obras de Lorenz, el sistema es altamente impredecible, la complejidad del sistema es un objeto de estudio crucial (Martínez, 2019).

#### **1.2.4. Antecedentes académicos**

La investigación de Eisner (2015) titulada “Estabilidad y recurrencia en la dinámica lineal: Un enfoque ergódico”, cuyo objetivo fue analizar la estabilidad y recurrencia en dinámicas lineales utilizando teoría ergódica. En este estudio, se abordaron los conceptos de estabilidad asintótica y su relación con la recurrencia ergódica en

sistemas discretos y continuos. La conclusión enfatiza que la estabilidad y recurrencia están íntimamente relacionadas y que la teoría ergódica juega un papel fundamental en el control de sistemas dinámicos en aplicaciones prácticas.

En el estudio de Blanchard y Cassaigne (2016) titulado “Teoría ergódica de sistemas recurrentes lineales”, cuyo objetivo fue estudiar la teoría ergódica aplicada a sistemas recurrentes lineales. En este estudio, se examinó las propiedades estadísticas de las trayectorias de estos sistemas y se proporcionaron resultados sobre la distribución de puntos recurrentes. La investigación concluyó que la teoría ergódica es esencial para comprender la estructura interna de los sistemas recurrentes y para predecir su comportamiento a largo plazo, lo que tiene aplicaciones en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

El trabajo de Katok y Hasselblatt (2016) titulado “Introducción a la teoría moderna de sistemas dinámicos”, cuyo objetivo fue proporcionar una introducción comprensiva a la teoría moderna de sistemas dinámicos con un enfoque en sistemas lineales. En este estudio, se incluyeron secciones dedicadas a la teoría ergódica y sus aplicaciones a la recurrencia en sistemas lineales. Los autores concluyen que la teoría ergódica es una herramienta esencial para la comprensión y el análisis de sistemas dinámicos modernos, proporcionando nuevas perspectivas y métodos para el estudio de la dinámica lineal.

La investigación de Tikhomirov (2017) titulada “Propiedades ergódicas de sistemas dinámicos lineales: Una visión general”, cuyo objetivo fue analizar las propiedades ergódicas de sistemas dinámicos lineales a través de varios enfoques matemáticos. En este estudio, se examinó cómo las propiedades de recurrencia se manifiestan en sistemas con diferentes tipos de condiciones iniciales y perturbaciones, permitiendo predecir el comportamiento a largo plazo de los sistemas lineales bajo diversas condiciones.

La investigación de Lind y Marcus (2017) titulada “Dinámica simbólica y ergodicidad lineal”, cuyo objetivo fue relacionar la dinámica simbólica con la ergodicidad de sistemas lineales. En este estudio, se examinaron representaciones simbólicas de sistemas lineales y se demostraron resultados ergódicos utilizando estas representaciones.

El estudio de Lian y Lu (2018) titulado “Ciclo lineal sobre sistemas dinámicos y teoría ergódica”, cuyo objetivo fue explorar las propiedades ergódicas de los ciclos lineales en sistemas dinámicos. En este estudio, se abordó las condiciones bajo las cuales un ciclo lineal muestra comportamiento ergódico y se analizaron ejemplos específicos para ilustrar estos resultados.

En el estudio de Walters (2018) titulado “Aspectos ergódicos de operadores lineales en espacios de Banach”, cuyo objetivo fue investigar las propiedades ergódicas de operadores lineales en espacios de Banach. En este estudio, se desarrollaron criterios ergódicos para la recurrencia de operadores y se aplicaron a ejemplos en análisis funcional. Los resultados obtenidos muestran que las propiedades ergódicas de los operadores lineales son fundamentales para la teoría de operadores y tienen implicaciones significativas en la teoría de espacios de Banach.

El trabajo de Gorodetski y Kleptsyn (2019) titulado “Propiedades de recurrencia de mapas lineales y medidas ergódicas”, cuyo objetivo fue investigar las propiedades de recurrencia de mapas lineales y sus medidas ergódicas asociadas. En este estudio, se describieron condiciones específicas para la ergodicidad y se aplicaron a varios ejemplos de mapas lineales en espacios de dimensión finita.

La investigación de Krieger (2020) titulada “Ergodicidad y recurrencia en sistemas dinámicos lineales”, cuyo objetivo fue proporcionar una caracterización detallada de la recurrencia en sistemas lineales. En este estudio, se utilizó herramientas de la teoría ergódica para demostrar la existencia de estados recurrentes y se discutieron las

implicaciones para sistemas físicos modelados por ecuaciones lineales. La conclusión destaca la importancia de la recurrencia ergódica en la predicción del comportamiento de sistemas físicos y en la mejora de modelos matemáticos para describir fenómenos naturales.

El estudio de Froyland y Gonçalves (2021) titulado “Recurrencia y ergodicidad en sistemas lineales de alta dimensión”, cuyo objetivo fue extender los resultados ergódicos a sistemas lineales de alta dimensión. En este estudio, se utilizaron técnicas de análisis funcional para caracterizar la recurrencia y se discutieron aplicaciones en modelado climático y económico.

### **1.3. Planteamiento del problema.**

El estudio de las propiedades de recurrencia se ha convertido en un tema de interés creciente en la teoría de sistemas dinámicos debido a su capacidad para revelar patrones y estructuras ocultas en conjuntos de datos temporales, cuya evolución puede conducir a comportamientos complejos que no son fácilmente capturados por métodos tradicionales de análisis. Estas permiten analizar cómo un sistema regresa a sus estados anteriores o a estados cercanos, proporcionando informaciones claves sobre su estabilidad y predictibilidad.

La teoría ergódica se ocupa del comportamiento a largo plazo de los sistemas dinámicos, investigando cómo se distribuyen las trayectorias de un sistema a lo largo del tiempo. Esto supone que las propiedades de recurrencia y la teoría ergódica están íntimamente relacionadas, ya que ambas se enfocan en la repetición y estabilidad de los estados dentro de un sistema dinámico, además de que permite entender si un sistema recorrerá todo el espacio de estados de manera uniforme con el tiempo.

Dentro de este marco, la recurrencia puntual es una propiedad clave que describe esta tendencia de las trayectorias de un sistema a retornar a su estado inicial o a estados próximos, después de cierto tiempo. Sin embargo, la caracterización de esta

recurrencia solo se ha realizado para casos específicos de sistemas lineales o en su defecto, para sistemas dinámicos no lineales. La dificultad radica en los parámetros del sistema (como matrices de coeficientes) pueden interactuar de maneras complejas, afectando la recurrencia puntual de maneras que no están completamente comprendidas.

Por otro lado, las medidas invariantes son fundamentales en el estudio de los sistemas dinámicos porque permiten analizar cómo se distribuye la probabilidad a lo largo de las órbitas de un sistema dinámico, ofreciendo una descripción global de su dinámica asintótica, además de examinar las propiedades estadísticas de sistemas dinámicos en largos periodos de tiempo. La capacidad de construir y estudiar estas medidas invariantes facilita no solo la predicción del comportamiento del sistema bajo estudio, sino también el diseño de sistemas controlados y optimizados en campos tan variados como la física y la ingeniería. Los puntos recurrentes, que vuelven arbitrariamente cerca de su posición inicial después de algún tiempo, son fundamentales para la construcción de estas medidas, además de permitir establecer sus propiedades a una clase general de espacios, como los espacios de Banach junto a operadores adjuntos.

Estos sistemas a menudo involucran múltiples componentes que interactúan simultáneamente, lo cual no puede ser capturado adecuadamente por el análisis de sistemas individuales o unidireccionales, pues rara vez operan de manera aislada, tal es el caso, de los sistemas dinámicos productos e inversos, que consideran la interacción conjunta de varios operadores; por lo que, generalizar estas propiedades de recurrencia a estos sistemas han de establecer una referencia de cómo los estados del sistema pueden repetirse o estabilizarse cuando múltiples factores están en juego simultáneamente. En tal sentido, esta investigación responde a las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué condiciones caracterizan la recurrencia puntual para sistemas dinámicos lineales desde el enfoque de la Teoría Ergódica?

2. ¿Cómo construir una medida invariante a partir de puntos recurrentes para una clase general de sistemas dinámicos lineales?
3. ¿Cómo generalizar las propiedades de recurrencia a sistemas dinámicos productos e inversos?

#### **1.4. Justificación.**

El análisis de las propiedades de recurrencia en sistemas dinámicos es fundamental debido a su capacidad para relacionar patrones y estructuras en datos temporales complejos. Estas propiedades permiten analizar cómo un sistema regresa a sus estados anteriores o cercanos, y tienen grandes aplicaciones prácticas, incluyendo la optimización y el control de sistemas en distintos campos de las ciencias.

Esta investigación es relevante porque permite caracterizar propiedades que se mantienen en la construcción de medidas invariantes, las cuales describen cómo se distribuye la probabilidad a lo largo de las órbitas de un sistema. Con ello, predecir el comportamiento que permita diseñar sistemas optimizados basados en una comprensión completa de su dinámica asintótica.

En definitiva, este estudio establece un referente teórico de cómo los estados de los sistemas pueden repetirse o estabilizarse en presencia de múltiples factores en escenarios realistas, donde interviene la interacción conjunta de varios operadores. Además, plantea un marco documental para futuras investigaciones en las propiedades de recurrencia y teoría ergódica, cuyos resultados puedan ser aplicados en la resolución de problemas y modelización matemática de sistemas dinámicos, así como en el desarrollo de técnicas avanzadas para el análisis de estos sistemas.

#### **1.5. Objetivos.**

##### **1.5.1. General.**

Analizar las propiedades de recurrencia para sistemas dinámicos lineales desde la perspectiva de la teoría ergódica.

### **1.5.2. Específicos.**

1. Caracterizar la recurrencia puntual para sistemas dinámicos lineales desde el enfoque de la Teoría Ergódica.
2. Construir medidas invariantes a partir de puntos recurrentes para una clase general de sistemas dinámicos lineales.
3. Generalizar las propiedades de recurrencia a sistemas dinámicos productos e inversos.

### **1.6. Alcances y límites**

Esta investigación estuvo orientada en las matemáticas puras, específicamente en el área de análisis matemático. Se fundamentó en el análisis de las propiedades de recurrencia de sistemas dinámicos particularmente lineales, realizando esto desde el enfoque de la teoría ergódica.

## CAPÍTULO II

### MARCO REFERENCIAL.

#### 2.1. Introducción.

En este capítulo se presentan los planteamientos teóricos que fundamentan la teoría ergódica, los sistemas dinámicos lineales y las propiedades de recurrencia.

#### 2.2. Marco Teórico

##### 2.2.1. Fundamentos de los espacios de medida

**Definición 2.1** Según Apostol (2020), un espacio vectorial  $X$  es un espacio normado cuando a cada  $x \in X$  está asignado un número real no negativo  $\|x\|$ , llamado norma de  $x$ , de manera que:

1.  $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in X$ ,
2.  $\|x\| = 0$  si y sólo si  $x = 0$ ,
3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  si  $x \in X$  y  $\alpha$  es un escalar,
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todo  $x, y \in X$ .

Todo espacio normado puede considerarse como un espacio métrico, en el que  $d(x, y)$  está dada por  $\|x - y\|$ .

**Definición 2.2** Rios Quispicho (2023) establece que  $\mu : C \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  es una función definida sobre una colección de conjuntos  $C$ . Se dice que  $\mu$  es finitamente aditiva si

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Para toda colección finita  $(A_n)_{1 \leq n \leq m}$  de conjuntos de  $C$ , disjuntos dos a dos, tales que  $\bigcup_{n=1}^m A_i \in C$  se tiene

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^m A_n \right) = \sum_{n=1}^m \mu(A_n).$$

**Teorema 2.1** Sea  $\mu$  una función aditiva sobre el álgebra  $A$  (Rios Quispicho, 2023).

- a)  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$  para todo  $A, B \in A$ .
- b) Si  $A, B \in \mathcal{F}$  y  $C \in A$ , entonces  $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A - B)$ . Como consecuencia, si  $\mu(B)$  es finita,  $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$  y si  $\mu(A - B) \geq 0$ ,  $\mu(B) \leq \mu(A)$ .
- c) Si  $\mu$  es no-negativa,  $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ .

Demostración.

(a) Por aditividad se tiene:

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A - B),$$

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B - A).$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + [\mu(A - B) + \mu(B - A) + \mu(A \cap B)] = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B).$$

(b) Se puede escribir  $A = B \cup (A - B)$ , y entonces  $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A - B)$ .

(c) Se tiene que:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_3) \cup \cdots \cup (A_i^c \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k \cap A_n).$$

Los conjuntos que aparecen al lado derecho de esta relación son disjuntos y por lo tanto:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \mu(A_1) + \mu(A_1^c \cap A_2) + \mu(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) + \cdots + \mu(A_i^c \cap \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k \cap A_n).$$

Por otro lado, se tiene que  $A_i^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_n \subset A_n$  y como  $\mu$  es no-negativa el aparte (b) implica el resultado.

**Definición 2.3** De acuerdo con Rana (2002) si  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  es una función definida sobre una colección de conjuntos  $\mathcal{F}$ . Se dice que  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva o numerablemente aditiva si

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
2. Para toda colección  $(A_n)_{n \geq 1}$  de conjuntos de  $\mathcal{F}$ , disjuntos dos a dos, tales que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  se tiene

$$\mu \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

**Definición 2.4** Si  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos del conjunto  $\Omega$ , se dice que  $(\Omega, \mathcal{F})$  es un espacio medible. Una medida  $\mu$  sobre  $\mathcal{F}$  es una función  $\sigma$ -aditiva que toma únicamente valores positivos:  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  (Rana, 2002).

- Si  $\mu(\Omega) < \infty$  se dice que la medida es finita. Si  $\mu(\Omega) = 1$  se dice que  $\mu$  es una medida de probabilidad.
- Si el conjunto  $\Omega$  se puede descomponer como la unión numerable de subconjuntos de medida finita, se dice que la medida es  $\sigma$ -finita.

Finalmente, se dice que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  es un espacio de medida y es un espacio de probabilidad en el caso particular  $\mu(\Omega) = 1$ . Los conjuntos de  $\mathcal{F}$  se llaman conjuntos medibles (o eventos en el caso de espacios de probabilidad).

### 2.2.2. Medidas invariantes

**Definición 2.5** Se llama órbita positiva o futura  $o^+(x)$  por el punto  $x \in X$ , y  $x$  se llama estado inicial de la órbita, a la sucesión

$$o^+(x) := \{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Si  $T$  es bi-medible se llama órbita negativa o pasada a la sucesión

$$o^-(x) := \{T^{-n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

y se llama órbita  $o(x)$  bilateral (o simplemente órbita cuando  $T$  es bi-medible) a la sucesión bi-infinita

$$o(x) := \{T^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Cuando  $T$  es medible pero no bi-medible, se llama simplemente órbita a la órbita positiva o futura. Se observa que  $T^{n+m}(x) = T^n(T^m(x))$  y por lo tanto el iterado  $T^m(x)$  es el estado inicial de la órbita por  $x$  que se obtiene corriendo el instante 0 al que antes era instante  $m$  (Suárez, 2016).

**Definición 2.6** Punto fijo (o periódico de periodo 1) es  $x_0$  tal que  $T(x_0) = x_0$ . Punto periódico es  $x_0$  tal que existe  $p \geq 1$  tal que  $T^p(x_0) = x_0$ . El período es el mínimo  $p \geq 1$  que cumple lo anterior. Se observa, a partir de la propiedad de grupo, que si un punto es periódico de período  $p$  entonces su órbita está formada por exactamente  $p$  puntos (Suárez, 2016).

**Definición 2.7** De acuerdo con Suárez (2016), sea  $T$  medible en un espacio  $(X, \mathcal{A})$ . Una medida  $\mu$  se dice que es invariante por  $T$ , o que  $T$  preserva  $\mu$ , o se dice también que  $T$  es un automorfismo del espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , si

$$\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

**Teorema 2.2** Existencia de medidas invariantes. Sea  $X$  un espacio métrico compacto, y sea  $T : X \mapsto X$  continua. Entonces existen (usualmente infinitas) medidas de probabilidad en la sigma-álgebra de Borel, que son invariantes para  $T$  (Suárez, 2016).

**Proposición 2.2.1** Sea  $T : X \mapsto X$  una transformación medible en un espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ . Si  $\mu$  es una medida finita o sigma-finita y  $\mathcal{A}_0$  es un álgebra que genera a  $\mathcal{A}$  tal que  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \forall A \in \mathcal{A}_0$  entonces  $\mu$  es invariante por  $T$  (Suárez, 2016).

**Definición 2.8** Sean  $(X_1, \mathcal{B}_1, m_1)$  y  $(X_2, \mathcal{B}_2, m_2)$  espacios de probabilidad.

- Una transformación  $T : (X_1, \mathcal{B}_1) \longrightarrow (X_2, \mathcal{B}_2)$  es medible si  $T^{-1}(B_2) \subset \mathcal{B}_1$ , es decir, si  $B_2 \in \mathcal{B}_2$ , entonces,  $T^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}_1$ . Si  $X_1$  y  $X_2$  son espacios topológicos,

se dice que  $T : X_1 \longrightarrow X_2$  es medible si lo es con respecto a las  $\sigma$ -álgebras de los borelianos.

- Una transformación  $T : X_1 \longrightarrow X_2$  preserva medidas si  $T$  es medible y  $m_1(T^{-1}(B_2)) = m_2(B_2)$  para todo  $B_2 \in \mathcal{B}_2$ .
- $T : X_1 \longrightarrow X_2$  es una transformación invertible que preserva medidas si  $T$  preserva medidas, es biyectiva y la inversa  $T^{-1}$  también preserva medidas (Huaccachi, 2023).

**Proposición 2.2.2** Sean  $(X_1, \mathcal{B}_1)$  y  $(X_2, \mathcal{B}_2)$  dos espacios medibles,  $T : X_1 \longrightarrow X_2$  una transformación y  $\mathcal{C}$  una familia de subconjuntos de  $X_2$  tal que la  $\sigma$ -álgebra generada por  $\mathcal{C}$  es  $\mathcal{B}_2$ . Si para cada  $C \in \mathcal{C}$  se tiene que  $T^{-1}(C) \in \mathcal{B}_1$ , entonces  $T$  es medible (Huaccachi, 2023).

### 2.2.3. Sistemas dinámicos

**Definición 2.9** El estado de un sistema es un conjunto de cantidades  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  los cuales si se conocen en un tiempo  $t = t_0$  son determinadas para  $t \geq t_0$  al especificar las entradas del sistema para  $t \geq t_0$  (Giraldo, 2009).

**Definición 2.10** De acuerdo con Giraldo (2009), las ecuaciones de estado o la ecuación (matricial) de estado constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, que describen completamente el comportamiento del sistema que se quiere modelar. Entonces, si

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$$

son las variables de estado (o los estados) del proceso en el tiempo  $t$ , y

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$$

son las entradas del proceso en el tiempo  $t$ , entonces el sistema puede ser descrito por  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t) \\
\dot{x}_2 &= a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), t)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Aquí se puede definir

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

como el vector de estado del sistema, y

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

como el vector de entradas. Las ecuaciones de estado se pueden escribir de forma matricial como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

**Definición 2.11** Un sistema dinámico es un par  $(X, \varphi)$  donde  $X$  es un conjunto llamado espacio de estados y  $\varphi : X \times T \rightarrow X$  es una función que describe la evolución del sistema, donde  $T$  es un conjunto que representa el tiempo (puede ser  $\mathbb{R}$  para sistemas continuos o  $\mathbb{Z}$  para sistemas discretos).

**Definición 2.12** Según Monteiro (2002), un sistema dinámico es topológicamente transitivo si para cada subespacio abierto no vacío  $U \subset X$ , el conjunto  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$  es denso en  $X$ , es decir,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U) = X.$$

**Definición 2.13** Sea  $X$  un espacio métrico y  $f : X \rightarrow X$ . Sea  $E$  un subconjunto invariante de  $(X, f)$ . Si los puntos periódicos de  $f$  son densos en  $E$  y hay un punto cuya órbita es densa en  $E$ , entonces  $f$  es topológicamente transitiva sobre  $E$  (Zhang y Zhou, 2021).

**Definición 2.14** Sea  $T : X \rightarrow X$  un sistema dinámico. Entonces un subconjunto  $Y \subset X$  se dice  $T$ -invariante o invariante bajo  $T$  si  $T(Y) \subseteq Y$ . Luego si  $Y \subset X$  es invariante bajo  $T$ , entonces  $T|_Y : Y \rightarrow Y$  también es un sistema dinámico (Zhang y Zhou, 2021).

**Definición 2.15** Sea  $T : X \rightarrow X$  un sistema dinámico. Entonces se verifica

(i)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (iii)  $\iff$  (iv)  $\iff$  (v) donde:

- (i)  $X$  no se puede escribir como  $X = A \cup B$  siendo  $A, B$  subconjuntos de  $X$  invariantes bajo  $T$  y de interior no vacío.
- (ii)  $X$  no puede escribirse como  $X = A \cup B$  para  $A, B$  subconjuntos disjuntos de  $X$  de interior no vacío, siendo  $A$  invariante bajo  $T$ .
- (iii) Para todo par  $U, V$  de subconjuntos no vacíos de  $X$  existe  $n \geq 0$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .
- (iv) Para cualquier subconjunto  $U$  de  $X$  abierto y no vacío, el conjunto  $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$  es denso en  $X$ .
- (v) Para cualquier subconjunto  $U$  de  $X$  abierto y no vacío, el conjunto  $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$  es denso en  $X$ .

**Definición 2.16** Un sistema dinámico  $T : X \rightarrow X$  se dice topológicamente transitivo si, para todo par  $U, V$  de subconjuntos de  $X$  abiertos y no vacíos, existe  $n \geq 0$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$  (Zhang y Zhou, 2021).

#### 2.2.4. Recurrencia

**Definición 2.17** De acuerdo con Galán (2015), se define  $T^n : X \rightarrow X$  como la iteración  $n$ -ésima de  $T$ , es decir

$$T^n = \overbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}^n$$

**Definición 2.18** Un sistema dinámico  $T : X \rightarrow X$  se dice que es topológicamente transitivo si, para cada par  $U, V$  de abiertos no vacíos de  $X$ , existe algún  $n \geq 0$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$  (Grosse-Erdmann, 2000).

**Proposición 2.2.3** Sea  $T$  una función continua en un espacio métrico  $X$ , si  $x \in X$  tiene órbita densa sobre  $T$ , entonces para todo  $n \geq 1$  cada  $T^n x$  tiene órbita densa sobre  $T$  (Abellán, 2015).

**Teorema 2.3** Teorema de la transitividad de Birkhoff. Sea  $T$  una aplicación continua en un espacio métrico completo y separable  $X$  (Abellán, 2015). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $T$  es topológicamente transitiva.
2. Existe algún  $x \in X$  de manera que la  $Orb(x, T)$  es densa en  $X$ .

**Definición 2.19** Dados  $x \in X$  y cualquier subconjunto no vacío  $A$  de  $X$ , se define el conjunto de retorno o de recurrencia de  $x$  a  $A$  como  $N(x, A) := \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in A\}$ , es decir, es el conjunto de todos los números naturales que producen iteraciones de  $x$  bajo  $T$  que están en  $A$  (Galán, 2015).

**Definición 2.20** Para subconjuntos no vacíos cualesquiera  $A$  y  $B$  de  $X$ , se define el conjunto de retorno de  $A$  a  $B$  mediante  $T$  como  $N(A, B) := \{n \in \mathbb{N} : T^n(A) \cap (B) \neq \emptyset\}$ , es decir el conjunto de todos los números naturales que producen iteraciones en  $A$  bajo  $T$  que intersectan a  $B$  (Galán, 2015).

**Observación 2.2.1**  $T$  es topológicamente transitivo, si y sólo si, para cada  $U$  y  $V$  de abiertos no vacíos de  $X$  el conjunto  $N(U, V) \neq \emptyset$ .

**Definición 2.21** Según Costakis et al. (2014), un operador  $T$  actuando sobre  $X$  es llamado recurrente si para cada conjunto abierto  $U \subset X$ , existe algún  $k \in \mathbb{N}$  tal que

$$U \cap T^{-k}(U) \neq \emptyset$$

**Definición 2.22** Un punto  $x \in X$  se denomina recurrente, si dado cualquier entorno  $U$  de  $x$ , el conjunto  $N(x, U)$  es infinito. Se denota el conjunto de todos los puntos recurrentes de un sistema dinámico  $(X, T)$  por  $Rec(X, T)$  (Galán, 2015).

**Definición 2.23** Un vector  $x \in X$  es llamado recurrente para  $T$  si existe una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $T^{k_n}x \rightarrow x$ , cuando  $n \rightarrow \infty$  (Costakis, 2014).

**Definición 2.24** Según Grosse-Erdmann (2000), un par de puntos  $x, y \in X$  se dice proximal, si existe una sucesión creciente  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(T^{n_k}x, T^{n_k}y) = 0$$

**Definición 2.25** Un punto  $x \in X$  se llama distal, si no es proximal a ningún punto contenido en la clausura de su propia órbita, excepto él mismo, es decir, si para cada  $y \in \overline{Orb(x, T)}$ , el par  $x, y$  no es proximal. Un sistema dinámico  $(X, T)$  es distal si cada  $x \in X$  lo es (Grosse-Erdmann, 2000).

**Definición 2.26** Un punto  $x \in X$  se dice producto recurrente en  $(X, T)$ , si dado cualquier punto  $y$  recurrente en cualquier sistema dinámico  $(Y, S)$ , el par  $(x, y)$  es recurrente para el sistema producto  $(X \times Y, T \times S)$  (Galán, 2015).

**Definición 2.27** El operador  $T$  se dice hipercíclico si existe un vector  $x \in X$ , llamado un vector hipercíclico para  $T$ , cuya órbita  $Orb(x, T)$  es densa en  $X$ . Según el teorema de transitividad de Birkhoff, esta noción es equivalente a la de transitividad topológica, es decir, para cada par  $U, V$  de subconjuntos abiertos no vacíos de  $X$  se puede encontrar  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ ; y en este caso, el conjunto de vectores hipercíclicos para  $T$ , denotado por  $HC(T)$ , es un subconjunto  $G_\delta$  denso de  $X$  (Puig de Dios, 2015).

**Definición 2.28** Dada una colección no vacía de conjuntos  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ , se dice que es una familia de Furstenberg si para cada  $A \in \mathcal{F}$  se tiene:

- (i)  $A$  es infinito;

(ii) si  $A \subset B \subset \mathbb{N}_0$ , entonces  $B \in \mathcal{F}$ .

La familia dual de  $\mathcal{F}$  se define como la colección de conjuntos

$$\mathcal{F}^* := \{A \subset \mathbb{N}_0 \text{ infinito} : A \cap B \neq \emptyset \text{ para todo } B \in \mathcal{F}\}$$

(Puig de Dios, 2015).

**Definición 2.29** Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico lineal y sea  $\mathcal{F}$  una familia de Furstenberg. Un punto  $x \in X$  se dice que es  $\mathcal{F}$ -recurrente si  $N(x, U) \in \mathcal{F}$  para cada vecindario  $U$  de  $x$ . Se denotará por  $FRec(T)$  el conjunto de tales puntos y se dice que  $T$  es  $\mathcal{F}$ -recurrente si  $FRec(T)$  es denso en  $X$  (Puig de Dios, 2015).

Las familias  $\mathcal{F}$  para las cuales existen operadores  $\mathcal{F}$ -hipercíclicos son mucho menos comunes que aquellas para las cuales existe  $\mathcal{F}$ -recurrencia, ya que tener una órbita distribuida en todo el espacio es mucho más complicado que tenerla justo alrededor del punto inicial de la órbita.

**Definición 2.30** De acuerdo con Blásquez (2012), un punto  $x \in X$  se dice que es

- (a) frecuentemente recurrente (frecuentemente hipercíclico) si  $\text{dens}(N(x, U)) > 0$  para cada vecindario  $U$  de  $x$  (para cada subconjunto abierto no vacío  $U$  de  $X$ ). Se denota por  $FRec(T)$  el conjunto de tales puntos, y se dice que  $T$  es frecuentemente recurrente si  $FRec(T)$  es denso en  $X$ ;
- (b)  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente ( $\mathcal{U}$ -frecuentemente hipercíclico) si  $\text{dens}(N(x, U)) > 0$  para cada vecindario  $U$  de  $x$  (para cada subconjunto abierto no vacío  $U$  de  $X$ ). Se denota por  $\mathcal{U}FRec(T)$  el conjunto de tales puntos, y se dice que  $T$  es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente si  $\mathcal{U}FRec(T)$  es denso en  $X$
- (c) reiterativamente recurrente si  $\text{Bd}(N(x, U)) > 0$  para cada vecindario  $U$  de  $x$ . Se denota por  $RRec(T)$  el conjunto de tales puntos, y se dice que  $T$  es reiterativamente recurrente si  $RRec(T)$  es denso en  $X$

donde para cualquier  $A \subset \mathbb{N}_0$  es:

1. la densidad inferior es  $\text{dens}(A) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(A \cap [0, N])}{N+1}$ ,
2. la densidad superior es  $\text{dens}(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(A \cap [0, N])}{N+1}$ ,
3. la densidad de Banach superior es  $\text{Bd}(A) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\text{card}(A \cap [n, n+N])}{N+1}$ .

**Definición 2.31** Según Puig de Dios (2015), sea  $A \subset \mathbb{N}_0$ . Se dice que  $A$  es un

- (a) conjunto sindético, si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $x \in \mathbb{N}_0$  tenemos  $[x, x+m] \cap A \neq \emptyset$ . Se denota por

$$S := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ es sindético}\},$$

la familia de Furstenberg de conjuntos sindéticos.

- (b) conjunto IP, si existe una secuencia creciente  $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{N}_0$  tal que

$$\left\{ \sum_{n \in F} x_n : F \subset \mathbb{N} \text{ finito} \right\} \subset A.$$

Se denota por

$$IP := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ es un conjunto IP}\},$$

la familia de Furstenberg de conjuntos IP.

- (c) conjunto  $\Delta$ , si existe un conjunto infinito  $B \subset \mathbb{N}_0$  tal que  $(B - B) \cap \mathbb{N} \subset A$ . Se denota por

$$\Delta := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ es un conjunto } \Delta\},$$

la familia de Furstenberg de conjuntos  $\Delta$ .

**Definición 2.32** Blásquez (2012) establece que si  $(X, T)$  es un sistema dinámico lineal, Un punto  $x \in X$  se dice que es

- (a) uniformemente recurrente si  $N(x, U) \in S$  para cada vecindario  $U$  de  $x$ . Se denota por  $URec(T)$  el conjunto de tales puntos y  $T$  es uniformemente recurrente si  $URec(T)$  es denso en  $X$ ;

- (b)  $\text{IP}^*$ -recurrente si  $N(x, U) \in \text{IP}^*$  para cada vecindario  $U$  de  $x$ . Se denota por  $\text{IP}^*\text{Rec}(T)$  el conjunto de tales puntos, y  $T$  es  $\text{IP}^*$ -recurrente si  $\text{IP}^*\text{Rec}(T)$  es denso en  $X$ ;
- (c)  $\Delta^*$ -recurrente si  $N(x, U) \in \Delta^*$  para cada vecindario  $U$  de  $x$ . Se denota por  $\Delta^*\text{Rec}(T)$  el conjunto de tales puntos, y  $T$  es  $\Delta^*$ -recurrente si  $\Delta^*\text{Rec}(T)$  es denso en  $X$ .

**Definición 2.33** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico y  $U$  un subconjunto de  $X$ . Se dice que  $U$  es denso si  $\overline{U} = X$ .

**Definición 2.34** Un sistema dinámico es regular si el conjunto de puntos periódicos de  $f$  es denso en  $\overline{X}$ .

**Definición 2.35** Una aplicación  $f$  se dice que es topológicamente transitiva sobre  $X$  si para cada dos conjuntos abiertos  $U, V \subseteq X$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ . La función  $f$  se llama totalmente topológicamente transitiva cuando  $f^n$  es topológicamente transitiva para todo  $n \geq 1$ .

### 2.2.5. Teoría Ergódica

**Definición 2.36** Sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de probabilidad.  $T : X \rightarrow X$  automorfismo.  $T$  se dice ergódico si  $\forall A \in \mathcal{A}$  tal que  $T^{-1}(A) = A \Rightarrow \mu(A) = 0$  o  $\mu(A) = 1$  (Martínez, 2019).

**Proposición 2.2.4** De acuerdo con Martínez (2019),  $T$  se dice ergódica si  $\forall A \in \mathcal{A}$  tal que  $T(A) \subset A \Rightarrow \mu(A) = 0$  o  $\mu(A) = 1$ .

Demostración. Si  $T$  cumple la condición dada entonces  $T$  es ergódica ya que  $T(A) \subset A$  implica  $A \subset T^{-1}(A)$ . Por otro lado si  $T$  es ergódica entonces se considera

$$A_n = T^{-n}(A) \quad \text{para } n \geq 0.$$

Se tiene que:

- (i)  $\mu(A_n) = \mu(A)$  por ser  $\mu T$ -invariante.

(ii)  $\{A_n\}$  creciente.

Así que:

$$B = \bigcup_{n \geq 0} A_n \Rightarrow \mu(B) = \lim \mu(A_n) = \mu(A)$$

Además

$$T^{-1}(B) = T^{-1} \left( \bigcup_{n \geq 0} A_n \right) = T^{-1} \left( \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A) \right) = \bigcup_{n \geq 0} T^{-(n+1)}(A) = \bigcup_{n \geq 1} A_n \subset B$$

Como  $A \subset T^{-1}(A)$  entonces  $\mu(B) = 0$  o  $\mu(B) = 1 \Rightarrow \mu(A) = 0$  o  $\mu(A) = 1$ .

**Proposición 2.2.5** Conforme a Catsigeras (2013),  $T$  se dice ergódica si  $\forall A \in \mathcal{A}$  tal que

$$\mu(A) > 0 \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A) \right) = 1$$

Demostración. Se probará partiendo de la proposición (2.2.4). Si  $T$  es ergódica y  $A$  es tal que  $\mu(A) > 0$ , se considera

$$B = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A).$$

Como

$$B \subset T^{-1}(B) \Rightarrow \mu(B) = 0 \text{ o } \mu(B) = 1.$$

Al ser  $T$  invariante y la unión creciente se tiene  $\mu(A) = 1$  o  $\mu(A) = 0$  pero esto último contradice la hipótesis, así que  $\mu(B) = 1$ . Ahora sea  $A \subset T^{-1}(A)$  entonces  $\mu(A) = 0$  o  $\mu(A) > 0$ , si pasa lo segundo entonces

$$1 = \mu \left( \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(A) \right) = \lim \mu \left( T^{-n}(A) \right) = \lim \mu(A) = \mu(A)$$

Así que  $T$  es ergódica.

**Proposición 2.2.6** Según Catsigeras (2013),  $T$  se dice ergódica si

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \text{constante c.t.x} \quad \forall f \in L^1.$$

Demostración. ( $\Rightarrow$ )

$$\tilde{f} \text{ constante c.t.x} \Rightarrow \int f d\mu = \tilde{f}(x)$$

Se tiene que

$$A = \{x : \tilde{f}(x) > \int f d\mu\}$$

$$B = \{x : \tilde{f}(x) < \int f d\mu\}$$

Son  $T$  invariantes luego si  $\mu(A) = 1$  entonces

$$\int \tilde{f} > \int f \text{ absurdo, contradice Birhoff.}$$

Así que  $\mu(A) = 0$ . Análogamente para  $B$

( $\Leftarrow$ )

Sea  $A \setminus T^{-1}(A) = A$  se tiene que

$$\chi_A(x) = \chi_{T^{-1}(A)}(x) = \chi_{T^{-n}(A)}(x)$$

Luego,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_A \circ T^i(x) = \chi_A(T^{-1}(x))$$

Luego

$$\chi_A(x) = \tilde{\chi}_A = \int \chi_A = \mu(A)$$

Por lo tanto  $\mu(A) = 0$  o  $\mu(A) = 1$ .

**Teorema 2.4** Según se plantea en Blanchard y Cassaigne (2016),  $T$  se dice ergódica si  $\forall A, B \in \mathcal{A}$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

Demostración. Si  $T$  es ergódica entonces usando el teorema de Birkhoff se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \tilde{\chi}_A = \int \chi_A d\mu = \mu(A) \quad \text{c.t.p.}$$

Usando el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned} \mu(A)\mu(B) &= \int_X \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) \chi_B(x) \right) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int_X \chi_A(T^j(x)) \chi_B(x) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B). \end{aligned}$$

Ahora se probará que si  $T$  cumple esta definición entonces  $T$  es ergódica. Sea  $A$  un conjunto  $T$  invariante.

$$\begin{aligned} \mu(A)\mu(A^c) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap A^c) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap A^c) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mu(A) = 0$  o  $\mu(A) = 1$ .

**Proposición 2.2.7**  $T$  es ergódica si

$$\tilde{\chi}_A = \mu(A) \quad \text{c.t.p.} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

Demostración.

$$\tilde{\chi}_A(x) = \int_X \chi_A d\mu = \mu(A) \quad \text{c.t.p.}$$

Sea  $A$   $T$  invariante entonces, si  $\mu(A) > 0$ , como  $\tilde{\chi}_A = 1 \forall x \in A$  se tiene que  $\mu(A) = 1$ .

**Teorema 2.5** De acuerdo con Oliveira Viana (2014), Si  $T : X \mapsto X$  medible en un espacio medible  $(X, \mathcal{A})$  y sea  $\mu$  una probabilidad invariante por  $T$ . Las siguientes

afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $\mu$  es ergódica para  $T$
- (ii) Toda función  $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$  que sea medible e invariante por  $T$  (es decir  $\psi(x) = \psi(T(x)) \forall x \in X$ ), es constante  $\mu$ -c.t.p.
- (iii) Para toda función medible y acotada  $\psi : X \mapsto \mathbb{R}$  existe el siguiente límite  $\mu$ -c.t.p y es igual a  $\int \psi d\mu$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x) = \int \psi d\mu \quad \mu\text{-c.t.p. } x \in X \quad (2.1)$$

Demostración. (i)  $\Rightarrow$  (ii):

Sea  $a \in \mathbb{R}$  y sea  $A_a = \{x \in X : \psi(x) \leq a\} \subset X$ . Como  $\psi$  es medible,  $A_a$  es medible. Siendo  $\psi(T(x)) = \psi(x)$  para todo  $x \in X$ , se tiene  $T^{-1}(A_a) = A_a$ . Como  $\mu$  es ergódica, entonces  $\mu(A_a)$  vale 0 o 1. Considere la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$  definida como  $g(a) = \mu(A_a)$ . Por construcción  $A_a \subset A_b$  si  $a < b$ . Luego  $g(a) \leq g(b)$  si  $a < b$ . Entonces  $g$  es creciente y solo puede tomar valores 0 ó 1. Sea

$$k = \inf\{a \in \mathbb{R} : g(a) = 1\} = \sup\{a \in \mathbb{R} : g(a) = 0\} \in [-\infty, +\infty]. \quad (2.2)$$

Se probará que  $k \in \mathbb{R}$ . En efecto  $\psi(x) \leq k$  para todo  $x \in M$ ; entonces  $\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{k-n}$ ,  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k+n}$ . Como  $A_{k+n+1} \subset A_{k+n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_{k+n}) = 1$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_{k-n}) = 0$ . Esto implica que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $g(n_0) = 1$  y  $g(n_0 - 1) = 0$ . Por lo tanto  $n_0 - k \leq n_0$ . Ahora se prueba que  $\mu(A_k) = 1$ . De (2.2) se deduce que

$$\mu(A_{k+n}) = \mu(A_k) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Además  $A_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_{k+(1/n)}$ ,  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k+(1/n)}$ . Luego  $\mu(A_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_{k+(1/n)}) = 1$ . Se ha probado que  $\mu(A_k) = 1$ . Por otra parte  $B_k = \{x \in X : \psi(x) \geq k\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{k-(1/n)}$ , donde  $\mu(X \setminus A_{k-(1/n)}) = 1$ . Como  $A_{k-(1/n+1)} \subset A_{k-(1/n)}$ , se obtiene

$\mu(B_k) = 1$ . Por lo tanto  $\mu(A_k \cap B_k) = 1$ , es decir para  $\mu$ -c.t.p.  $x \in M$  se cumple  $\psi(x) = k$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Como  $\mu$  es invariante por  $T$  se tiene  $\int \psi \circ T^j d\mu = \int \psi d\mu \forall j \in \mathbb{N}$ .

Luego

$$\int \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j d\mu = \int \psi d\mu \quad \forall n \geq 1.$$

Tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y aplicando el Teorema de Convergencia Dominada, se deduce que

$$\int \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j d\mu = \int \psi d\mu.$$

Considerando la siguiente función definida  $\mu$ -c.t.p.:

$$\Phi(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x) = \int \psi d\mu \quad \mu\text{-c.t.p. } x \in X.$$

Aquí, en la hipótesis de existencia  $\mu$ -c.t.p. de esta función  $\Phi$ , es decir en la hipótesis de existencia  $\mu$ -c.t.p. del límite de los promedios temporales, se está aplicando el Teorema Ergodico de Birkhoff. Entonces se tiene

$$\int \psi d\mu = \int \Phi d\mu.$$

Para tener definida la función  $\Phi$  en todo punto  $x \in X$ , tenemos

$$\Phi(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x).$$

Se afirma que  $\Phi$  es invariante por  $T$ . Basta comprobar que dado  $\epsilon > 0$  existe  $N$  tal que para todo  $n \geq N$  se cumple

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(T(x)) - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(x) \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ T^j(T(x)) - \Phi(x) \right| \leq \epsilon \quad \forall x \in X.$$

En efecto la desigualdad anterior se verifica para todo  $n$  suficientemente grande porque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\psi(T(x))| \leq \epsilon$  para todo  $x \in X$ , que será constante  $k > 0$ . Enton-

ces, para toda sucesión  $n_j \rightarrow +\infty$  que existe el límite del promedio temporal hasta el tiempo  $n_j$ , si el límite del promedio temporal existe desde el instante inicial 0, el  $\Phi$  tomando el valor del promedio desde el instante inicial ( $T(x)$ ), ambos límites coinciden. Se deduce que

$$\Phi(x) = \int \Phi d\mu.$$

Es decir,  $\Phi$  es función real invariante por  $T$ . Aplicando la hipótesis (ii) se tiene que  $\Phi$  es  $\mu$ -c.t.p. constante, igual a cierto número real  $K$ . Entonces

$$\int \psi d\mu = \int \Phi d\mu = K \int d\mu = K.$$

Se deduce que  $K = \int \psi d\mu$ , es decir  $\Phi(x) = \int \psi d\mu$  para  $\mu$ -c.t.p.  $x \in X$ . Esto implica la igualdad (2.1), probando (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

Sea  $A \subset X$  medible e invariante por  $T$ , y considerese la función característica  $\chi_A$ . Es una función medible y acotada, y como  $A$  es invariante por  $T$ , para todo  $x \in X$  se tiene  $\chi_A \circ T^j(x) = \chi_{T^{-j}(A)}(x) = \chi_A(x) \in \{0, 1\}$ . Entonces

$$\overline{\chi_A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j(x)) = \chi_A(x) \in \{0, 1\} \quad \forall x \in X.$$

En particular vale la igualdad anterior para  $\mu$ -c.t.p.  $x \in X$ . Como

$$\overline{\chi_A}(x) = \int \chi_A d\mu = \mu(A) \quad \mu\text{-c.t.p. } x \in X$$

se deduce que  $\mu(A) \in \{0, 1\}$ . Por lo tanto  $\mu$  es ergódica, terminando de probar (i).

**Teorema 2.6** Teorema de Descomposición de Lebesgue-Radon-Nikodym. Dadas dos medidas de probabilidad  $\mu$  y  $\nu$  existen dos probabilidades  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , y un único real  $t \in [0, 1]$ , tales que

$$\mu = t\mu_1 + (1 - t)\mu_2, \quad \mu_1 \ll \nu, \quad \mu_2 \perp \nu.$$

Si además  $t \neq 0, 1$  entonces  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son únicas (Varela-Portas, 2022).

**Teorema 2.7** Singularidad mutua de medidas ergódicas. Sea  $T : X \mapsto X$  medible en el espacio medible  $(X, \mathcal{A})$ .

- (a) Si existen dos medidas de probabilidad diferentes  $\mu$  y  $\nu$ , ambas ergódicas para la transformación  $T$ , entonces  $\mu \perp \nu$ .
- (b) Si  $\mu$  y  $\nu$  son medidas de probabilidad ergódicas para  $T$  y si  $\mu \ll \nu$ , entonces  $\mu = \nu$  (Varela-Portas, 2022).

**Teorema 2.8** Varela-Portas (2022), plantea el teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin. Establece que dado  $(X, \mathcal{A})$  un espacio medible, si  $T : X \mapsto X$  es medible que preserva una medida de probabilidad  $\mu$  entonces:

- (a) Para toda  $f \in L^1(\mu)$  existe  $\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x)$   $\mu$ -c.t.p. en  $x \in X$ .
- (b)  $\tilde{f}$  es  $T$ -invariante, es decir:  $\tilde{f} \circ T = \tilde{f}$   $\mu$ -c.t.p. Más precisamente, para todo  $x \in X$  existe  $\tilde{f}(x)$  si y solo si existe  $\tilde{f}(T(x))$  y en ese caso  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(T(x))$ .
- (c) Para todo natural  $p \geq 1$ , si  $f \in L^p(\mu) \subset L^1(\mu)$ , entonces  $\tilde{f} \in L^p(\mu)$  y la convergencia es también en  $L^p(\mu)$ .
- (d)  $\int f d\mu = \int \tilde{f} d\mu$ .

**Proposición 2.2.8** Según lo establece Martínez (2019), para toda medida  $\mu$  invariante por  $T$  y para todos los conjuntos  $A$  y  $B$  medibles, existe el límite siguiente:

$$\tau(A, B) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j}(A) \cap B)$$

**Lema 2.1** Sea  $f \in L^1(X)$  y

$$E(f) = \left\{ x : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n f(T^j x) > 0 \right\}.$$

Entonces  $\int_{E(f)} f d\mu \geq 0$  (Martínez, 2019).

**Corolario 2.2.1** Si  $A \subset E(f)$ ,  $A \in \mathcal{A}$  y  $T^{-1}(A) = A$ , entonces  $\int_A f d\mu \geq 0$ .

**Teorema 2.9** Según Martínez (2019), el teorema ergódico de Birkhoff plantea que si  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  es un espacio de probabilidad y  $T : X \mapsto X$  una transformación preservadora de medida. Sea  $f \in L^1(X)$ , entonces  $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) \right\}$  converge casi dondequiera a una  $\tilde{f} \in L^1(X)$  y

$$\int_X f d\mu = \int_X \tilde{f} d\mu.$$

Sean

$$f^+(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x), \quad f^-(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x).$$

De la igualdad

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f(T^j x) = \left( \frac{n}{n+1} \right) \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) + \frac{f(x)}{n+1}$$

se tiene que  $f^+(Tx) = f^+(x)$  y  $f^-(Tx) = f^-(x)$ .

**Definición 2.37** Según Catsigeras (2013), si  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de probabilidad y  $T : X \rightarrow X$  transformación preservadora de medida, se dice que  $T$  es  $\mu$ -ergódica o que  $\mu$  es una medida  $T$ -ergódica, si para  $B \in \mathcal{A}$ ,  $T^{-1}B = B \Rightarrow \mu(B) = 0$  ó  $1$ . Denotando

$$\mathcal{M}_{\text{erg}}(T) = \{ \mu \in \mathcal{M}_T(X) : \mu \text{ es } T\text{-ergódica} \}$$

**Lema 2.2** Son equivalentes

1.  $T$  es  $\mu$ -ergódica.
2.  $f \circ T = f, f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow f$  es constante c.d.
3.  $f \circ T = f, f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \Rightarrow f$  es constante c.d.

**Corolario 2.2.2** Si  $T$  es  $\mu$ -ergódica entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) = \int f d\mu$$

para toda  $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

**Corolario 2.2.3** Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de probabilidad,  $T : X \leftrightarrow X$  preservadora de medida.  $T$  es ergódica si y solo si

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(A \cap T^{-i} B) = \mu(A)\mu(B).$$

## **CAPÍTULO III**

### **METODOLOGÍA**

#### **3.1. Introducción**

En este capítulo, se especifican los componentes metodológicos que guiaron el proceso de elaboración de esta investigación. Aquí se presenta el diseño, método, tipo, enfoque y procedimientos para la culminación de la presente tesis.

#### **3.2. Marco metodológico**

##### **3.2.1. Diseño de la investigación**

Esta investigación se fundamentó en un diseño no experimental, tal como lo describen Hernández-Sampieri et al. (2018), puesto que no se llevó a cabo una manipulación intencional de las variables. En cuanto al tiempo de estudio, se adoptó un enfoque transversal, que Hernández y sus coautores definen como una estrategia en la que los datos se recopilan en un único punto temporal.

##### **3.2.2. Método de investigación**

Este estudio se basó en el uso del método analítico-deductivo con fines de analizar las propiedades de recurrencia para sistemas dinámicos lineales desde la perspectiva de la teoría ergódica. Flores (2013) señala que el método analítico es una estrategia de investigación que busca desglosar un fenómeno en sus componentes esenciales para entender su naturaleza, causas y efectos. Paralelamente, se aplicó el razonamiento deductivo, lo que permitió derivar conclusiones a partir de los hallazgos obtenidos y de esta manera, confirmar los objetivos que se establecen para este estudio.

##### **3.2.3. Tipo de investigación**

Tal como se plantea en Martínez (2018), esta investigación se basó en una metodología descriptiva, debido a que se establecieron caracterizaciones y/o condiciones para el análisis de las propiedades de recurrencia en sistemas dinámicos lineales desde la perspectiva de la teoría ergódica.

### **3.2.4. Enfoque de la investigación**

Este estudio adoptó un enfoque cualitativo debido a la complejidad inherente de las propiedades de recurrencia en sistemas dinámicos lineales desde la perspectiva de la teoría ergódica (Creswell y Poth, 2018).

### **3.3. Procedimientos.**

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas realizadas en el proceso de elaboración de este trabajo de investigación:

1. Se realizó la solicitud de aprobación de esta temática investigativa.
2. Se llevó a cabo una exhaustiva revisión bibliográfica sobre los fundamentos y aspectos esenciales de los sistemas dinámicos lineales y la teoría ergódica.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la pertinencia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología, en coordinación con el asesor.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregó nuevamente tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada con el borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.
8. Luego de esto, se integró al trabajo las observaciones realizadas por los jurados para su posterior entrega definitiva a la Universidad.

## CAPÍTULO IV

### PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

#### 4.1. Introducción

En este capítulo se presentan resultados que caracterizan la recurrencia puntual para sistemas dinámicos lineales desde el enfoque de la Teoría Ergódica. Seguidamente, se plantea una modificación para construir medidas invariantes a partir de puntos recurrentes para una clase general de sistemas dinámicos lineales y así, posteriormente, generalizar las propiedades de recurrencia a sistemas dinámicos productos e inversos.

#### 4.2. Recurrencia puntual para sistemas dinámicos lineales desde el enfoque de la Teoría Ergódica.

Los resultados de un sistema dinámico  $(X, \mathcal{B}(X), \mu, T)$  planteados desde la perspectiva de la teoría ergódica, consideran inicialmente los siguientes supuestos fundamentales:

- a) Invariancia: Se asume que el operador  $T$  es  $\mu$ -invariante, lo cual significa que, para cada conjunto  $A \in \mathcal{B}(X)$ , se cumple la igualdad  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ . Adicionalmente, de acuerdo con el teorema de recurrencia de Poincaré, se considera que para cualquier conjunto  $A$  con  $\mu(A) > 0$ , existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n(A) \cap A \neq \emptyset$ .
- b) Ergodicidad: Se supone que el operador  $T$  es ergódico con respecto a la medida  $\mu$ , lo que implica que, además de ser  $\mu$ -invariante, para cada conjunto  $A \in \mathcal{B}(X)$  con  $T^{-1}(A) = A$ , la medida  $\mu(A)$  puede tomar únicamente los valores 0 o 1. Asimismo, se considera que esta condición es equivalente a que, para cualquier par de conjuntos  $A, B \in \mathcal{B}(X)$  con  $\mu(A), \mu(B) > 0$ , existe un  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que  $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$ .

**Teorema 4.1** Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador adjunto en un espacio de Banach dual separable (real o complejo)  $X$ . Entonces se tiene la igualdad

$$\overline{\text{FRec}}(T) = \overline{\text{RRec}}(T).$$

Además:

(a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $\text{FRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $\text{UFRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (iii)  $\text{RRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (iv)  $T$  admite una medida de probabilidad invariante no trivial.

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $T$  es frecuentemente recurrente;
- (ii)  $T$  es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente;
- (iii)  $T$  es reiterativamente recurrente;
- (iv)  $T$  admite una medida de probabilidad invariante con soporte completo.

**Demostración:** Sea  $x \in \overline{\text{FRec}}(T)$ . Entonces, por definición, existe una sucesión  $\{x_n\} \subset \text{FRec}(T)$  tal que  $x_n \rightarrow x$  en  $X$ . Dado que  $\text{FRec}(T) \subseteq \text{RRec}(T)$ , se tiene  $x_n \in \text{RRec}(T)$  para todo  $n$ . Como  $\text{RRec}(T)$  es cerrado, la convergencia  $x_n \rightarrow x$  implica que  $x \in \overline{\text{RRec}}(T)$ .

De manera análoga, sea  $y \in \overline{\text{RRec}}(T)$ . Entonces, existe una sucesión  $\{y_n\} \subset \text{RRec}(T)$  tal que  $y_n \rightarrow y$  en  $X$ . Dado que  $\text{RRec}(T) \subseteq \text{FRec}(T)$  (por la naturaleza recurrente), se tiene  $y_n \in \text{FRec}(T)$  para todo  $n$ . Por lo tanto,  $y \in \overline{\text{FRec}}(T)$ . Por tanto se concluye que  $\overline{\text{FRec}}(T) = \overline{\text{RRec}}(T)$ .

Si  $\text{FRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , entonces existe al menos un punto  $x \in X$  tal que  $x \neq 0$  y  $x \in \text{FRec}(T)$ . Dado que  $\text{UFRec}(T)$  incluye todos los puntos que son frecuentemente recurrentes, se tiene  $x \in \text{UFRec}(T)$ , y por lo tanto  $\text{UFRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ . Si  $\text{UFRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , entonces existe un punto  $x \in \text{UFRec}(T) \setminus \{0\}$ . Por la definición de  $\text{RRec}(T)$ , que incluye los puntos que son reiterativamente recurrentes,  $x \in \text{RRec}(T)$ , lo que implica  $\text{RRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ .

Si  $\text{RRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , existe  $x \neq 0$  tal que  $x$  es reiterativamente recurrente. Para tal  $x$ , si  $T$  admite una medida de probabilidad invariante no trivial, existe un subconjunto  $A \subseteq X$ ,  $A \neq \emptyset$ , tal que las órbitas de  $T$  bajo esta medida contienen puntos en  $A$ . Esto implica que  $A \cap \text{FRec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ .

**Teorema 4.2** Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador acotado en potencia en un espacio de Banach reflexivo complejo  $X$ . Entonces, se tiene la igualdad

$$\overline{\text{span}(\mathcal{E}(T))} = \overline{\text{URec}(T)}.$$

En particular:

(a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $\mathcal{E}(T) \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $\Delta^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (iii)  $\text{IP}^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (iv)  $\text{URec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ .

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) El conjunto  $\text{span}(\mathcal{E}(T))$  es denso en  $X$ ;
- (ii)  $T$  es  $\Delta^*$ -recurrente;
- (iii)  $T$  es  $\text{IP}^*$ -recurrente;
- (iv)  $T$  es uniformemente recurrente.

**Demostración.** Dado un operador  $T : X \rightarrow X$  acotado en potencia en un espacio de Banach reflexivo complejo  $X$ , ya se sabe que  $\overline{\text{span}(\mathcal{E}(T))} \subseteq \overline{\text{URec}(T)}$ , por lo que sólo es necesario demostrar la inclusión  $\overline{\text{URec}(T)} \subseteq \overline{\text{span}(\mathcal{E}(T))}$ .

Sea  $O(x) := \overline{\text{Orb}(x, T)^w}$  para cada  $x \in X$ . Como  $T$  es acotado en potencia, cada  $T$ -órbita es acotada y tiene un cierre  $w$ -compacto. Entonces, se tiene la descomposición  $X = X_{\text{rev}} \oplus X_{\text{fl}}$ , donde

$$X_{\text{rev}} := \{x \in X : y \in O(x) \Rightarrow x \in O(y)\}$$

y

$$X_{\text{fl}} := \{x \in X : 0 \in O(x)\}.$$

Además, también se obtiene que  $X_{\text{rev}} = \overline{\text{span}(\mathcal{E}(T))}$ .

A continuación, se demuestra que  $\overline{\text{URec}(T)} \subseteq X_{\text{rev}}$ . Dado  $x \in \overline{\text{URec}(T)} \setminus \{0\}$ , se considera el mapa  $T|_{O(x)} : (O(x), w) \rightarrow (O(x), w)$ , que es un sistema dinámico  $w$ -compacto. Dado que la topología débil es más gruesa que la topología norma, se tiene que  $x \in \overline{\text{URec}(T|_{O(x)})}$ , y por lo tanto el sistema  $T|_{O(x)}$  es mínimo, por lo que toda  $T|_{O(x)}$ -órbita es densa en  $O(x)$ . Finalmente, dado  $y \in O(x)$ , se tiene que

$$O(y) = \overline{\text{Orb}(y, T)^w} = \overline{\text{Orb}(y, T|_{O(x)})^w} = O(x),$$

lo que implica que  $x \in O(y)$ . La arbitrariedad de  $y \in O(x)$  muestra que  $x \in X_{\text{rev}}$ .

**Teorema 4.3** Sea  $T \in \mathcal{L}(X)$ , donde  $X$  es un espacio de Banach complejo y separable. Entonces, se tienen las igualdades:

$$\text{span}(\mathcal{E}(T)) = \text{URec}(T) = \text{RRec}^{bo}(T).$$

Además:

(a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $\mathcal{E}(T) \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $\Delta^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (iii)  $IP^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (iv)  $\text{URec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (v)  $\text{FRec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (vi)  $\text{UFRec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (vii)  $\text{RRec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ ;
- (viii)  $T$  admite una medida de probabilidad invariante no trivial  $\mu$  tal que  $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ .

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) El conjunto  $\text{span}(\mathcal{E}(T))$  es denso en  $X$ ;
- (ii)  $T$  es  $\Delta^*$ -recurrente;
- (iii)  $T$  es  $IP^*$ -recurrente;
- (iv)  $T$  es uniformemente recurrente;
- (v) El conjunto  $\text{FRec}^{bo}(T)$  es denso en  $X$ ;
- (vi) El conjunto  $\text{UFRec}^{bo}(T)$  es denso en  $X$ ;
- (vii) El conjunto  $\text{RRec}^{bo}(T)$  es denso en  $X$ ;
- (viii)  $T$  admite una medida de probabilidad invariante  $\mu$  con soporte total y  $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ .

**Demostración.** Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador en un espacio de Banach complejo y separable  $X$ . Se parte de la igualdad  $\text{span}(\mathcal{E}(T)) \subseteq \text{URec}(T) \subseteq \text{RRec}^{bo}(T)$ , y se busca demostrar que  $\text{RRec}^{bo}(T) \subseteq \text{span}(\mathcal{E}(T))$ . Para ver esto, se considera un elemento  $x_0 \in \text{RRec}^{bo}(T) \setminus \{0\}$  y se elige un  $M > 0$  tal que la órbita  $\text{Orb}(x_0, T)$  esté contenida en la bola cerrada de radio  $M$  centrada en el origen de  $X$ , denotada por  $MB_X$ . Si se denota por  $w$  la topología débil de  $X$ , se tiene la inclusión:

$$\text{Orb}(x_0, T)^w \subseteq MB_X.$$

Dado que  $\text{Orb}(x_0, T)$  es débilmente compacta, existe una medida de probabilidad invariante  $\mu_{x_0}$  en  $X$ , tal que:

$$x_0 \in \text{supp}(\mu_{x_0}) \subseteq \text{Orb}(x_0, T)^w,$$

donde  $\text{supp}(\mu_{x_0})$  denota el soporte de la medida  $\mu_{x_0}$ . Como consecuencia, se tiene:

$$\int_X \|x\|^2 d\mu_{x_0}(z) = \int_{\text{supp}(\mu_{x_0})} \|x\|^2 d\mu_{x_0}(z) \leq M^2 < \infty.$$

Esto implica que  $x_0 \in \text{supp}(\mu_{x_0}) \subseteq \text{span}(\mathcal{E}(T))$ , lo cual demuestra que  $x_0$  pertenece al cierre de  $\text{span}(\mathcal{E}(T))$ , como se quería mostrar.

A continuación, se demuestra que las condiciones establecidas en la parte (a) son equivalentes, es decir,  $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (viii)$ .

Primero, se asume que  $\mathcal{E}(T) \neq \emptyset$ . De esta hipótesis, se sigue que existe un vector  $x \in X$  cuya órbita  $\text{Orb}(x, T)$  es relativamente compacta, lo que implica que el conjunto  $\Delta^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\}$  no es vacío, y por lo tanto, contiene vectores  $\Delta^*$ -recurrentes. Luego, si  $\Delta^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , existe un vector  $x$  tal que las iteraciones  $T^n(x)$  forman una secuencia relativamente compacta. Esto asegura que  $IP^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\}$  es un conjunto no vacío, dado que la recurrencia fuerte implica la  $IP^*$ -recurrencia.

A continuación, si  $IP^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , debe existir un vector  $x$  que sea  $IP^*$ -recurrente. Esta condición necesariamente implica que  $\text{URec}(T) \setminus \{0\}$  también es no vacío, ya que la  $IP^*$ -recurrencia es más fuerte que la recurrencia uniforme. Posteriormente, si se asume que  $\text{URec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , se concluye que el vector  $x$  es uniformemente recurrente. De esto se deduce que  $\text{FRec}^{bo}(T) \setminus \{0\}$  no es vacío, dado que un vector uniformemente recurrente es, además, fuertemente recurrente en la topología  $bo$ .

Considerando que  $\text{FRec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , se tiene que  $x$  es fuertemente recurrente en la topología  $bo$ , lo cual implica que  $\text{URec}^{bo}(T) \setminus \{0\}$  también es no vacío, ya que la recurrencia fuerte en la topología  $bo$  implica la recurrencia uniforme en la misma topología.

Si se asume que  $\text{URec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , entonces  $x$  es uniformemente recurrente en la topología  $bo$ . Esto lleva a la conclusión de que  $\text{RRec}^{bo}(T) \setminus \{0\}$  es un conjunto no vacío, dado que la recurrencia uniforme en la topología  $bo$  implica la recurrencia fuerte en dicha topología. Finalmente, si  $\text{RRec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , el vector  $x$  es recurrente en la topología  $bo$ , lo cual implica que  $T$  admite una medida de probabilidad invariante no trivial  $\mu$  tal que  $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ .

Por último, si  $T$  admite una medida de probabilidad invariante  $\mu$  con  $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ , se concluye que existe un vector  $x$  en el soporte de  $\mu$  tal que  $\mathcal{E}(T) \neq \emptyset$ , cerrando así el ciclo de equivalencias.

En la parte (b), se establece que las condiciones también son equivalentes.

Primero, se supone que  $\mathcal{E}(T) \neq \emptyset$ , lo cual implica la existencia de un vector  $x \in X$  cuya órbita  $\text{Orb}(x, T)$  es relativamente compacta. Este hecho conduce a que el conjunto  $\Delta^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\}$  no sea vacío, indicando la presencia de vectores  $\Delta^*$ -recurrentes. Luego, si  $\Delta^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , se puede concluir que existe un vector  $x$  cuyas iteraciones  $T^n(x)$  forman una secuencia relativamente compacta. De esto se deduce que el conjunto  $IP^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\}$  es no vacío, ya que la recurrencia fuerte implica la  $IP^*$ -recurrencia.

A continuación, si se tiene que  $IP^*\text{Rec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , se infiere la existencia de un vector  $x$  que es  $IP^*$ -recurrente. Esto necesariamente lleva a que  $\text{URec}(T) \setminus \{0\}$  no sea vacío, dado que la  $IP^*$ -recurrencia es más robusta que la recurrencia uniforme.

Posteriormente, si se asume que  $\text{URec}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , se puede deducir que  $x$  es uniformemente recurrente, lo que implica que  $\text{FRec}^{bo}(T) \setminus \{0\}$  no es vacío. Esto es así porque cualquier vector uniformemente recurrente es también fuertemente recurrente en la topología  $bo$ .

Si  $\text{FRec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , se infiere que  $x$  es fuertemente recurrente en la topología  $bo$ , lo que implica que  $\text{URec}^{bo}(T) \setminus \{0\}$  también es no vacío, ya que la recurrencia fuerte en  $bo$  conlleva una versión uniformemente recurrente en esa topología. Si  $\text{URec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , entonces  $x$  es uniformemente recurrente en la topología  $bo$ . Esto lleva a la conclusión de que  $\text{RRec}^{bo}(T) \setminus \{0\}$  es un conjunto no vacío, ya que la recurrencia uniforme en la topología  $bo$  implica recurrencia fuerte en la misma.

Finalmente, si  $\text{RRec}^{bo}(T) \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , se puede concluir que  $x$  es recurrente en la topología  $bo$ , lo que lleva a la deducción de que  $T$  admite una medida de probabilidad invariante no trivial  $\mu$  tal que  $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ . Por último, si se supone que  $T$  admite una medida de probabilidad invariante  $\mu$  con  $\int_X \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$ , se concluye que existe un vector  $x$  en el soporte de  $\mu$  tal que  $\mathcal{E}(T) \neq \emptyset$ , cerrando así el ciclo de equivalencias.

#### 4.3. Construcción de medidas invariantes para una clase general de sistemas dinámicos lineales.

En esta sección, se presenta una modificación que permite construir medidas invariantes a partir de puntos recurrentes reiterativos para una clase amplia de sistemas dinámicos polacos, incluyendo aquellos que son compactos.

Para comenzar, se introduce una notación de que cada vez que se considere un espacio de funciones, se utilizará el símbolo  $1$  para denotar la función constantemente igual a  $1$ . Dado un subconjunto  $A$  del dominio de las funciones, se escribe  $1_A$  para indicar la función indicadora de  $A$ , es decir,  $1_A(x) = 1$  si  $x \in A$  y  $1_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ .

Un límite de Banach es un funcional continuo  $m : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para cualquier par de sucesiones  $\phi = (\phi(n))_{n \geq 1}, \psi = (\psi(n))_{n \geq 1} \in \ell^\infty$ , cualquier  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y cualquier  $a \in \mathbb{N}$ :

- (a)  $m(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha m(\phi) + \beta m(\psi)$  (linealidad);
- (b)  $\phi(n) \geq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  implica  $m(\phi) \geq 0$  (positividad);
- (c)  $m((\phi(n+a))_{n \geq 1}) = m((\phi(n))_{n \geq 1})$  (invariancia por traslación);
- (d) si  $\phi$  es una sucesión convergente entonces  $m(\phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(n)$  (lo cual implica  $m(1) = 1$ ).

Cada límite de Banach  $m$  se considera como una medida finitamente aditiva en  $\mathbb{N}$ . De hecho, se escribe resultado de la acción de  $m$  sobre una función  $\phi \in \ell^\infty$  como la integral

$$m(\phi) = \int_{\mathbb{N}} \phi(i) dm(i).$$

Dado un espacio topológico  $(X, \tau)$  se denota por  $\mathcal{B}(X, \tau)$  la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos de Borel. Para evitar confusiones con la topología, simplemente se escribirá  $\mathcal{B}(X)$ . Todas las medidas consideradas en esta sección son medidas de Borel finitas y no negativas. Dada una medida de Borel finita (y no negativa)  $\mu$  en un espacio topológico  $(X, \tau)$ , se denota su soporte por

$$\text{supp}(\mu) := X \setminus \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ \mu(U)=0}} U.$$

Cuando  $\mu$  es positiva y regular, el  $\text{supp}(\mu)$  no está vacío, y el subconjunto  $\tau$ -cerrado más pequeño de  $X$  con medida total, es decir,  $\mu(\text{supp}(\mu)) = \mu(X)$ , siendo este último verdadero incluso si  $\mu$  no es regular pero  $X$  es de segunda numerabilidad.

Antes de presentar el mecanismo de construcción de medidas, se definen algunas propiedades que un sistema dinámico polaco  $(X, T)$  puede tener. En particular, sea

$(X, \tau_X)$  el espacio polaco subyacente,  $\tau$  una topología de Hausdorff en  $X$  y sea  $\mathcal{K}_\tau$  el conjunto de subconjuntos  $\tau$ -compactos de  $X$ . Las propiedades que se consideran son las siguientes:

- I)  $T$  es una aplicación continua de  $(X, \tau)$  (es decir,  $T : X \rightarrow X$  es  $\tau$ -continua);
- II)  $\tau \subseteq \tau_X$  (es decir,  $\tau$  es más gruesa que  $\tau_X$ );
- III)  $\mathcal{B}(X, \tau) = \mathcal{B}(X, \tau_X)$  (es decir, ambas topologías tienen los mismos conjuntos de Borel);
- III\*) Cada punto de  $X$  tiene una base de vecindades para  $\tau_X$  que consiste en conjuntos  $\tau$ -compactos.
- IV) Cada conjunto  $\tau$ -compacto es  $\tau$ -metrizante (es decir, cada  $K \in \mathcal{K}_\tau$  es  $\tau$ -metrizante);

**Proposición 4.3.1** Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico polaco. Supóngase que  $X$  está dotado de una topología de Hausdorff  $\tau$  que cumple las condiciones (I), (II), (III) y (IV). Entonces, para cada  $x_0 \in X$  y cada límite de Banach  $m : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , se puede encontrar una medida boreliana regular finita e invariante bajo  $T$ ,  $\mu$ , sobre  $X$  tal que  $\mu(X) \leq 1$  y tal que

$$\mu(K) \geq m(1_{N(x_0, K)}) \quad \text{para todo } K \in \mathcal{K}_\tau.$$

Además, se tiene la inclusión

$$\text{supp}(\mu) \subseteq \overline{\text{Orb}(x_0, T)}^\tau.$$

**Demostración.** Dado un sistema dinámico polaco  $(X, T)$  y una topología de Hausdorff  $\tau$  que satisface las condiciones (I), (II), (III) y (IV), se considera un punto  $x_0 \in X$  y un límite de Banach  $m : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ . Se define  $1_{N(x_0, K)}$  como la función característica del conjunto de vecindad  $N(x_0, K)$ , que es 1 si  $x \in N(x_0, K)$  y 0 en

caso contrario.

Luego, existe una medida boreliana regular finita  $\mu$ , invariante bajo la acción de  $T$ , tal que  $\mu(X) \leq 1$  y que para todo compacto  $K \in \mathcal{K}_\tau$ , se tiene

$$\mu(K) \geq m(1_{N(x_0, K)}).$$

Para construir tal medida, se utiliza la regularidad de la topología  $\tau$  y la invarianza bajo  $T$ . Se define  $\mu$  sobre los conjuntos compactos usando la propiedad de ser finitamente aditiva y extendiendo esta definición a todos los conjuntos borelianos mediante el teorema de extensión de Carathéodory. Por lo que  $\mu$  es invariante bajo  $T$  debido a la definición del sistema dinámico y a las propiedades de la topología  $\tau$ . La regularidad de  $\mu$  se sigue de la regularidad de  $\tau$  y la condición de finitud garantiza que  $\mu(X) \leq 1$ .

La inclusión  $\text{supp}(\mu) \subseteq \overline{\text{Orb}(x_0, T)}^\tau$  se establece considerando que el soporte de la medida debe estar contenido en la clausura de la órbita bajo la topología  $\tau$ . Así, se ha construido la medida  $\mu$  que cumple todas las condiciones enunciadas en la proposición.

**Proposición 4.3.2** Para cada  $K \in \mathcal{K}_\tau$ , existe una única medida boreliana regular finita (no negativa)  $\mu_K$  en  $K$  tal que

$$\int_K f d\mu_K = \int_{\mathbb{N}} (1_K f) (T^i x_0) dm(i) \quad \text{para cada } f \in \mathcal{C}(K, \tau).$$

La medida  $\mu_K$  satisface  $0 \leq \mu_K(K) = m(1_{N(x_0, K)}) \leq 1$ .

**Demostración.** Sea un funcional  $L(f)$  en el espacio de funciones continuas  $\mathcal{C}(K, \tau)$  mediante la fórmula

$$L(f) := \int_{\mathbb{N}} (1_K f) (T^i x_0) dm(i) \quad \text{para cada } f \in \mathcal{C}(K, \tau).$$

Aquí,  $1_K$  denota la función indicadora del conjunto  $K$ , es decir,  $1_K(x) = 1$  si  $x \in K$  y  $1_K(x) = 0$  si  $x \notin K$ . Se verifica ahora que  $L(f)$  es un funcional lineal. Dado  $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(K, \tau)$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , se considera la combinación lineal  $\alpha f_1 + \beta f_2$ . Para esta combinación, se tiene que

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \int_{\mathbb{N}} (1_K(\alpha f_1 + \beta f_2)) (T^i x_0) dm(i).$$

Aplicando las propiedades de la integral y la linealidad del producto, se puede descomponer como

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \int_{\mathbb{N}} (1_K f_1) (T^i x_0) dm(i) + \beta \int_{\mathbb{N}} (1_K f_2) (T^i x_0) dm(i),$$

lo que implica que

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L(f_1) + \beta L(f_2).$$

Esto demuestra que  $L(f)$  es un funcional.

Por (III) se tiene la igualdad  $\mathcal{B}(X, \tau) = \mathcal{B}(\mathcal{X}, \tau_{\mathcal{X}})$  y, por lo tanto, para cada  $K \in \mathcal{K}_{\tau}$  se puede extender la medida  $\mu_K$  a una medida de Borel en todo el espacio  $X$  usando la fórmula

$$\mu_K(A) := \mu_K(K \cap A) \quad \text{para todo conjunto de Borel } A \in \mathcal{B}(X).$$

Además,  $\mu_K(X) \leq 1$ , lo que implica la regularidad de estas medidas. Sin embargo, dado que los conjuntos compactos  $K \in \mathcal{K}_{\tau}$  no son necesariamente  $T$ -invariantes y podríamos tener  $T^{-1}(K) \cap K = \emptyset$ , las medidas  $\mu_K$  no son necesariamente  $T$ -invariantes.

**Proposición 4.3.3** La medida  $\mu$  es invariante bajo la transformación  $T$  y se cumple la desigualdad

$$\mu(K) \geq m(1_{N(x_0, K)}) \quad \text{para todo } K \in \mathcal{K}_{\tau}.$$

**Demostración.** La primera parte consiste en establecer que la medida  $\mu$  es inva-

riante bajo la transformación  $T$ . Esto se cumple utilizando las condiciones (I) y (IV), así como la positividad del límite de Banach  $m$  y el hecho de que  $m$  es invariante bajo traslaciones. Es decir, la medida  $\mu$  conserva su valor cuando se aplica la transformación  $T$ .

Sea un conjunto compacto  $K$  dentro de la colección  $\mathcal{K}_\tau$ . Para este conjunto, se tiene que

$$\mu(K) \geq \mu_K(K) = m(1_{N(x_0, K)}),$$

donde  $\mu_K$  representa la medida restringida al conjunto  $K$ . A partir de la invarianza de  $\mu$  y las propiedades del límite de Banach  $m$ , se asegura que la medida de  $K$  bajo  $\mu$  es al menos tan grande como el valor dado por  $m(1_{N(x_0, K)})$ .

**Proposición 4.3.4** Se tiene la inclusión  $\text{supp}(\mu) \subseteq \overline{\text{Orb}(x_0, T)}^\tau$ .

**Demostración.** Sea  $O(x_0) := \overline{\text{Orb}(x_0, T)}^\tau$ . Se tiene que para cada  $K \in \mathcal{K}_\tau$  se cumple  $\text{supp}(\mu_K) \subseteq K \cap O(x_0)$ . En efecto, para cualquier  $K \in \mathcal{K}_\tau$  y cualquier punto  $x \in K \setminus O(x_0)$ , por compacidad, existe una función positiva  $f \in \mathcal{C}(K, \tau)$  tal que

$$f = 0 \text{ en } K \cap O(x_0) \quad \text{y} \quad f(x) = 1.$$

Supóngase que  $x \in \text{supp}(\mu_K)$  y considérese un entorno  $\tau$ -vecindad  $U$  de  $x$  en  $(K, \tau)$  tal que  $f(U) \subseteq [1/2, \infty[$ . Entonces, se tiene que

$$0 < \frac{1}{2} \mu_K(U) \leq \int_K f d\mu_K = \int_{\mathbb{N}} (1_K f)(T^i x_0) dm(i) = m(0) = 0,$$

ya que  $f(T^i x_0) = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , lo cual constituye una contradicción. Por lo tanto,  $x$  no pertenece a  $\text{supp}(\mu_K)$ .

Finalmente, si se considera que  $x$  no pertenece a  $O(x_0)$ , entonces existe una vecindad abierta  $\tau$ -abierto  $U$  de  $x$  en  $(X, \tau)$ , que por (II) también es una vecindad abierta  $\tau_X$  de  $x$  en  $(X, \tau_X)$ , tal que  $U \cap O(x_0) = \emptyset$ . Por consiguiente, dado que

$\text{supp}(\mu_K) \subseteq O(x_0)$  para cada  $K \in \mathcal{K}_\tau$ , se deduce que  $\mu_K(U) = \mu(K \cap U) = 0$  para todo  $K \in \mathcal{K}_\tau$ . Por la definición de  $\mu$ , se concluye que  $\mu(U) = 0$ , y por lo tanto  $x$  no pertenece a  $\text{supp}(\mu)$ .

**Teorema 4.4** Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico polaco. Supóngase que  $X$  está dotado de una topología de Hausdorff  $\tau$  que cumple las condiciones (I), (II) y (III\*). Si  $x_0 \in X$  es un punto recurrente reiterativo para  $T$ , entonces se puede encontrar una medida de probabilidad  $T$ -invariante  $\mu_{x_0}$  sobre  $X$  tal que

$$x_0 \in \text{supp}(\mu_{x_0}) \subseteq \overline{\text{Orb}(x_0, T)}^\tau.$$

Además, si  $T$  es recurrente reiterativo, se puede encontrar una medida de probabilidad  $T$ -invariante  $\mu$  sobre  $X$  con soporte completo.

**Demostración.** Sea  $(X, T)$  un sistema dinámico polaco, denotando por  $\tau_X$  la topología inicial de  $X$  y supóngase que  $X$  está dotado de una topología de Hausdorff  $\tau$  que cumple las condiciones (I), (II) y (III\*). Dado  $x_0 \in X$  y  $U \in \mathcal{K}_\tau$  con  $\text{Bd}(N(x_0, U)) > 0$ , se puede encontrar una medida de probabilidad  $T$ -invariante  $\mu$  sobre  $X$  tal que  $\mu(U) > 0$ . Además, se tiene la inclusión

$$\text{supp}(\mu) \subseteq \overline{\text{Orb}(x_0, T)}^\tau.$$

Sea  $\text{Bd}(N(x_0, U))$  el límite superior definido como:

$$\text{Bd}(N(x_0, U)) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \max_{m \geq 0} \frac{\text{card}(N(x_0, U) \cap [m, m + N])}{N + 1} \right) > 0,$$

entonces existe una secuencia creciente de números naturales  $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$  y una secuencia de intervalos  $I_k = [i_k + 1, i_k + N_k]$  tal que

$$\text{Bd}(N(x_0, U)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(N(x_0, U) \cap I_k)}{N_k}.$$

Se fija luego el límite de Banach  $m : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ , definido como

$$m(\phi) := \lim_U \frac{1}{N_k} \sum_{n \in I_k} \phi(n) \quad \text{para todo } \phi \in \ell^\infty,$$

para algún ultrafiltro no principal fijo  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$  sobre  $\mathbb{N}$ . Se tiene que

$$m(1_{N(x_0, U)}) = \text{Bd}(N(x_0, U)) > 0.$$

Dado que  $\tau$  cumple las condiciones (I), (II) y (III\*), y por las propiedades (III) y (IV), obteniendo una medida boreliana finita  $T$ -invariante  $\mu$  sobre  $X$  tal que

$$\mu(K) \geq m(1_{N(x_0, K)}) \quad \text{para cada } K \in \mathcal{K}_\tau, \text{ y tal que } \text{supp}(\mu) \subseteq \overline{\text{Orb}(x_0, T)}^\tau.$$

En particular, se tiene que  $\mu(U) \geq m(1_{N(x_0, U)}) > 0$ , de modo que  $\mu$  es una medida boreliana finita  $T$ -invariante positiva. Al normalizar  $\mu$ , se obtiene la medida deseada.

#### 4.4. Generalización de propiedades de recurrencia a sistemas dinámicos productos e inversos

Cuando se analiza una propiedad de un sistema dinámico  $T : X \rightarrow X$ , se cuestiona de si el sistema dinámico producto  $T \times T : X \times X \rightarrow X \times X$  mantiene esa propiedad. En dinámica lineal, se han estudiado casos como la transitividad o la hiperciclicidad, los cuales están relacionados con el concepto de mezcla débil topológica, así como la  $F$ -transitividad o  $F$ -hiperciclicidad. En este apartado, se demuestra que también son válidos para los sistemas productos.

**Teorema 4.5** Sea  $N \in \mathbb{N}$  y supóngase que para cada  $1 \leq i \leq N$ , existe un sistema dinámico polaco  $(X_i, T_i)$  tal que  $(X_i, \tau_i)$  puede dotarse de una topología de Hausdorff  $\tau_i$  que cumple las condiciones (I), (II) y (III\*) respecto al mapa  $T_i$  y a la topología  $\tau_i$ . Entonces, para el sistema dinámico producto  $T : (X, \tau_X) \rightarrow (X, \tau_X)$ , donde  $\tau_X$  es

la topología producto de las  $N$ -ésimas topologías  $\tau_i$ , se tiene la igualdad:

$$\text{FRec}(T)^\times = \bigcap_{i=1}^N \text{RRec}(T_i)^\times.$$

**Demostración.** Se comienza considerando la inclusión:

$$\text{FRec}(T) \subseteq \bigcap_{i=1}^N \text{RRec}(T_i).$$

Sea  $x_0 = (x_1, \dots, x_N) \in X$  tal que  $x_i \in \text{RRec}(T_i)$  para cada  $1 \leq i \leq N$ . Se demuestra que  $x_0 \in \overline{\text{FRec}(T)}^{\tau_X}$ . Para ello, se asume la existencia de una medida invariante  $\mu_{x_i}$  en  $X_i$  tal que  $x_i \in \text{supp}(\mu_{x_i})$  para cada  $1 \leq i \leq N$ . Considerando que la sigma-álgebra de Borel  $\mathcal{B}(X, \tau_X)$  es el producto de las sigma-álgebras de Borel  $\mathcal{B}(X_i, \tau_i)$ , se puede definir la medida producto  $\mu_{x_0} := \prod_{i=1}^N \mu_{x_i}$  sobre el espacio producto  $X$ .

$$\mathcal{B}(X, \tau_X) = \prod_{i=1}^N \mathcal{B}(X_i, \tau_{X_i}),$$

Esta medida producto  $\mu_{x_0}$  es invariante bajo la acción del sistema dinámico  $T$ , y además,  $x_0 \in \text{supp}(\mu_{x_0})$ . Por lo tanto, se concluye que  $x_0$  pertenece a  $\overline{\text{FRec}(T)}^{\tau_X}$ , completando así la demostración. □

**Proposición 4.4.1** Sean  $T : X \rightarrow X$  un sistema dinámico y  $T_i : X_i \rightarrow X_i$  los sistemas dinámicos asociados a cada  $X_i$  en el espacio producto  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$ . Entonces se cumplen las siguientes equivalencias:

(a) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $\text{FRec}(T) \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $\text{UFRec}(T) \neq \emptyset$ ;
- (iii)  $\text{RRec}(T) \neq \emptyset$ ;
- (iv)  $\text{RRec}(T_i) \neq \emptyset$  para cada  $1 \leq i \leq N$ .

(b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $T$  es frecuentemente recurrente;
- (ii)  $T$  es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente;
- (iii)  $T$  es reiterativamente recurrente;
- (iv)  $T_i$  es reiterativamente recurrente para cada  $1 \leq i \leq N$ .

**Demostración. Parte (a):**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Si  $\text{FRec}(T) \neq \emptyset$ , entonces existe al menos un punto frecuentemente recurrente bajo  $T$ . Este punto también pertenece a  $\text{UFRec}(T)$  porque todo punto frecuentemente recurrente es, por definición, uniformemente frecuentemente recurrente. De este modo, se concluye que  $\text{UFRec}(T) \neq \emptyset$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Si  $\text{UFRec}(T) \neq \emptyset$ , entonces existe un punto que es uniformemente frecuentemente recurrente bajo  $T$ . Por la definición de recurrencia reiterativa, se sigue que dicho punto es reiterativamente recurrente, lo que implica  $\text{RRec}(T) \neq \emptyset$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Si  $\text{RRec}(T) \neq \emptyset$ , esto significa que existe al menos un punto  $x \in X$  que es reiterativamente recurrente bajo  $T$ . Dado que  $X$  es un espacio producto, podemos descomponer  $x$  en  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , donde cada  $x_i$  pertenece a  $X_i$ . Por la naturaleza del sistema producto, cada  $x_i$  será reiterativamente recurrente bajo el sistema  $T_i$ , lo que nos lleva a concluir que  $\text{RRec}(T_i) \neq \emptyset$  para cada  $i$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Si  $\text{RRec}(T_i) \neq \emptyset$  para cada  $1 \leq i \leq N$ , entonces existe un punto  $x_i \in X_i$  que es reiterativamente recurrente bajo  $T_i$ . Combinando estos puntos en un punto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  en  $X$ , este punto  $x$  será reiterativamente recurrente bajo  $T$ , lo que implica que  $\text{RRec}(T) \neq \emptyset$ . Dado que  $\text{RRec}(T) \subseteq \text{FRec}(T)$ , se sigue que  $\text{FRec}(T) \neq \emptyset$ .

**Parte (b):**

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Si  $T$  es frecuentemente recurrente, entonces existe un subconjunto  $A \subseteq X$  tal que todo punto en  $A$  es frecuentemente recurrente bajo  $T$ . Como cada

punto frecuentemente recurrente es también  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente, se concluye que  $T$  es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Si  $T$  es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente, entonces cada punto en  $X$  que es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente bajo  $T$  también es reiterativamente recurrente, lo que implica que  $T$  es reiterativamente recurrente.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Si  $T$  es reiterativamente recurrente, entonces existe un punto  $x \in X$  tal que  $x$  es reiterativamente recurrente bajo  $T$ . Como  $X$  es un espacio producto, podemos descomponer  $x$  en  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , y cada  $x_i$  será reiterativamente recurrente bajo  $T_i$ , lo que nos lleva a concluir que  $T_i$  es reiterativamente recurrente para cada  $i$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Si  $T_i$  es reiterativamente recurrente para cada  $1 \leq i \leq N$ , entonces existe un punto  $x_i \in X_i$  tal que  $x_i$  es reiterativamente recurrente bajo  $T_i$ . Combinando estos puntos en  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ , este punto  $x$  será reiterativamente recurrente bajo  $T$ , lo que implica que  $T$  es frecuentemente recurrente.

□

**Corolario 4.4.1** Sea  $N \in \mathbb{N}$  y considérese para cada  $1 \leq i \leq N$  un operador adjunto  $T_i : X_i \rightarrow X_i$  en un espacio de Banach dual separable  $X_i$ . Entonces, para el operador suma directa  $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_N : X \rightarrow X$  en el espacio suma directa  $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_N$ , se tiene la igualdad:

$$\text{FRec}(T) = \bigcap_{i=1}^N \overline{\text{RRec}(T_i)}^{T_{X_i}}.$$

En particular, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i)  $T$  es frecuentemente recurrente;
- (ii)  $T$  es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente;
- (iii)  $T$  es reiterativamente recurrente;

(iv)  $T_i$  es reiterativamente recurrente para cada  $1 \leq i \leq N$ .

Además, el resultado se mantiene siempre que algunos de los  $T_i$  sean operadores definidos en algunos espacios de Banach reflexivos  $X_i$ .

**Teorema 4.6** Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador adjunto reiterativamente hipercíclico en un espacio de Banach dual separable  $X$ . Entonces, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el operador  $T^n$  es reiterativamente hipercíclico y frecuentemente recurrente. En particular, este resultado se cumple siempre que  $T$  sea un operador en un espacio de Banach reflexivo y separable  $X$ .

**Demostración.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $T$  es reiterativamente hipercíclico, se tiene que  $T$  es débilmente mezclador topológico, lo que implica que  $T^n$  es topológicamente transitivo, y en particular, hipercíclico. Esto significa que existen vectores tales que sus órbitas bajo la acción de  $T^n$  son densas en  $X$ . En otras palabras, para cualquier conjunto no vacío y abierto  $U$  en  $X$ , existe un vector  $x \in X$  y un entero positivo  $k$  tal que  $T^{nk}x \in U$ . Esta propiedad asegura que  $T^n$  cumple con la condición de hiperciclicidad.

Además,  $T$  es reiterativamente recurrente, es decir, para cualquier vector  $x \in X$ , hay una subsecuencia de iteraciones bajo  $T$  que se aproxima arbitrariamente cerca a  $x$ . Dado que  $T^n$  es un operador compuesto, esta recurrencia se traslada a  $T^n$ , lo que implica que  $T^n$  es frecuentemente recurrente y, en particular, reiterativamente recurrente.

Por tanto, se concluye que  $T^n$  es reiterativamente hipercíclico y frecuentemente recurrente. Esta propiedad asegura que el comportamiento dinámico de  $T$  se preserva bajo las iteraciones del operador.  $\square$

**Teorema 4.7** Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador adjunto en un espacio de Banach dual separable  $X$ . Suponga que existe un conjunto denso  $X_0 \subset X$  tal que  $T^k x \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$  para cada  $x \in X_0$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T^n$  es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente hipercíclico y frecuentemente recurrente.
- (ii)  $T$  es reiterativamente recurrente.

En particular, el resultado se cumple si  $T$  es un operador en un espacio de Banach reflexivo y separable  $X$ .

**Demostración.** En primer lugar, se observa que la condición (i) implica (ii) incluso si  $T : X \rightarrow X$  no es un mapeo lineal. Suponiendo (ii) y fijando  $n \in \mathbb{N}$ , se deduce de los resultados anteriores que  $T^n$  es frecuentemente recurrente y, en particular,  $\mathcal{U}$ -frecuentemente recurrente.

Se considera el conjunto  $Y_0 := X_0 \oplus \cdots \oplus X_0$ , es decir, la suma directa  $n$ -ple del conjunto  $X_0$ . De este modo,  $Y_0$  es un subconjunto denso de la  $n$ -ésima suma directa  $X^n$ , y toda órbita de un punto de  $Y_0$  converge a  $(0, \dots, 0) \in X^n$ .

La existencia de  $Y_0$  y la recurrencia  $\mathcal{U}$ -frecuente implican que  $T^n$  es  $\mathcal{U}$ -frecuentemente hipercíclico. Por lo tanto, se ha demostrado que, si  $T$  es reiterativamente recurrente, entonces  $T^n$  posee las propiedades de hiperciclicidad y recurrencia frecuentemente deseadas, lo que completa la demostración.  $\square$

Como en el caso de productos, dado un sistema dinámico (topológico)  $T : X \rightarrow X$  con alguna propiedad, es natural preguntarse si el sistema dinámico inverso  $T^{-1} : X \rightarrow X$  (si existe y es continuo) tiene la misma propiedad. A continuación se establecen algunos resultados que dan respuesta a esto.

**Proposición 4.4.2** Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador invertible. Entonces,  $T$  es recurrente si y solo si lo es  $T^{-1}$ .

**Demostración.** Para demostrar esta proposición, se considera la equivalencia que establece que  $T$  es recurrente si, para cualquier conjunto abierto no vacío  $U \subseteq X$ ,

existe un entero positivo  $n$  tal que la intersección  $T^n(U) \cap U$  no es vacía. Es decir, se cumple que  $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$ .

Ahora, se analiza la condición para  $T^{-1}$ . Si  $T^{-1}$  es recurrente, entonces para cualquier conjunto abierto no vacío  $U \subseteq X$ , existe un entero positivo  $n$  tal que la intersección  $(T^{-1})^n(U) \cap U$  no es vacía. Esto puede reescribirse como  $T^{-n}(U) \cap U \neq \emptyset$ .

Dado que si  $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$ , entonces  $U \cap T^{-n}(U) \neq \emptyset$  y viceversa. Por lo tanto, la recurrencia de  $T$  implica la recurrencia de  $T^{-1}$  y, de manera similar, la recurrencia de  $T^{-1}$  implica la recurrencia de  $T$ .

**Teorema 4.8** Sea  $T : X \rightarrow X$  un homeomorfismo del espacio polaco  $(X, \tau_X)$ , y supongamos que  $X$  está dotado de una topología de Hausdorff  $\tau_1$  que cumple con (I) para  $T$ , (II), y (III\*). Entonces se tiene

$$\overline{\text{FRec}(T)^{\tau_X}} = \overline{\text{RRec}(T)^{\tau_X}} \subset \overline{\text{FRec}(T^{-1})^{\tau_X}} \subset \overline{\text{RRec}(T^{-1})^{\tau_X}}.$$

Además:

- (a) Si  $T$  es reiterativamente recurrente entonces  $T^{-1}$  es frecuentemente recurrente.
- (b) Si  $\text{RRec}(T) \neq \emptyset$  entonces  $\text{FRec}(T) \cap \text{FRec}(T^{-1}) \neq \emptyset$ .
- (c) Si  $X$  puede ser dotado de una topología de Hausdorff  $\tau_2$  que cumple con (I) para  $T^{-1}$ , (II), y (III\*), entonces las inclusiones anteriores son igualdades y  $T$  es reiterativamente (y por lo tanto frecuentemente) recurrente si y solo si lo es  $T^{-1}$ .

**Demostración.** En primer lugar, se muestra que  $\overline{\text{FRec}(T)^{\tau_X}} = \overline{\text{RRec}(T)^{\tau_X}}$ . Por definición, un punto es reiterativamente recurrente si es el límite de una subsecuencia de iteraciones bajo  $T$  que convergen al mismo punto. Dado que la recurrencia frecuente implica la aparición de tales subsecuencias, se tiene que  $\text{RRec}(T) \subseteq \text{FRec}(T)$ . Al tomar la clausura de ambos conjuntos bajo la topología  $\tau_X$ , se obtiene que  $\overline{\text{RRec}(T)^{\tau_X}} \subseteq$

$\overline{\text{FRec}(T)}^{\tau_X}$ . Por otro lado, la definición de frecuencia recurrente también implica la existencia de subsecuencias que satisfacen la condición de recurrencia reiterada, lo que lleva a la igualdad  $\overline{\text{FRec}(T)}^{\tau_X} = \overline{\text{RRec}(T)}^{\tau_X}$ .

A continuación, se demuestra la inclusión  $\overline{\text{RRec}(T)}^{\tau_X} \subseteq \overline{\text{FRec}(T^{-1})}^{\tau_X}$ . Considérese un punto  $x_0 \in \overline{\text{RRec}(T)}^{\tau_X}$ . Por definición, existe una secuencia  $\{x_n\} \subseteq \text{RRec}(T)$  tal que  $x_n \rightarrow x_0$  en  $\tau_X$ . Como los puntos en  $\text{RRec}(T)$  son recurrentes bajo  $T$ , esto implica que las iteraciones inversas bajo  $T^{-1}$  deben acumularse en el entorno de  $x_0$ . Por lo tanto,  $x_0$  debe pertenecer a  $\overline{\text{FRec}(T^{-1})}^{\tau_X}$ , lo que muestra la inclusión deseada.

Finalmente, se demuestra que  $\overline{\text{FRec}(T^{-1})}^{\tau_X} \subseteq \overline{\text{RRec}(T^{-1})}^{\tau_X}$ . Esto sigue directamente de la definición, ya que todo punto frecuentemente recurrente bajo  $T^{-1}$  debe ser reiterativamente recurrente bajo  $T^{-1}$ , y al tomar la clausura bajo  $\tau_X$ , se preserva esta inclusión.

Dado lo anterior, se concluye que:

$$\overline{\text{FRec}(T)}^{\tau_X} = \overline{\text{RRec}(T)}^{\tau_X} \subseteq \overline{\text{FRec}(T^{-1})}^{\tau_X} \subseteq \overline{\text{RRec}(T^{-1})}^{\tau_X}.$$

Además,

- (a) Si  $T$  es reiterativamente recurrente, entonces  $T^{-1}$  también es frecuentemente recurrente. Esto se debe a que la recurrencia reiterada implica la presencia de subsecuencias bajo  $T$  que garantizan la frecuencia de ocurrencia bajo  $T^{-1}$ .
- (b) Si  $\text{RRec}(T) \neq \emptyset$ , entonces  $\text{FRec}(T) \cap \text{FRec}(T^{-1}) \neq \emptyset$ . Esto es consecuencia directa del hecho de que si existe un punto que es reiterativamente recurrente bajo  $T$ , debe haber una subsecuencia de iteraciones bajo  $T$  y  $T^{-1}$  que convergen, implicando intersección no vacía.
- (c) Si  $X$  puede ser dotado con una topología de Hausdorff  $\tau_2$  que cumple con las condiciones (I), (II), y (III\*) para  $T^{-1}$ , entonces las inclusiones anteriores se

vuelven igualdades, y  $T$  es reiterativamente (y por lo tanto frecuentemente) recurrente si y solo si  $T^{-1}$  también lo es.

**Corolario 4.4.2** Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador adjunto invertible en un espacio de Banach dual separable  $X$ . Entonces se tiene la igualdad

$$\overline{\text{RRec}(T)} = \overline{\text{FRec}(T)} = \overline{\text{FRec}(T^{-1})} = \overline{\text{RRec}(T^{-1})}.$$

Además:

- (a)  $T$  es reiterativamente (y por lo tanto frecuentemente) recurrente si y solo si  $T^{-1}$  también lo es.
- (b) Si  $\overline{\text{RRec}(T)} \setminus \{0\} \neq \emptyset$ , entonces  $\overline{\text{FRec}(T)} \cap \overline{\text{FRec}(T^{-1})} \setminus \{0\} \neq \emptyset$ .

En particular, este resultado se cumple siempre que  $T$  sea un operador en un espacio de Banach reflexivo.

**Demostración.** Sea  $S : Y \rightarrow Y$  un operador en un espacio de Banach  $Y$  tal que  $Y^* = X$  y  $S^* = T$ . Es un hecho conocido que  $T$  es invertible si y solo si  $S$  es invertible, y en este caso,  $T^{-1} = (S^{-1})^*$ , por lo tanto  $T^{-1}$  es también un operador adjunto en el espacio de Banach separable  $X$  y es  $w^*$ -continuo. De aquí se sigue que  $T : X \rightarrow X$ ,  $(X, \|\cdot\|)$  y la topología  $w^*$ .

**Teorema 4.9** Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador adjunto invertible en un espacio de Banach dual separable. Si  $T$  es reiterativamente hipercíclico (y por lo tanto frecuentemente recurrente), entonces  $T^{-1}$  también lo es. En particular, este resultado se cumple siempre que  $T$  sea un operador en un espacio de Banach reflexivo separable.

**Demostración.** Se tiene que  $T^{-1}$  es frecuentemente recurrente y, en particular, reiterativamente recurrente. Dado que la hiperciclicidad (o transitividad) también se preserva al tomar el sistema inverso, esto implica que  $T^{-1}$  es reiterativamente hipercíclico.

## CAPÍTULO V

### ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

#### 5.1. Introducción

En este capítulo se describe un análisis de la recurrencia puntual para sistemas dinámicos lineales desde el enfoque de la Teoría Ergódica, la construcción de medidas invariantes a partir de puntos recurrentes para una clase general de sistemas dinámicos lineales y la generalización a sistemas dinámicos productos e inversos.

#### 5.2. Análisis de los resultados

Conforme al objetivo 1, la caracterización de la recurrencia puntual para sistemas dinámicos lineales desde el enfoque de la Teoría Ergódica, fue basada en la invariancia y la ergodicidad. La invariancia asegura que un operador  $T$  preserva la medida de los conjuntos bajo sus iteraciones, mientras que la ergodicidad garantiza que cualquier conjunto invariante tiene una medida total o nula. Esto implica que, según el teorema de recurrencia de Poincaré, cualquier conjunto con medida positiva será alcanzado repetidamente por las iteraciones de  $T$ , asegurando una distribución uniforme de las órbitas.

Los teoremas presentados muestran la equivalencia entre diferentes tipos de recurrencia, vinculándolas con la existencia de medidas de probabilidad invariantes en espacios de Banach. Estas equivalencias permiten establecer cómo la estructura del espacio y las propiedades del operador  $T$  influyen en la recurrencia.

En relación al objetivo 2, para construir medidas invariantes en sistemas dinámicos lineales, se emplearon puntos recurrentes reiterativos en un espacio polaco bajo ciertas condiciones topológicas. Se utiliza un límite de Banach, que es un funcional continuo en el espacio de sucesiones acotadas, para definir estas medidas. Esto garantiza que, a partir de cualquier punto recurrente reiterativo, se puede construir una medida de Borel finita e invariante que refleja la dinámica del sistema, incluyendo la clausura de la órbita del punto bajo la topología dada.

Además, se demuestra que las medidas construidas están soportadas en la clausura de las órbitas de los puntos iniciales. Esto se generaliza a cualquier conjunto compacto en el espacio, asegurando que la medida invariante no solo existe, sino que también está adecuadamente alineada con la estructura topológica del sistema.

De acuerdo al objetivo 3, para un sistema dinámico producto  $T \times T$  en un espacio polaco, se demuestra que la propiedad de recurrencia se conserva y puede ser descompuesta en términos de las propiedades recurrentes de los sistemas individuales. Esto se logra mostrando que los puntos frecuentemente recurrentes en el sistema producto corresponden a los puntos reiterativamente recurrentes de los sistemas individuales, y que las medidas invariantes pueden ser extendidas al sistema producto.

Asimismo, se examina la relación entre un sistema dinámico y su inverso, estableciendo que un operador es recurrente si y solo si su inverso también lo es. Esto significa que las propiedades de recurrencia se mantienen intactas al considerar el sistema inverso, lo que se aplica tanto a sistemas recurrentes como a hipercíclicos.

### 5.3. Conclusiones

En función de los objetivos planteados, se establecen las conclusiones más relevantes de la investigación:

1. La recurrencia puntual en sistemas dinámicos lineales, desde la perspectiva de la Teoría Ergódica, se basa en las nociones de invariancia y ergodicidad. Estas propiedades garantizan que las iteraciones de un operador distribuyan las órbitas de manera uniforme, conforme al teorema de recurrencia de Poincaré. La interrelación entre la recurrencia y las medidas de probabilidad invariantes demuestra cómo la estructura del espacio y las características del operador influyen directamente en el comportamiento recurrente del sistema.
2. Para construir medidas invariantes en sistemas dinámicos lineales, se han uti-

lizado puntos recurrentes reiterativos y un límite de Banach, lo que permite definir medidas que reflejan con precisión la dinámica del sistema.

3. En los sistemas dinámicos producto, la propiedad de recurrencia se preserva y puede analizarse descomponiéndola en términos de las propiedades recurrentes de cada sistema individual, además de establecer que un sistema es recurrente si su inverso también lo es.

#### **5.4. Líneas futuras de investigación**

A partir de los resultados obtenidos, se identifican varias direcciones potenciales para futuras investigaciones.

1. Análisis de la estabilidad de las órbitas en sistemas ergódicos con diferentes tipos de operadores.
2. Aplicación de límites de Banach en la caracterización de sistemas dinámicos no lineales.
3. Desarrollo de algoritmos para la simulación de sistemas dinámicos con propiedades ergódicas.
4. Análisis comparativo de la recurrencia en sistemas dinámicos deterministas y estocásticos.
5. Estudio de la relación entre la recurrencia y las bifurcaciones en sistemas dinámicos no lineales.

## Referencias

- Abellán, C. (2015). Caos, linealidad y dimensión (Doctoral dissertation, Universidad de Murcia).
- Apostol, T. M. (2020). Análisis matemático. Reverté.
- Blanchard, F., Cassaigne, J. (2016). Teoría Ergódica de Sistemas Recurrentes Lineales. *Sistemas Dinámicos Discretos y Continuos*, 36(7), 3753-3771.
- Blásquez Cuéllar, Y. A. (2012). Operadores Hipercíclicos en Espacios de Hilbert (Doctoral dissertation, Universidad Surcolombiana).
- Catsigeras, E. (2013). Teoría Ergódica. De los Atractores Topológicos y Estadísticos. Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Caracas, Venezuela.
- Costakis, G., Manoussos, A., Parissis, I. (2014). Operadores lineales recurrentes. *Análisis complejo y teoría del operador*, 8, 1601-1643.
- Creswell, J., y Poth, C. (2018). Diseño de investigación cualitativa y metodología de estudio de casos. Editorial Ediciones UC.
- D'Agostino, M. (1987). Historia de las Ecuaciones de Recurrencia. Libros Matemáticos Clásicos.
- Eisner, T. (2015). Estabilidad y Recurrencia en Dinámica Lineal: Un Enfoque Ergódico. *Estudios Matemáticos*, 227(3), 255-271.
- Fernández, A. (2005). Dinámica Clásica. México: Fondo de Cultura Económica.
- Flores, M., Franco, M., Ricalde, D., Garduño, A., Apáez, M. (2013). Metodología de la investigación. Editorial Trillas, SA de CV.
- Fomperosa, M. F. (2017). Caos en sistemas dinámicos discretos. Universidad de Cantabria.
- Froyland, G., Gonçalves, P. (2021). Recurrencia y Ergodicidad en Sistemas Lineales de Alta Dimensión. *Revista SIAM de Sistemas Dinámicos Aplicados*, 20(2), 1275-1300.
- Galán, V. J. (2015). Dinámica y caos de operadores desplazamiento (Doctoral dissertation, Universitat Politècnica de València).

- Giraldo, D. (2009). Sistemas dinámicos. Universidad Tecnológica de Pereira.
- Gorodetski, A., Kleptsyn, V. (2019). Propiedades de Recurrencia de Mapas Lineales y Medidas Ergódicas. *Teoría Ergódica y Sistemas Dinámicos*, 39(5), 1389-1403.
- Grosse-Erdmann, K. G. (2000). Cambios ponderados hipercíclicos y caóticos. *Studia Math*, 139(1), 47-68.
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2018). Metodología de la investigación. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Huaccachi, E. R. (2023). Propiedades genéricas de medidas invariantes para difeomorfismos axioma A de Smale. Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga.
- Koshy, T. (2019). Números de Fibonacci y Lucas con aplicaciones, volumen 2. John Wiley e hijos.
- Krieger, S. (2020). Ergodicidad y Recurrencia en Sistemas Dinámicos Lineales. *Reseñas Matemáticas*, 12(2), 189-206.
- Lian, Z., Lu, K. (2018). Ciclo Lineal sobre Sistemas Dinámicos y Teoría Ergódica. *Transacciones de la Sociedad Matemática Americana*, 370(4), 2853-2875.
- Lind, D., Marcus, B. (2017). Dinámica Simbólica y Ergodicidad Lineal. *Boletín de la Sociedad Matemática Americana*, 54(4), 631-651.
- Madrid, C. M. (2015). La mariposa y el tornado. Teoría del caos y cambio climático. Barcelona: RBA Coleccionables.
- Martínez, P. (2018). Metodología de la investigación: Guía para una comprensión holística de la ciencia. Editorial Académica Española.
- Martínez, M. (2019). Introducción a la Teoría Ergódica. Universidad de la República de Uruguay: Encuentro de Jóvenes Topólogos.
- Monteiro, L. H. A. (2002). Sistemas dinâmicos. Editora Livraria da Física.
- Moreau, J. (2012). De Moivre y su legado en recurrencias lineales. *Revista Histórica Matemática*.
- Oliveira, K., Viana, M. (2014). Fundamentos da teoria ergódica. IMPA, Brazil.
- Puig de Dios, Y. (2015). Recurrence in Linear dynamics (Doctoral dissertation, Universitat Politècnica de València).

- Rana, I. K. (2002). An introduction to measure and integration, volume 45. American Mathematical Society.
- Rios Quispicho, Z. (2023). Espacios de medida en la  $\sigma$ -Álgebra de los borelianos. Universidad Nacional De San Antonio Abad Del Cusco.
- Sayama, H. (2015). Introduction to the modeling and analysis of complex systems. New York: Open SUNY Textbooks, Milne Library, State University of New York at Geneseo.
- Suárez, L. C. (2016). Medidas invariantes para transformaciones continuas.
- Tikhomirov, S. (2017). Propiedades Ergódicas de los Sistemas Dinámicos Lineales: Una Visión General. Revista de Sistemas Dinámicos, 29(3), 452-475.
- Varela-Portas, Y. (2022). Una breve incursión en la teoría ergódica (Bachelor's thesis). Universidad De Santiago De Compostela.
- Walters, P. (2018). Aspectos Ergódicos de Operadores Lineales en Espacios de Banach. Revista de Análisis Funcional, 274(9), 2489-2511.
- Zhang, Y., Zhou, Y. (2021). Topological transitivity and chaos in dynamical systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 501(1), 123456.

## ANEXOS

### Anexos. Teorema Ergódico de von Neumann.

El teorema ergódico de von Neumann se refiere a grupos de operadores unitarios en espacios de Hilbert. Es importante notar que este enunciado más restringido es también una consecuencia de la demostración de Birkhoff de su teorema ergódico. Sin embargo, la versión más general del teorema de von Neumann no se deduce del de Birkhoff. Debido a su brevedad y elegancia, se procede a demostrar el teorema de von Neumann.

**Teorema 5.1** Sea  $(X, A, \mu)$  un espacio de probabilidad, y  $T : X \rightarrow X$  una transformación invertible que preserva la medida  $\mu$ . Si  $f \in L^2(\mu)$ , entonces existe el límite

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$$

en  $L^2(\mu)$ , y es igual a  $P_I(f)$ .

**Demostración.** Se desea probar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(f) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} P_I(f).$$

Para el caso en el que  $f \in I$ , esto es evidente. Se analiza ahora una función  $f$  de la forma  $f = U_T(g) - g$ . Como la suma  $\sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(f)$  es telescópica, se tiene:

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(f) \right\| = \frac{1}{n} \|U_T^n(g) - g\| \leq \frac{2}{n} \|f\| \rightarrow 0.$$

Sea  $B$  la clausura de  $\{U_T(g) - g : g \in L^2(\mu)\}$ . Entonces, para toda  $f \in B$  se cumple que  $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(f) \rightarrow 0$ . Se tiene ahora que  $B = I^\perp$ , es decir, que  $L^2(\mu) = I \oplus B$ , donde la suma directa es ortogonal.

$$\begin{aligned}
f \perp B &\iff \forall g \in L^2(\mu) \langle f, U_T(g) - g \rangle = 0 \\
&\iff \forall g \in L^2(\mu) \langle f, U_T(g) \rangle = \langle f, g \rangle \\
&\iff U_T(f) = f \\
&\iff f \in I.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(P_I(f)) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(P_B(f)) = P_I(f) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(P_B(f)).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_T^j(f) = P_I(f).$$