

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Facultad de Postgrado y Educación Continuada
Departamento de Postgrado

Trabajo de Postgrado para Optar por el Título de Maestría en
Matemáticas

Título

Método de Newton para la resolución de Ecuaciones de Orden Superior.

Sustentante

Yusmeiry Bautista Bautista

Asesor

M.Sc. Rainier Sánchez

Cotuí, Provincia Sánchez Ramírez

Año académico, 2024.

TÍTULO

MÉTODO DE NEWTON PARA LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE
ORDEN SUPERIOR.

Declaración de Autoría

Los conceptos emitidos en este trabajo de investigación son de la exclusiva responsabilidad de la autora. Las citas y referencias bibliográficas se han realizado respetando los derechos de autor, liberando a la UTECO de cualquier responsabilidad, sin embargo, para la reproducción total o parcial de este trabajo, es necesaria su autorización.

Título

Método de Newton para la resolución de Ecuaciones de Orden Superior.

Proyecto de Postgrado presentado por Yusmeiry Bautista Bautista para optar por el título de Maestría en Matemáticas

Composición del tribunal

MA. Leomar Reyes Abreu

Jurado de metodología

MA. Lidia Santos

Jurado de Redacción

Dr. Víctor José Galán

Jurado de Contenido

Lic. Yuderka Reyes

Directora de Postgrado

CALIFICACIÓN FINAL:_____

Índice general

Declaración de autoría	III
Dedicatoria.....	VIII
Resumen.....	X
CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN.	1
1.1 Antecedentes	1
1.1.1 Breve biografía de Isaac Newton	1
1.1.2 Antecedentes históricos del método de Newton	2
1.1.3 Antecedentes académicos	4
1.2 Planteamiento del problema	6
1.3 Justificación	7
1.4 Objetivos	8
1.4.1 General	8
1.4.2 Objetivos	8
1.5 Alcances y límites	9
CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL	10
2.1 Ecuaciones de orden superior	10
2.2 Método iterativo	11
2.2.1 Orden de convergencia	15
2.2.2 Errores	16
2.2.3 Error relativo y absoluto	18
2.2.4 Redondeo y truncamiento	18
2.2.5 Índices de eficiencia	19
2.2.6 Orden de convergencia computacional	21
2.3 Método de Newton	21
2.3.1 Construcciones y variantes del método de Newton	23
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA	25
3.1 Marco metodológico	25
3.1.1 Diseño	25

3.1.2	Método	25
3.1.3	Tipo	25
3.1.4	Enfoque	25
3.2	Procedimientos	26
CAPÍTULO IV. PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS		27
4.1	Convergencia del método de Newton	27
4.1.1	Convergencia local	27
4.1.2	Convergencia global	29
4.1.3	Convergencia Semilocal	34
4.2	Orden e índice de eficiencia computacional del método de Newton apli- cado a la resolución de ecuaciones de orden superior	45
4.2.1	Índice de eficiencia	45
4.2.2	Orden de convergencia computacional	46
4.3	Eficacia y limitaciones del Método de Newton según la naturaleza de las soluciones de ecuaciones de orden superior	50
4.3.1	Eficacia	50
4.3.2	Limitaciones	52
CAPÍTULO V. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS		55
5.1	Análisis de los resultados	55
5.2	Conclusiones	56
5.3	Líneas futuras de investigación	57
Referencias		59
Anexos		61

Índice de figuras

4.1	Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$	47
4.2	Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$	53

Índice de cuadros

4.1	Estimaciones para la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$	48
4.2	Orden de convergencia computacional promedio del método de Newton.	49

Dedicatorias.

Dios: en primer lugar, le entrego mi más profundo agradecimiento. Su infinita sabiduría y amor han sido mi guía y fortaleza en cada paso de este arduo camino. En los momentos de duda y cansancio, él me sostuvo, recordándome que con fe todo es posible.

Roanny Sánchez Bautista. Mi hija, mi tesoro más preciado y mi mayor fuente de inspiración. Cada sacrificio, cada desvelo y cada esfuerzo ha sido por ti y para ti. Eres la luz que ilumina mi vida, la razón por la que nunca me rendí. Que este trabajo sea una prueba de que, con amor y determinación, se pueden alcanzar las metas más altas.

Rolando Sánchez Vásquez. Mi esposo, mi compañero de vida y de sueños, gracias por darme fuerza en los momentos difíciles. Tu paciencia y amor han sido fundamentales para que este logro sea una realidad. Gracias por estar a mi lado, por tus palabras de aliento y por estar firme en esta travesía.

Mi familia. Que siempre ha sido mi roca. A mis padres, mis abuelos, hermanos y demás seres queridos, les agradezco desde lo más profundo de mi corazón por su apoyo incondicional, por creer en mí y por estar presentes en cada etapa de este proceso. Su amor y aliento me dieron la fuerza necesaria para seguir y no darme por vencida.

A mis suegros. Agradezco no solo su apoyo constante, sino también por su generosidad, gracias por ayudarme y por brindarme un hombro en el que apoyarme.

Compañeras de maestría: Gloria, Ana dolores, Damary, Raquel y Rosario Yissel. , quienes se convirtieron en una segunda familia durante este recorrido. Juntas compartimos no solo el conocimiento, sino también los desafíos, las alegrías y las victorias, gracias por su amistad y por los momentos de solidaridad que hicieron de esta

experiencia algo inolvidable. Este logro también es de todas.

Al asesor. Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesor de tesis, Rainier Sánchez por su invaluable guía, apoyo y paciencia a lo largo de este proceso. Su conocimiento, dedicación y constante motivación han sido fundamentales para el desarrollo de esta investigación.

A todos y cada uno de ustedes, gracias. Sin su apoyo, amor y comprensión, este sueño no se habría hecho realidad. Esta tesis es tanto mía como suya, y les dedico con el corazón lleno de gratitud este logro que hemos alcanzado juntos.

República Dominicana
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL CIBAO ORIENTAL (UTECO)
Universidad Patrimonio de la Comunidad



Sustentante
Yusmeiry Bautista Bautista

Asesor
M.Sc. Raynier Sánchez

RESUMEN

Este trabajo presenta un análisis del método de Newton para la solución de ecuaciones de orden superior. Se centró en evaluar la convergencia del método de Newton, probar mediante funciones test el índice de eficiencia computacional y determinar la eficacia y las limitaciones según la naturaleza de las soluciones de ecuaciones de orden superior.

La metodología siguió un diseño no experimental y transversal, utilizando el método analítico-deductivo con un enfoque cualitativo, además, de ser de tipo explicativa-descriptiva.

Con esta investigación, se probó que el método de Newton es efectivo para resolver ecuaciones de orden superior, pues posee un orden de convergencia cuadrático y un índice de eficiencia de 1.4142. Sin embargo, su eficacia depende de una suposición inicial adecuada, ya que puede fallar si la derivada se anula o si la función presenta comportamientos oscilatorios, lo que puede llevar a la divergencia o a una raíz incorrecta.

Palabras claves: Método de Newton, Convergencia, Ecuaciones de Orden Superior, Índice de eficiencia.

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se contemplan los antecedentes históricos y académicos, que fundamentaron esta investigación, se estableció el planteamiento del problema, justificación, se definieron los objetivos, el alcance y los límites de la misma.

1.1. Antecedentes

1.1.1. Breve biografía de Isaac Newton

Fue un matemático, físico y astrónomo inglés, una de las grandes figuras de la historia de la ciencia, nació en Woolsthorpe, cerca de Grantham, en Lincolnshire, el 25 de Diciembre de 1642 y murió en Nansington el 20 de Mayo de 1727, hijo de un labrador acomodado, muerto antes de su nacimiento, su madre Ana Ayscough, se casó poco después con Bernabé Smyth, rector de Nortwitham, y confió al pequeño Isaac, que entonces tenía tres años, a los cuidados de su abuela, quien lo envió a la escuela rural. A los doce años fue enviado a estudiar a la escuela de Grantham, hospedándose en casa del doctor Clark, un farmacéutico de la población (Westfall, 2021).

En 1661, Newton ingresó al Trinity College de la Universidad de Cambridge, donde comenzó a explorar su pasión por las matemáticas y la física. Durante su tiempo en la universidad, se sumergió en la lectura de obras científicas y desarrolló su propia comprensión de las matemáticas y la óptica. En 1665, debido a la peste bubónica que asolaba Inglaterra, Newton regresó a su hogar en Woolsthorpe. Durante ese año, realizó una serie de descubrimientos cruciales en matemáticas, óptica y física. Formuló sus primeras ideas sobre el cálculo infinitesimal, la ley de la gravitación universal y la naturaleza de la luz y el color (Guicciardini, 2018).

En 1687, publicó su obra más influyente, “Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica” (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), conocida comúnmente como los “Principia”. En este libro, presentó las leyes del movimiento, que revolucionaron la comprensión de la física. También formuló la ley de la gravitación universal, que

unificó las descripciones del movimiento celestial y terrestre.

Newton fue reconocido por sus contribuciones y fue elegido presidente de la Royal Society en 1703. Murió el 20 de marzo de 1727 en Londres, dejando un legado perdurable en la ciencia y las matemáticas. Sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal siguen siendo fundamentales en la física y su método de enfoque basado en la observación y la experimentación continúa influyendo en la forma en que se hace la ciencia.

1.1.2. Antecedentes históricos del método de Newton

El método de Newton es posiblemente uno de los procesos de iteración más antiguos y conocidos, con sus primeras versiones originándose en la antigua Babilonia, en el reino de Mesopotamia, actualmente Irak (Bailey, 1989). Este método numérico fue detallado por Sir Isaac Newton en “Sobre el análisis mediante ecuaciones con un número infinito de términos”, escrito en 1669, y en “Método de las fluxiones”, escrito en 1671 pero traducido y publicado en 1736 por John Colson. Sin embargo, la descripción de Newton difiere significativamente de la descripción moderna. Newton aplicaba el método solo a polinomios y no consideraba las aproximaciones sucesivas X_n , sino que calculaba una secuencia de polinomios para llegar a la aproximación de la raíz x . Además, Newton veía el método como puramente algebraico y no reconoció la conexión con el cálculo (Silva, 2003).

En una carta escrita por Isaac Newton a sus colegas Barrow y Collins en 1669, mostraba un ejemplo de cómo resolver numéricamente una ecuación. Newton ilustraba su técnica con el ejemplo $x^3 - 2x - 5 = 0$ y argumentaba que, por tanteo, se observa que la solución está cerca de 2 (Fernández y Jiménez, 2001).

Al hacer $x = 2 + \varepsilon$ y sustituir en la ecuación, se obtiene:

$$\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 + 10\varepsilon - 1 = 0 \tag{1.1}$$

Ignorando los términos $\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2$ con el pretexto de que ε es pequeño, se llega a que $10\varepsilon - 1 = 0$ o $\varepsilon = 0.1$. Entonces $x = 2.1$ es una aproximación mejor que la inicial. Al hacer ahora $\varepsilon = 0.1 + \nu$ y sustituir en (1.1), se obtiene:

$$\nu^3 + 6.3\nu^2 + 11.23\nu + 0.061 = 0$$

Ignorando de nuevo los términos en ν de grado mayor o igual que dos, se llega a que $\nu = -0.0054$ y, por tanto, $x = 2.0946$ es una aproximación que mejora las anteriores. Newton indicaba que el proceso se puede repetir las veces que sean necesarias.

La idea de Newton consiste en añadir un término corrector a una aproximación inicial dada. Para obtener esta aproximación, trunca el binomio de Newton en el segundo término en expresiones del tipo:

$$(a + \varepsilon)^n \simeq a^n + na^{n-1}\varepsilon$$

De esta manera, para obtener el valor aproximado de ε , simplemente se debe resolver una ecuación lineal. Escribiendo el problema con la notación actual y llamando $p(x) = x^3 - 2x - 5$, la nueva aproximación es:

$$2 - \frac{p(2)}{p'(2)} = 2 + \frac{1}{10} = 2.1$$

que corresponde con la conocida formulación del método de Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)}.$$

No obstante, no hay evidencia de que Newton usara el cálculo diferencial ni de que expresara el proceso como un método iterativo en el sentido de que una aproximación pueda ser considerada como punto de partida de la siguiente.

1.1.3. Antecedentes académicos

Kelley (2003), en su publicación “Resolución de ecuaciones no lineales con el método de Newton”, explora la efectividad del método de Newton para resolver ecuaciones no lineales. Destaca la simplicidad y eficiencia de este método en diversos contextos, subrayando su importancia como herramienta fundamental en la resolución de problemas no lineales. La conclusión principal es que el método de Newton sigue siendo una opción preferida por su balance entre simplicidad y rendimiento computacional.

Por otro lado, Kou, Li y Wang (2007), en su artículo “Algunas modificaciones del método de Newton con convergencia de quinto orden”, presentan una modificación del método de Newton que logra una convergencia de quinto orden. Esta mejora aumenta la eficiencia sin incrementar significativamente el costo computacional. La conclusión es que esta modificación proporciona una alternativa viable y superior a los métodos tradicionales, ofreciendo una mejor convergencia y reduciendo el tiempo de cálculo.

Similarmente, Romero (2016), en su tesis titulada “Análisis Comparativo de los Métodos Iterativos de Newton y Halley en la Solución de Sistemas de Ecuaciones no Lineales”, concluye que al aplicar los métodos iterativos de Newton y Halley en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, se comprobó que el método iterativo de Newton es en realidad menos costoso y su algoritmo se presenta de forma más sencilla, lo que facilita su programación. Al comparar los resultados obtenidos en las tablas comparativas, se pudo afirmar que el método de Halley es mucho más eficiente que el método de Newton y que, en algunos casos, al darles el mismo punto inicial, el método de Halley converge a la solución mientras que el método de Newton no.

En el mismo orden de ideas, Terán-Tarapués y Rúa-Álvarez (2018), en su publicación denominada “El Método de Newton para raíces complejas: Fractales en el problema de Cayley”, concluyen que el método de Newton es uno de los más usados debido a su versatilidad y agilidad, y que solucionar ecuaciones con variable

compleja a través del método de Newton tiene una aplicación muy interesante en el campo de los fractales, como es la del problema de Cayley y las figuras fractales que se producen a partir de la convergencia, divergencia e incluso la eficiencia del método.

Posteriormente, Narang, Bhatia, Alshomrani y Kanwar (2019), en su investigación titulada “Clase general eficiente de métodos tipo Steffensen con memoria para resolver sistemas de ecuaciones no lineales”, introducen una clase eficiente de métodos tipo Steffensen con memoria. Estos métodos mejoran la convergencia y reducen el número de evaluaciones necesarias. Por consiguiente, estos métodos no solo son más eficientes sino que también presentan una significativa reducción en el costo computacional, siendo altamente recomendables para aplicaciones prácticas.

Siguiendo la misma línea de investigación, Kansal, Cordero, Bhalla y Torregrosa (2021), en su artículo titulado “Nuevas clases de métodos iterativos de cuarto y sexto orden para resolver sistemas de ecuaciones no lineales y su análisis de estabilidad”, presentan nuevos métodos iterativos de cuarto y sexto orden. Estos métodos demuestran una notable estabilidad y eficiencia, superando a los métodos tradicionales en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. La investigación concluye que los métodos propuestos no solo mejoran el índice de convergencia, sino que también son robustos en diversas aplicaciones prácticas, evidenciando su aplicabilidad y eficacia en escenarios complejos.

Luego, Grau-Sánchez y Díaz-Barrero (2021), en su trabajo titulado “Técnica para componer un método de Newton modificado para resolver ecuaciones no lineales”, presentan técnicas para componer métodos de Newton modificados. La conclusión es que estas modificaciones aumentan el orden de convergencia y la eficiencia, ofreciendo mejoras sustanciales en el rendimiento computacional y demostrando su aplicabilidad en la resolución de ecuaciones no lineales complejas.

Seguidamente, Chanu y Panday (2022), en su artículo “Excelente esquema iterativo de orden superior para resolver ecuaciones no lineales”, describen un esquema iterativo de orden superior. La investigación concluye que este esquema ofrece un rendimiento excelente comparado con métodos tradicionales, demostrando su potencial en la resolución de ecuaciones no lineales complejas y su aplicabilidad en diversas áreas de la ingeniería.

Análogamente, Xiao (2022) en su publicación titulada “Nuevas técnicas para desarrollar métodos iterativos de orden superior para sistemas de ecuaciones no lineales”, introduce nuevas técnicas para desarrollar métodos iterativos de orden superior. La conclusión enfatiza la aplicabilidad y estabilidad de estas técnicas, subrayando su potencial para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de manera más eficiente.

1.2. Planteamiento del problema

Las ecuaciones algebraicas de orden superior son fundamentales en matemáticas y tienen una gran importancia en varias disciplinas científicas y de ingeniería. La solución precisa de estas ecuaciones puede ser extremadamente compleja, lo que a menudo requiere el uso de métodos numéricos iterativos para encontrar soluciones aproximadas. Entre estos métodos, se destaca el de Newton, que es especialmente útil para resolver ecuaciones de orden superior debido a su capacidad para converger rápidamente hacia una solución, incluso en casos donde otros métodos pueden ser menos efectivos.

A pesar de su popularidad, el método de Newton no siempre converge y su desempeño puede verse afectado significativamente por la elección de las condiciones iniciales y la naturaleza de la ecuación a resolver. Es por lo que, dado que la convergencia del método de Newton no está garantizada, esta incertidumbre puede llevar a soluciones imprecisas o a la no convergencia, lo cual es inaceptable en aplicaciones críticas donde la precisión es esencial.

Por otro lado, las estimaciones de errores proporcionan una medida cuantitativa de la precisión de las soluciones obtenidas mediante el método de Newton. Sin una comprensión clara de estos errores, es difícil evaluar la fiabilidad de las soluciones, los cuales son cruciales en el campo de la ingeniería de estructuras, la economía y otras, donde pequeñas inexactitudes pueden tener consecuencias significativas.

En sentido general, el tamaño de la ecuación, la complejidad de la función y la precisión requerida influyen en el rendimiento del método de Newton. Al variar sistemáticamente estas variables, se puede optimizar su aplicación para diferentes ecuaciones y condiciones. La rapidez y el costo computacional pueden ser prohibitivos en problemas a gran escala, por lo que el uso de funciones test es esencial para evaluar y comparar la eficiencia del método con otros métodos numéricos.

De lo expuesto surgen las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué condiciones caracterizan la convergencia y estimaciones de error del método de Newton para resolución ecuaciones de orden superior?
2. ¿Cuál es el índice de eficiencia computacional del método de Newton en la resolución de ecuaciones de orden superior usando funciones de prueba?
3. ¿Cuál es la eficacia y las limitaciones del Método de Newton según la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones de orden superior?

1.3. Justificación

El método de Newton es uno de los métodos iterativos más utilizados debido a su rapidez y precisión. Sin embargo, su eficacia y eficiencia pueden variar considerablemente dependiendo de la naturaleza de la ecuación y las condiciones iniciales. La relevancia de esta investigación radica justamente en que permite establecer un análisis sobre la convergencia, las estimaciones de error y la eficiencia computacional del método de Newton con fines de optimizar su uso y adaptarlo mejor a distintos tipos de ecuaciones de orden superior. Esto no solo mejorar la precisión de las soluciones

obtenidas, sino que también la reducción de recursos computacionales necesarios, lo cual es crucial en aplicaciones prácticas donde el tiempo y los recursos son limitados.

En esta investigación se abordaron las limitaciones del método de Newton, especialmente en situaciones donde las soluciones de las ecuaciones de orden superior presentan características complejas, como raíces múltiples o puntos de inflexión. La identificación y comprensión de estas limitaciones es esencial para el desarrollo de estrategias que puedan superarlas, esto puede incluir modificaciones al algoritmo original o la combinación del método de Newton con otros métodos numéricos. De esta manera, se incrementa la robustez y la aplicabilidad del método, asegurando que se pueda utilizar de manera efectiva en contextos más variados.

Este estudio establece un marco de referencia para futuras investigaciones, ya que es un tema que ha recibido poca atención en la comunidad científica de la República Dominicana, y en particular en la Universidad UTECO. Se espera que los resultados obtenidos puedan ser aplicados en la resolución de problemas en la modelización matemática y en la generación de algoritmos informáticos.

1.4. Objetivos

1.4.1. General

Analizar el método de Newton para la resolución de ecuaciones de orden superior.

1.4.2. Objetivos

1. Evaluar la convergencia del método de Newton para resolución ecuaciones de orden superior.
2. Probar mediante funciones test el índice de eficiencia computacional del método de Newton aplicado a la resolución de ecuaciones de orden superior.
3. Determinar la eficacia y las limitaciones del Método de Newton según la naturaleza de las soluciones de ecuaciones de orden superior.

1.5. Alcances y límites

Esta investigación se enmarcó en el campo de la matemática aplicada, específicamente en el área de análisis numérico. Se hace un análisis minucioso del método de Newton para resolver ecuaciones de orden superior, su convergencia, el costo computacional, el índice de eficiencia y el error cometido. Por otro lado, fue desarrollada en el marco de la maestría en Matemática de la UTECO, durante el período enero/agosto del 2024.

CAPÍTULO II

MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se plantea las fundamentaciones conceptuales del método de Newton y las ecuaciones de orden superior, por medio de definiciones, proposiciones, teoremas y demostraciones que sirven de soporte y referente para esta investigación.

2.1. Ecuaciones de orden superior

Definición 2.1 Una ecuación algebraica de grado n es una expresión matemática de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

donde x es la variable desconocida y los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes que pueden ser reales o complejas. El grado de la ecuación es n , el cual es el mayor exponente de x en la ecuación.

El propósito de la teoría de ecuaciones algebraicas de grado n es analizar las propiedades de estas ecuaciones, incluyendo la existencia y unicidad de soluciones, y desarrollar métodos para encontrar soluciones exactas o aproximadas. Esta teoría ha sido estudiada durante siglos y ha sido una fuente de importantes avances en matemáticas, como la teoría de grupos y la teoría de Galois (Cox, Little y O'Shea, 2007).

Teorema 2.1 Toda ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces complejas, contando multiplicidades. En términos matemáticos, el teorema puede formularse de la siguiente manera:

Sea $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ una ecuación algebraica de grado n con coeficientes complejos $a_0, a_1, \dots, a_n$. Entonces, existe al menos una raíz compleja z_1 de $P(z)$, es decir, $P(z_1) = 0$. Además, si se cuentan las raíces con multiplicidades, $P(z)$ tiene exactamente n raíces complejas distintas (Grinberg, 2020).

Teorema 2.2 Toda función polinómica con coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una raíz real. En términos matemáticos, se puede enunciar como:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio de grado impar con coeficientes reales $a_0, a_1, \dots, a_n$. Entonces, existe al menos un número real r tal que $P(r) = 0$ (Garrido, 2009).

2.2. Método iterativo

Un método iterativo es una técnica empleada en matemáticas para hallar una solución numérica aproximada de un problema. Se parte de un valor inicial y se aplica una fórmula o algoritmo iterativo para generar una secuencia de valores que se aproximan cada vez más a la solución deseada (Kincaid y Cheney, 2012).

Matemáticamente, si se desea encontrar una solución x^* de una ecuación $f(x) = 0$, se comienza con una aproximación inicial x_0 y se utiliza una fórmula iterativa de la forma:

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

donde $g(x)$ es una función que produce una nueva aproximación x_{n+1} a partir de la aproximación previa x_n . Se espera que la secuencia de valores x_n converja a la solución x^* cuando n sea suficientemente grande.

Existen diferentes tipos de métodos iterativos, algunos de los cuales se basan en la derivación analítica de la función $f(x)$, mientras que otros son métodos numéricos que solo utilizan los valores numéricos de $f(x)$.

La elección del método iterativo adecuado depende de la naturaleza del problema, la disponibilidad de información analítica sobre la función $f(x)$, y la eficiencia computacional. En general, los métodos iterativos son una herramienta poderosa para resolver problemas numéricos en matemáticas, ingeniería, física, ciencias de la compu-

tación y otras disciplinas relacionadas (Burden y Faires, 2011).

Definición 2.2 Sea $f : X \rightarrow X$ una función definida en un conjunto X . Un punto $x^* \in X$ es un punto fijo de f si $f(x^*) = x^*$. Un punto fijo es un valor en el dominio de una función en el cual la función mapea el valor en sí mismo. Es decir, un punto fijo de una función f es un valor x tal que $f(x) = x$ (Bernardino, 2019).

Definición 2.3 De acuerdo con Bernardino (2019), la iteración de punto fijo es una técnica general de gran importancia en diversos ámbitos de las matemáticas (ecuaciones diferenciales, integrales, derivadas parciales, ...), que consiste en generar aproximaciones sucesivas x_n a la raíz buscada r con la esperanza de acercarse cada vez más a ella. Matemáticamente, se desea que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = r$$

lo que garantiza que, fijada una tolerancia, exista un valor finito n para el que los iterantes $x_n, x_{n+1}, \dots$ disten de r menos que la tolerancia. Cada aproximación x_{n+1} , $n = 0, 1, \dots$, se obtiene de la aproximación precedente x_n a partir de una función F real llamada función de iteración,

$$x_{n+1} = F(x_n).$$

Si la función de iteración F es continua debe cumplir $F(r) = r$, es decir, la raíz r de f tiene que ser un punto fijo de F .

Definición 2.4 Vassileva (2011) plantea que, dado $x^* \in \mathbb{C}$ como un punto fijo de una función racional $\mathcal{G}$, se dice que x^* es:

1. Superatractor si $\mathcal{G}'(x^*) = 0$.
2. Atractor si $|\mathcal{G}'(x^*)| < 1$.
3. Indiferente si $|\mathcal{G}'(x^*)| = 1$.
4. Repulsor si $|\mathcal{G}'(x^*)| > 1$.

Al valor $\tau = \mathcal{G}'(x^*)$ se le llama multiplicador asociado al punto fijo x^* .

Definición 2.5 Un punto periódico de período n es superatractor, repulsor o indiferente, si como punto fijo de $\mathcal{G}^n(x)$ es respectivamente superatractor, repulsor o indiferente. El multiplicador asociado a un n -ciclo $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$ es (Gutiérrez, 2016):

$$\tau = (\mathcal{G}^n)'(x_0) = \mathcal{G}'(x_0) \mathcal{G}'(x_1) \cdots \mathcal{G}'(x_{n-1})$$

Definición 2.6 Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Se dice que la sucesión converge a un número real L si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que para todo $n \geq N$, se cumple que $|x_n - L| < \epsilon$. Es decir, la sucesión $\{x_n\}$ se aproxima arbitrariamente a L cuando n tiende a infinito (Gutiérrez, 2016).

Teorema 2.3 Frey (2022) plantea que dada una función de variable real F , bien definida y con derivada continua en un intervalo de la forma $(r - \varepsilon_0, r + \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, con $F(r) = r$.

Si

$$|F'(r)| < 1, \tag{2.1}$$

existe un ε positivo con $\varepsilon < \varepsilon_0$, tal que $\forall x_0 \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ se puede construir la sucesión $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, con elementos en $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ y convergente hacia r . Además, si los errores $e_n = x_n - r$ son no nulos, entonces los cocientes $\frac{e_{n+1}}{e_n}$ tienden hacia $F'(r)$ cuando n tiende a ∞ .

Demostración. Dada la condición (2.1) se puede tomar un número M estrictamente menor que 1 y mayor que $|F'(r)|$. Debido a la continuidad de F' , existe un $\varepsilon < \varepsilon_0$ tal que, para $x \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$, $|F'(x)| \leq M$. Se toma $x_0 \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$ y se asume que se han calculado ya $x_1, \dots, x_n$ y que están en $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$. Entonces se puede hallar $x_{n+1} = F(x_n)$. Además, dado que $F(r) = r$,

$$x_{n+1} - r = F(x_n) - F(r)$$

Usando el teorema del valor medio se obtiene

$$x_{n+1} - r = F'(\xi_n)(x_n - r)$$

con ξ_n un punto intermedio entre x_n y r , que por tanto está en $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$.

Tomando valores absolutos se tiene

$$|x_{n+1} - r| = |F'(\xi)| |x_n - r| \leq M |x_n - r| < |x_n - r| \leq \varepsilon,$$

de modo que también $x_{n+1} \in [r - \varepsilon, r + \varepsilon]$. Por inducción se concluye que se puede construir una sucesión de iterantes en $[r - \varepsilon, r + \varepsilon]$.

Además, se ha demostrado que $|e_{n+1}| \leq M |e_n|$ para cada n , luego

$$|e_n| \leq M |e_{n-1}| \leq M^2 |e_{n-2}| \leq \dots \leq M^n |e_0|.$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ como $M < 1$ se tiene que $M^n \rightarrow 0$ y, por tanto, $e_n \rightarrow 0$, es decir, $x_n \rightarrow r$ (la sucesión de iterantes converge hacia la raíz r). Finalmente, si los errores e_n son no nulos,

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} = \frac{F(x_n) - F(r)}{x_n - r} \rightarrow F'(r)$$

por definición de derivada.

Teorema 2.4 De acuerdo con Diloné et al. (2013), el teorema de Schroder establece que dado un método iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

en el que g es continua y q veces diferenciable en un entorno de x^* , siendo este un punto fijo de g , $x^* = g(x^*)$. Entonces la sucesión x_n converge a x^* con orden de convergencia q si

$$\frac{d^j g(x^*)}{dx^j} = 0, j = 1, 2, \dots, q-1, \frac{d^q g(x^*)}{dx^q} \neq 0$$

Demostración. Desarrollando la serie de Taylor, se tiene que

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) + \dots + \frac{1}{q!} \frac{d^q g(x)}{dx^q} (x_n - x^*)^q, x \in (x_n, x^*).$$

$$x_{n+1} = g(x_n) = x^* + g'(x^*)(x_n - x^*) + \dots + \frac{1}{q!} \frac{d^q g(x)}{dx^q} (x_n - x^*)^q, x \in (x_n, x^*)$$

Entonces, usando las condiciones del enunciado, se tiene

$$x_{n+1} - x^* = \frac{1}{q!} \frac{d^q g(x)}{dx^q} (x_n - x^*)^q$$

Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^q} = \frac{1}{q!} \frac{d^q g(x)}{dx^q} \neq 0$$

Con lo que queda demostrado que el método tiene orden de convergencia q .

2.2.1. Orden de convergencia

En análisis numérico, el orden de convergencia mide la rapidez con la que una sucesión se aproxima a su límite. Este concepto es crucial desde una perspectiva práctica al trabajar con sucesiones de aproximaciones sucesivas en un método iterativo (Sánchez y Batlle, 2001).

Definición 2.7 Suponga que la sucesión de números reales $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a α y sea $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ para cada $n \geq 0$, el error en cada iteración. Si existen dos constantes positivas $A > 0$ y $R > 0$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^R} = A, \text{ siendo } A \neq 0,$$

entonces se dice que la sucesión converge a α con orden de convergencia R y el número A se llama constante asintótica del error.

Siendo $\varepsilon_n = x_n - \alpha$ el error en la n -ésima iteración obtenida a partir de la sucesión $\{x_n\}$, se tiene que para un n suficientemente grande, se cumple que:

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^R} \simeq A \Leftrightarrow |\varepsilon_{n+1}| \simeq A |\varepsilon_n|^R$$

lo cual se puede escribir en la forma

$$\varepsilon_{n+1} = A\varepsilon_n^R + O(\varepsilon_n^{R+1}) = O(\varepsilon_n^R)$$

donde R es el orden de convergencia del método, proporcionando una medida de la reducción del error entre una iteración y la siguiente. Según el valor de R , la convergencia se clasifica de la siguiente manera:

- Si $R = 1$, la convergencia es lineal.
- Si $1 < R < 2$, la convergencia es superlineal.
- Si $R = 2$, la convergencia es cuadrática.
- Si $2 < R < 3$, la convergencia es supercuadrática.
- Si $R = 3$, la convergencia es cúbica.

y así sucesivamente.

Cuanto mayor sea el orden de convergencia, o para el mismo orden, cuanto menor sea la constante asintótica, más rápidamente la sucesión de aproximaciones se acercará a la raíz buscada.

2.2.2. Errores

Uno de los objetivos fundamentales de la computación científica es desarrollar métodos precisos y eficientes para calcular aproximaciones de modelos que son imposibles o muy costosos de resolver mediante métodos analíticos. Sin embargo, es necesario controlar las diferentes fuentes de error para no alterar los resultados calculados. Los errores se propagan desde el inicio del cómputo hasta el resultado final, a veces con una considerable amplificación, otras veces mostrando oscilaciones. Es esencial distinguir entre el nuevo error producido durante cada cálculo en particular (error de procesamiento) y el error heredado (propagado) desde los datos durante todos los cálculos (Hernández, 2018). Los errores más comunes son:

1. Error en los datos iniciales. Los datos iniciales o de entrada pueden ser el resultado de mediciones influenciadas por errores sistemáticos o por perturbaciones temporales. Un error de redondeo ocurre, por ejemplo, cada vez que un número irracional es recortado para utilizar una cantidad fija de decimales. También puede ocurrir cuando una fracción es convertida al tipo de números usados por la PC.
2. Error de redondeo. La limitación de los números de punto flotante en una PC lleva asociada una pérdida frecuente de información que, de acuerdo al contexto, puede o no ser importante. Dos casos típicos son: si el procesador utilizado no tiene la capacidad de operar con números de más de s dígitos, entonces el producto exacto de dos números de s dígitos de longitud (que tiene $2s$ o $2s - 1$ dígitos) no puede ser utilizado en cálculos siguientes porque el resultado debe ser recortado. Si, en un procesador que opera con punto flotante, un número relativamente pequeño b es sumado a otro número a , entonces algunos dígitos de b se pierden y no tendrán efecto en futuros cálculos que dependan del valor de $a + b$. El efecto de redondeos por la capacidad del procesador puede ser notorio durante un cálculo de muchos pasos, o en un algoritmo numéricamente inestable.
3. Error de truncamiento. Este tipo de error ocurre cuando un proceso límite es truncado antes de llegar al valor límite. Por ejemplo, cuando una serie infinita es truncada después de un número finito de términos, o cuando una derivada es aproximada a través de un cociente en diferencias. Otro ejemplo es cuando una función no lineal es aproximada con una función lineal en un intervalo definido.
4. Simplificaciones en el modelo matemático. En la mayoría de las aplicaciones de la matemática se hacen idealizaciones. En un problema de mecánica, por ejemplo, es habitual asumir que la cuerda que sostiene un péndulo carece de masa. En otros tipos de problemas, puede ser una complicación considerar un cuerpo como un objeto homogéneo y lleno completamente de materia, en vez de estar compuesto por átomos. Este tipo de error es más complicado de estimar

que los descritos anteriormente.

5. Error humano. En cualquier trabajo que requiera operar con números, son comunes los errores de administración de información, errores en cálculos manuales y discrepancias en los datos procesados. A veces las rutinas computacionales también contienen errores, asociados al programador o a la falta de consideración del procesador a utilizar.

2.2.3. Error relativo y absoluto

El concepto de aproximación es central en la mayoría de las aplicaciones matemáticas. Lo ideal es trabajar con valores aproximados que satisfagan los requerimientos establecidos. Con el fin de poder analizar las aproximaciones, se introduce la siguiente definición tomada de Hernández (2018).

Definición 2.8 Sea $\tilde{x}$ una aproximación del valor correcto x . Entonces se define como error absoluto a:

$$\epsilon_A = |\tilde{x} - x|$$

y, si $x \neq 0$, el error relativo se define como:

$$\epsilon_R = \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right|$$

2.2.4. Redondeo y truncamiento

Al contar el número de dígitos en un valor numérico, no deben incluirse los ceros al comienzo del número, ya que estos ceros sólo marcan la posición del punto decimal. Sin embargo, al contar el número de decimales, sí deben incluirse los ceros ubicados a la derecha del punto decimal. Por ejemplo, el número 0.00147 está expresado con tres dígitos pero tiene cinco decimales. El número 12.34 está expresado con cuatro dígitos y con sólo dos decimales (Hernández, 2018).

Si la magnitud del error en $\tilde{a}$ no excede $\frac{1}{2}10^{-t}$, entonces $\tilde{a}$ tiene t decimales correctos. Los dígitos de $\tilde{a}$ que ocupan posiciones donde la unidad es mayor o igual a

10^{-t} son llamados dígitos significativos (los ceros iniciales no se cuentan). Siguiendo esto, el número 0.001234 ± 0.000004 tiene cinco decimales correctos y tres dígitos significativos, mientras que 0.001234 ± 0.000006 tiene cuatro decimales correctos y sólo dos dígitos significativos. El número de decimales correctos da una idea de la magnitud del error absoluto, mientras que el número de cifras significativas da una idea aproximada de la magnitud del error relativo.

Existen dos formas de redondear un número x a t decimales. En el proceso denominado truncamiento (o redondeo hacia el cero) simplemente se eliminan todos los números ubicados a la derecha del t -ésimo decimal. La magnitud del error de este proceso puede ser tan grande como 10^{-t} . El redondeo al más cercano (también llamado redondeo óptimo) debe elegir el número con s decimales que sea más cercano a x .

Aquí, si p es la parte del número ubicada a la derecha del s -ésimo decimal, el decimal t -ésimo permanece sin cambios si y sólo si $|p| < \frac{1}{2}10^{-s}$. En el otro caso, debe aumentarse el s -ésimo decimal en 1.

2.2.5. Índices de eficiencia

La eficiencia de un método iterativo está relacionada con el tiempo necesario para obtener la solución del problema en cuestión. Este tiempo depende de la cantidad de operaciones aritméticas que se tengan que realizar, es decir, un algoritmo será más eficiente cuanto menos operaciones se requieran para obtener la solución (Sánchez y Batlle, 2001).

Definición 2.9 De acuerdo con Moreno y Trujillo (1999), para un método de orden $p > 1$, en el que cada iteración necesita r unidades de trabajo (en nuestro caso r evaluaciones de la función o sus derivadas), se define el índice de eficiencia del método por:

$$\varepsilon(p, r) = p^{1/r}$$

Suponga que se tiene un método A de orden $p > 1$ que utiliza r unidades de

trabajo en cada iteración (el tiempo de cálculo es proporcional a r) y otro método B de orden p^2 que necesita $2r$ unidades de trabajo por iteración.

Cuando se realizan r unidades de trabajo con el primer método, es decir, una iteración, el número de cifras exactas se multiplica por p . Entonces, si se realiza otra iteración, se tendría un total de $2r$ unidades de trabajo y el número de cifras exactas se multiplicaría de nuevo por p . En total, el número de cifras exactas queda multiplicado por p^2 . Por tanto, los dos métodos son equivalentes en cuanto a eficiencia computacional.

Teniendo en cuenta la definición de índice de eficiencia, se tiene que en general es:

$$\varepsilon(p^n, nr) = \varepsilon(p, r) = p^{1/r}$$

Cuanto mayor sea el índice de eficiencia de un método, mejor es el método. Es importante resaltar que para obtener buenos índices de eficiencia se deben comenzar las iteraciones en puntos iniciales x_0 cercanos a la raíz buscada, para que el procedimiento sea convergente. Por tanto, la convergencia y la eficiencia están relacionadas entre sí. Mayor será la eficiencia del método cuanto más cerca esté el punto inicial de la raíz.

Por otra parte, Kung y Traub (1974) conjeturaron que un método multipaso iterativo que necesita n evaluaciones en cada paso puede alcanzar como mucho un máximo orden de convergencia igual a 2^{n-1} . A los métodos que alcanzan dicho orden se les llama métodos óptimos, éstos son los más interesantes desde el punto de vista de la eficiencia computacional y, por ello, se han desarrollado en gran cantidad en los últimos años.

El índice de eficiencia de un método óptimo es

$$\varepsilon(2^{n-1}, n) = (2^{n-1})^{1/n} = 2^{\frac{n-1}{n}},$$

cuyo límite cuando $n \rightarrow \infty$ es 2, así que asumiendo la conjetura de Kung y Traub, el índice de eficiencia de cualquier método será menor que 2.

2.2.6. Orden de convergencia computacional

Cuando no es posible determinar el orden de convergencia de un método, para conocer el comportamiento real del mismo en cuanto a la rapidez de convergencia, se puede utilizar el llamado orden de convergencia computacional. Es una aproximación al orden de convergencia teórico del método.

Definición 2.10 Sea α la raíz de una ecuación $f(x) = 0$ y suponga que x_{k+1}, x_k y x_{k-1} son tres iteraciones consecutivas que aproximan el valor de α . Se define el orden de convergencia computacional de la siguiente forma (Petkovic y Neta, 2012):

$$\rho = \frac{\ln |(x_{k+1} - \alpha) / (x_k - \alpha)|}{\ln |(x_k - \alpha) / (x_{k-1} - \alpha)|}$$

Sin embargo, como en la mayoría de los casos se desconoce el valor exacto de α , que es la raíz que se desea calcular, en la práctica se suele utilizar la aproximación introducida por Cordero y Torregrosa (2007):

$$\rho \approx ACOC = \frac{\ln |(x_{k+1} - x_k) / (x_k - x_{k-1})|}{\ln |(x_k - x_{k-1}) / (x_{k-1} - x_{k-2})|} \quad (2.2)$$

2.3. Método de Newton

El método de Newton implica elegir una aproximación inicial x_0 , y luego, a través de un proceso iterativo, encontrar una serie de números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, que converjan a una solución $x = \alpha$. El objetivo es aproximar la raíz $x = \alpha$ de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, una vez que se elige el punto x_0 , se espera encontrar un punto x_1 (relacionado con x_0) que sea una mejor aproximación para la raíz $x = \alpha$ de la función. La relativa cercanía necesaria del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor cercano a la raíz (Hernández, 2020).

Ahora, suponiendo que $f(x)$ es una función diferenciable en un intervalo $[a, b]$ para el que se desea aproximar la raíz. A partir de x_0 se determina x_1 como el punto del eje de abscisas donde la recta tangente a f en $(x_0, f(x_0))$ corta al eje X . Usando la posición inicial x_0 , el valor de la función $f(x_0)$ y la pendiente de la recta tangente que es $f'(x_0)$, permite encontrar la ecuación de la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ utilizando la fórmula de punto-pendiente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (2.3)$$

Para hallar x_1 se sustituye $y = 0$ en la ecuación de la recta y se obtiene

$$\begin{aligned} 0 - f(x_0) &= f'(x_0)(x_1 - x_0) \\ x_1 - x_0 &= \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

siempre que $f'(x_0) \neq 0$, y finalmente

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.5)$$

Aplicando el mismo proceso iterativo a cada valor obtenido, se obtiene una sucesión $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ en la que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.6)$$

siempre que $f'(x_n) \neq 0$, para cada $n \geq 1$

Definición 2.11 Se define la expresión iterativa como la función de iteración de Newton $N(x)$. dada una función diferenciable f , la función de Newton para f es

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (2.7)$$

de donde

$$\begin{aligned}
x_1 &= N(x_0) \\
x_2 &= N(x_1) = N(N(x_0)) = N^2(x_0)
\end{aligned}
\tag{2.8}$$

por lo que se concluye, en general, que para cada $n \geq 1$:

$$x_n = N(x_{n-1}) = N^n(x_0) \tag{2.9}$$

donde la notación N^n significa la aplicación iterada n veces de la función N .

Definición 2.12 Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable definida en el intervalo real $[a, b]$, y $x_0 \in [a, b]$. Según Hernández (2020), aplicar el método de Newton a f en x_0 que consiste en obtener la sucesión $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ mediante el proceso iterativo:

$$x_{n+1} = N(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ para } n \geq 1 \tag{2.10}$$

2.3.1. Construcciones y variantes del método de Newton

2.3.1.1. Construcción geométrica

El método de de Newton tiene una clara interpretación geométrica basada en la aproximación de la función $f(x)$ por una recta tangente. Por este motivo, dicho método suele denominarse también método de la tangente. Partiendo de una aproximación inicial x_0 de la solución α , la siguiente aproximación x_1 , se obtiene como la intersección de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto x_0 con el eje de abscisas. Así, x_1 es la intersección de las rectas $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ e $y = 0$, es decir, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$. Reiterando este procedimiento se obtiene una sucesión de aproximaciones que converge a la solución (Plaza y Gutiérrez, 2013).

2.3.1.2. Construcción a partir del desarrollo de Taylor

A partir de x_0 se busca una aproximación mejor de α que sea de la forma $x_0 + \varepsilon$. Lo ideal sería que $f(x_0 + \varepsilon) = 0$, en cuyo caso se obtendría la solución exacta. Usando el desarrollo de Taylor, se llega a

$$0 = f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon + \frac{f''(x_0)}{2}\varepsilon^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\varepsilon^3 + \dots \quad (2.11)$$

Linealizando la ecuación 2.11 en el segundo sumando, se obtiene:

$$0 \simeq f(x_0) + f'(x_0)\varepsilon \Rightarrow \varepsilon \simeq -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.12)$$

De aquí se deduce la siguiente aproximación de $\alpha : x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.

2.3.1.3. Construcción a partir de la interpolación racional inversa.

El problema de aproximar una solución, se puede transformar en el de aproximar $\phi(0)$, donde $x = \phi(y)$ denota la función inversa de $y = f(x)$. Suponga que x_0 es una aproximación inicial de la solución α y sea $y_0 = f(x_0)$. Considerando el desarrollo de Taylor de orden uno de la función $\phi(y)$ en torno al punto y_0 ,

$$\phi(0) \simeq \phi(y_0) - \phi'(y_0)y_0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

se obtiene una nueva aproximación para $\alpha = \phi(0)$ que coincide, una vez más, con la expresión del método de Newton.

CAPÍTULO III METODOLOGÍA

En este capítulo se presenta los fundamentos metodológicos bajo los cuales se desarrolló la investigación, este abarca el método, el diseño, el tipo de investigación, el enfoque y el procedimiento para la realización de dicho trabajo.

3.1. Marco metodológico

3.1.1. Diseño

El diseño que contempló esta investigación fue el no experimental, ya que tal como lo plantea Hernández et al. (2010), las variables no se manipularon de forma intencionada. Según el tiempo de estudio, el diseño fue transversal, definido por el mismo autor como aquel en el que se recolectan datos en un solo momento y en un tiempo único.

3.1.2. Método

En esta investigación, se utilizó el método analítico-deductivo, ya que de acuerdo con Espinoza (2020), este consiste en la desmembración de un todo, descomponiéndolo en sus partes o elementos para observar las causas, la naturaleza y los efectos. Además, es deductiva debido a que se extraen conclusiones sobre resultados importantes para la verificación de los objetivos del trabajo (Rodríguez et al., 2017).

3.1.3. Tipo

De acuerdo a las características, esta investigación fue de tipo explicativa-descriptiva, ya que se describió y analizó el método de Newton en función de la naturaleza de las soluciones y las condiciones iniciales (Ramos-galarza, 2020).

3.1.4. Enfoque

Conforme a lo planteado por Ortega (2018), debido a que en esta investigación no se busca medir las variables, el enfoque utilizado fue el cualitativo, ya que su desa-

rrullo estuvo basado en caracterizaciones del orden de convergencia, las estimaciones de error, el índice de eficiencia y otros parámetros no necesariamente numéricos.

3.2. Procedimientos

En este apartado se incluye una descripción de las diferentes etapas del proceso realizado en este trabajo de investigación:

1. Se solicitó la aprobación de esta temática investigativa.
2. Se realizó una amplia consulta bibliográfica, sobre los aspectos básicos y fundamentaciones del método de Newton en la resolución de las ecuaciones de orden superior.
3. Se presentó al asesor para su revisión, corrección y posterior validación.
4. Se sometió la propuesta de ante proyecto a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada, a los fines de valorar la relevancia de la misma.
5. Se procedió con las correcciones realizadas por los respectivos jurados en terminos de contenido, redacción y metodología.
6. Se elaboraron los capítulos IV y V, y los demás elementos constitutivos del proyecto, según los reglamentos de la UTECO.
7. Se entregaron nuevamente tres ejemplares a la Facultad de Postgrado y Educación Continuada del borrador final, con fines de la presentación y/o defensa del mismo.

CAPÍTULO IV

PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

El método de Newton se fundamenta en la idea de aproximar las soluciones de $f(x) = 0$, utilizando rectas tangentes al gráfico de la función para iterativamente acercarse a la raíz real. Partiendo de una estimación inicial x_0 de la raíz x^* , el método de Newton establece una secuencia

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

En este capítulo se estudia la convergencia, el orden e índice computacional, la eficacia y limitaciones del método de Newton para resolver ecuaciones de orden superior.

4.1. Convergencia del método de Newton

La convergencia de la sucesión de soluciones $\{x_n\}$ hacia x^* , no está garantizada en todas las situaciones al aplicar el método de Newton. Para que se logre esta convergencia se deben cumplir una serie de condiciones relacionadas con la función f , el punto de inicio x_0 o la raíz x^* . Específicamente, se pueden distinguir tres tipos de resultados de convergencia:

1. Local: Se establecen condiciones sobre la raíz x^* .
2. Semilocal: Se establecen condiciones sobre el punto inicial x_0 .
3. Global: Se establecen condiciones sobre un intervalo.

4.1.1. Convergencia local

Inicialmente se consideran elementos esenciales del método de Newton: la función de iteración $N_f(x)$ y su derivada $L_f(x)$. La función de iteración, $N_f(x)$, se define como:

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

donde $f(x)$ es la función objetivo y $f'(x)$ su derivada. Esta expresión ajusta la aproximación actual, x , para acercarse a la solución.

La derivada de la función de iteración, $L_f(x)$, se expresa como:

$$L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

relacionando las derivadas primera y segunda de $f(x)$ para evaluar la convergencia del método.

Teorema 4.1 Sea f una función dos veces diferenciable en un entorno I de una solución x^* de $f(x) = 0$. Supongamos que $f'(x^*) \neq 0$. Entonces existe un $r > 0$ tal que si $x_0 \in (x^* - r, x^* + r)$, la sucesión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.2)$$

converge a x^* .

Demostración. Como $x_{n+1} = N_f(x_n)$, restando x^* a ambos lados se sigue

$$\begin{aligned} x^* - x_{n+1} &= x^* - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\ &= x^* - N_f(x_n) = N_f(x^*) - N_f(x_n) \\ &= \int_{x_n}^{x^*} N'_f(t) dt \\ &= \int_{x_n}^{x^*} L_f(t) dt. \end{aligned}$$

Como $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$, entonces $L_f(x^*) = 0$. Por la continuidad de $L_f(x)$, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que si $t \in (x^* - r, x^* + r)$, $|L_f(t)| \leq \gamma < 1$. De esta forma, si $x_0 \in (x^* - r, x^* + r)$, entonces

$$|x^* - x_1| \leq \left| \int_{x_0}^{x^*} L_f(t) dt \right| \leq \gamma |x^* - x_0| < r,$$

luego $x_1 \in (x^* - r, x^* + r)$.

Inductivamente, si $x_n \in (x^* - r, x^* + r)$, entonces

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \left| \int_{x_n}^{x^*} L_f(t) dt \right| \leq \gamma |x^* - x_n| < r,$$

es decir, $x_{n+1} \in (x^* - r, x^* + r)$.

Además,

$$|x^* - x_{n+1}| \leq \gamma |x^* - x_n| \leq \gamma^2 |x^* - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \gamma^{n+1} |x^* - x_0|.$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^* \quad \text{para todo } x_0 \in (x^* - r, x^* + r).$$

4.1.2. Convergencia global

Los teoremas que se utilizan para estudiar la convergencia global del método de Newton proporcionan condiciones suficientes para la convergencia del método a partir de un valor inicial tomado en un intervalo apropiado. Para su demostración es necesario previamente el concepto de función contractiva.

Definición 4.1 Una función $g(x) \in C^1(I)$ es contractiva en I , si existe $0 < L < 1$ tal que para todo $x, y \in I$, se cumple

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

A la condición $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ se le denomina condición de Lipschitz y a L constante de Lipschitz. Generalmente, se dice que una función $g(x)$ es contractiva si su constante de Lipschitz es menor que uno.

Teorema 4.2 Sea I un intervalo cerrado y $g : I \rightarrow I$ una contracción ($L < 1$). Bajo estas condiciones se cumple que:

- i) La sucesión definida por $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para todo valor inicial $x_0 \in I$.
- ii) La sucesión converge a un punto fijo de g , es decir, si $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, entonces $x^* = g(x^*)$.

iii) Este punto fijo es único en I , es decir, existe un único $x^* \in I$ tal que $g(x^*) = x^*$.

Demostración. Para demostrar *i)*, se prueba que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy. En efecto, considerando la sucesión definida por el enunciado del teorema

$$x_{n+1} = g(x_n). \quad (4.3)$$

Como la diferencia entre dos términos cualesquiera de (4.3) cumple que

$$|x_{n+m} - x_n| = |x_{n+m} - x_{n+m-1} + x_{n+m-1} - x_{n+m-2} + \cdots + x_{n+1} - x_n|.$$

De donde

$$|x_{n+m} - x_n| \leq |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|. \quad (4.4)$$

Pero

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_{n+m-1}| &\leq L^{m-1}|x_{n+1} - x_n| + \cdots + L^2|x_{n+2} - x_n| + L|x_{n+1} - x_n| + |x_{n+1} - x_n| \\ &= |x_{n+1} - x_n|(1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-1}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Luego

$$|x_{n+m} - x_n| \leq |x_{n+1} - x_n|(1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-1}).$$

Ahora $(1 + L + L^2 + \cdots + L^{m-1})$ es la suma de los términos de una progresión geométrica, por tanto

$$|x_{n+m} - x_n| \leq |x_{n+1} - x_n| \frac{1 - L^m}{1 - L}. \quad (4.6)$$

Asimismo

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L|x_n - x_{n-1}| \leq L^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \cdots \leq L^n|x_1 - x_0|. \quad (4.7)$$

Sustituyendo (4.6) y (4.7) en (4.4) se sigue

$$|x_{n+m} - x_n| \leq L^n \frac{1 - L^m}{1 - L} |x_1 - x_0|.$$

Esto garantiza que la sucesión es de Cauchy, ya que si $L < 1$ el término

$$\frac{1 - L^m}{1 - L} |x_1 - x_0|$$

está acotado y el término L^n puede ser todo lo pequeño posible sin más que tomar un n suficientemente grande. Por tanto, bajo estas condiciones, para todo $\epsilon > 0$ se puede encontrar un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k, m \geq 1$ se cumple que

$$|x_{n+m} - x_n| < \epsilon.$$

Es decir que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, y por tanto convergente. Para probar *ii)* es suficiente ver que al verificar la condición de Lipschitz, g es continua y por tanto

$$g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} \Rightarrow x^* = g(x^*).$$

Para demostrar *iii)*, se parte que existen dos puntos fijos $x^* \neq x^{**}$ con lo que

$$|x^* - x^{**}| = |g(x^*) - g(x^{**})|.$$

Luego, por la condición de Lipschitz se sigue

$$|x^* - x^{**}| \leq L|x^* - x^{**}|,$$

lo cual es un absurdo, ya que por hipótesis $L < 1$. Luego, $x^* = x^{**}$.

Teorema 4.3 Sea $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función $f \in C^2[a, b]$ que cumpla las siguientes condiciones:

- i) $f(a)f(b) < 0$.
- ii) $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- iii) $f''(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$.
- iv) $\max \left\{ \left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|, \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| \right\} \leq b - a$.

Bajo estas condiciones, existe una única raíz x^* en $[a, b]$ y la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, definida por (4.1), converge hacia x^* para cualquier valor inicial $x_0 \in [a, b]$.

Demostración. Siguiendo las condiciones planteadas en las hipótesis, pueden surgir varias posibilidades. Para ilustrar las ideas, se asumirá que $f'(x) < 0$ y que $f''(x) \geq 0$ en $[a, b]$, asegurando así que *ii*) y *iii*) se cumplan.

Se observa que bajo estas condiciones x^* es la única raíz de $f(x) = 0$ en $[a, b]$. Además, dado que $f'(x) < 0$ y se verifica *ii*), se tiene que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Considerando esto, y asumiendo que $x_0 \in [a, x^*]$, se demostrará que:

- $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente.
- El límite de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la raíz x^* .

Para la primera parte, si $x_0 \in [a, x^*]$, entonces $x_n < x_{n+1} < x^*$. La demostración será por inducción.

Para $n = 0$, se verificará que $x_0 < x_1 < x^*$. De acuerdo con (4.1), se tiene que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Dado que $f'(x_0) < 0$ y $f(x_0) > 0$, se obtiene

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > 0,$$

por lo tanto, $x_0 < x_1$. Ahora, se demostrará que $x_1 < x^*$. Para esto, se comprobará que $x^* - x_1 > 0$. Aplicando el teorema del valor medio, se tiene

$$x^* - x_1 = N_f(x^*) - N_f(x_0) = N'_f(\gamma)(x^* - x_0),$$

donde

$$N'_f(\gamma) = \frac{f(\gamma)f''(\gamma)}{f'(\gamma)^2} > 0, \quad \text{para } \gamma \in (x_0, x^*).$$

Por lo tanto,

$$x^* - x_1 > 0.$$

Asumiendo que $x_k < x_{k+1} < x^*$, se demostrará que $x_{k+1} < x_{k+2} < x^*$. Esto se logrará mediante un procedimiento análogo al anterior. Primero, se demostrará que $x_{k+1} < x_{k+2}$. Nuevamente, según (4.1), se obtiene

$$x_{k+2} = x_{k+1} - \frac{f(x_{k+1})}{f'(x_{k+1})}.$$

Dado que $f'(x_{k+1}) < 0$ y $f(x_{k+1}) > 0$, se tiene

$$x_{k+2} - x_{k+1} = -\frac{f(x_{k+1})}{f'(x_{k+1})} > 0,$$

por lo tanto,

$$x_{k+1} < x_{k+2}.$$

Para demostrar que $x_{k+2} < x^*$, se comprobará que $x^* - x_{k+2} > 0$. Aplicando nuevamente el teorema del valor medio, se tiene

$$x^* - x_{k+2} = N_f(x^*) - N_f(x_{k+1}) = N'_f(\theta)(x^* - x_{k+1}),$$

donde

$$N'_f(\theta) = L_f(\theta) = \frac{f(\theta)f''(\theta)}{f'(\theta)^2} > 0, \quad \text{para } \theta \in (x_{k+1}, x^*).$$

Así, se concluye que $x^* - x_{k+2} > 0$, lo que implica que $x_{k+2} < x^*$. Esto demuestra que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente acotada superiormente por x^* y, en consecuencia, $\{x_n\}$ es una sucesión convergente.

Para demostrar que el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la raíz x^* , se aplican límites a la ecuación (4.1), obteniendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right).$$

Sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

Dado que f y f' son funciones continuas en $[a, b]$,

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)} \implies f(L) = 0.$$

Puesto que $f'(L) < 0$, se sigue que $f(L) = 0$, por lo tanto, $L = x^*$.

4.1.3. Convergencia Semilocal

Teorema 4.4 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto en $\mathbb{R}$, una función diferenciable en I . Asumiendo, sin pérdida de generalidad, que $f(x_0) \neq 0$ y que:

- i) $x_0 \in I$.
- ii) $f'(x_0) \neq 0$.
- iii) $\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \beta$.
- iv) $\left| \frac{f'(x) - f'(y)}{f'(x_0)} \right| \leq \gamma |x - y|, \forall x, y \in I$.
- v) $h = \gamma\beta \leq \frac{1}{2}$.
- vi) $t^* = \frac{2\beta}{1 + \sqrt{1 - 2h}}$ es tal que $(x_0 - t^*, x_0 + t^*) \subset I$.

Entonces el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0,$$

está bien definido y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $x^* \in I$, donde $f(x^*) = 0$.

Demostración. Para encontrar una sucesión que mayorice a $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ se considera el polinomio

$$p(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 - t + \beta, \tag{4.8}$$

cuyas raíces son

$$t^*, t^{**} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\gamma\beta}}{\gamma},$$

Notar que (4.8) tendrá solución en $\mathbb{R}$ cuando $1 - 2\gamma\beta \geq 0$, de donde $\gamma\beta \leq \frac{1}{2}$. Esto explica la condición v). Aplicando el método de Newton a (4.8) se sigue

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n - \frac{p(t_n)}{p'(t_n)} = t_n - \left[\frac{-\beta + t_n - \frac{1}{2}\gamma t_n^2}{1 - \gamma t_n} \right] \\ t_0 = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Así, tomando $a = 0$ se genera una sucesión monótona creciente cuyo límite es t^* . Ahora, por inducción se probará que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq t_{n+1} - t_n, \quad \forall n \geq 0.$$

Sustituyendo $n = 0$ en (4.9) se sigue

$$t_1 - t_0 = -\frac{p(t_0)}{p'(t_0)} = \frac{\beta}{1}, \quad t_1 = \beta.$$

Sustituyendo $n = 0$ en (4.1) y aplicando *iii*) se obtiene

$$|x_1 - x_0| \leq \beta = t_1 - t_0.$$

En consecuencia $x_1 \in I$ ya que $|x_1 - x_0| < t_1 < t^*$. Suponga que $x_0, x_1, \dots, x_m \in I$ y además que $|x_{i+1} - x_i| \leq t_{i+1} - t_i$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$, se demuestra que $|x_{m+1} - x_m| \leq t_{m+1} - t_m$. En efecto, como

$$\begin{aligned} |x_m - x_0| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_1 - x_0|, \\ &\leq (t_m - t_{m-1}) + (t_{m-1} - t_{m-2}) + \dots + (t_1 - t_0), \\ &= t_m - t_0 = t_m < t^*, \end{aligned}$$

se tiene que $x_m \in I$. Por otra parte, notar que

$$1 - \gamma|x_m - x_0| \geq 1 - \gamma t_m \implies \frac{1}{1 - \gamma|x_m - x_0|} \leq \frac{1}{1 - \gamma t_m}.$$

Además

$$|x_{m+1} - x_m| = \left| \frac{f(x_m)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{f(x_m)}{f'(x_0)} \frac{f'(x_0)}{f'(x_m)} \right|. \quad (4.10)$$

Aplicando la condición *iv*) se sigue

$$\left| \frac{f'(x_m) - f'(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \gamma |x_m - x_0| \implies \left| 1 - \frac{f'(x_m)}{f'(x_0)} \right| \leq \gamma |x_m - x_0| \leq \gamma(t_n - t_0) < \gamma t^* < 1.$$

Por lo tanto,

$$-\gamma |x_m - x_0| \leq 1 - \frac{f'(x_m)}{f'(x_0)} \leq \gamma |x_m - x_0|.$$

Entonces

$$-\gamma |x_m - x_0| - 1 \leq \frac{f'(x_m)}{f'(x_0)} \leq \gamma |x_m - x_0| - 1.$$

Luego

$$-1 < 1 - \frac{f'(x_m)}{f'(x_0)} \implies \frac{f'(x_m)}{f'(x_0)} < 0.$$

Así

$$\left| \frac{f'(x_m)}{f'(x_0)} \right| = \frac{f'(x_m)}{f'(x_0)} \geq 1 - \gamma |x_m - x_0|.$$

De donde

$$\left| \frac{f'(x_0)}{f'(x_m)} \right| \leq \frac{1}{1 - \gamma |x_m - x_0|}. \quad (4.11)$$

Ahora bien, de (4.1) se deduce

$$f(x_m) = f(x_m) - f(x_{m-1}) - f'(x_{m-1})(x_m - x_{m-1}).$$

Luego,

$$\left| \frac{f(x_m)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{f(x_{m-1}) - f'(x_{m-1})(x_m - x_{m-1})}{f'(x_0)} \right| = \left| \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(\frac{f'(t) - f'(x_{m-1})(x_m - x_{m-1})}{f'(x_0)} \right) dt \right|.$$

Haciendo el cambio de variable $t = x_{m-1} + s(x_m - x_{m-1})$ se sigue

$$\left| \frac{f(x_m)}{f'(x_0)} \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{f'(x_{m-1} + s(x_m - x_{m-1})) - f'(x_{m-1})}{f'(x_0)} \right| |(x_m - x_{m-1})| ds. \quad (4.12)$$

Aplicando la condición *iv)* a (4.12) se sigue

$$\left| \frac{f(x_m)}{f'(x_0)} \right| \leq \int_0^1 \gamma |s(x_m - x_{m-1})| |(x_m - x_{m-1})| ds = \gamma |x_m - x_{m-1}|^2 \int_0^1 s ds \leq \frac{1}{2} \gamma |x_m - x_{m-1}|^2. \quad (4.13)$$

Sustituyendo (4.11) y (4.13) en (4.10) se obtiene

$$|x_{m+1} - x_m| \leq \frac{1}{2} \gamma (t_m - t_{m-1})^2 (1 - \gamma t_m)^{-1}. \quad (4.14)$$

Por otra parte,

$$t_{m+1} - t_m = -\frac{p(t_m)}{p'(t_m)}, \quad (4.15)$$

La ecuación (4.8) implica que

$$p'(t) = \gamma t - 1, \quad (4.16)$$

$$p''(t) = \gamma, \quad (4.17)$$

$$p^{(i)}(t) = 0, \quad i \geq 3. \quad (4.18)$$

Aplicando el desarrollo de Taylor a (4.8) se sigue

$$p(t_m) = p(t_{m-1}) + p'(t_{m-1})(t_m - t_{m-1}) + \frac{1}{2} p''(t_{m-1})(t_m - t_{m-1})^2 + 0. \quad (4.19)$$

Luego, como

$$t_m - t_{m-1} = -\frac{p(t_{m-1})}{p'(t_{m-1})}. \quad (4.20)$$

Análogamente, sustituyendo (4.17) y (4.20) en (4.19) se tiene que

$$p(t_m) = \frac{1}{2} \gamma (t_m - t_{m-1})^2. \quad (4.21)$$

Sustituyendo (4.21) y (4.16) en (4.15)

$$t_{m+1} - t_m = \frac{1}{2} \gamma (t_m - t_{m-1})^2 (1 - \gamma t_m)^{-1}. \quad (4.22)$$

Finalmente, sustituyendo (4.22) en (4.14)

$$|x_{m+1} - x_m| \leq t_{m+1} - t_m.$$

El proceso inductivo queda probado. Como $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ es convergente, se sigue que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ también es convergente. De (4.13) se deduce que cuando $m \rightarrow \infty$, entonces $f(x_m) \rightarrow 0$. Por tanto $\{x_m\}$ converge a x^* , la solución de $f(x^*) = 0$.

Teorema 4.5 Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en un intervalo D tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \beta$. Además, $f'(x_0) \neq 0$.
2. $\frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \gamma^{k-1}$, para $k \geq 2$.
3. $\alpha = \beta\gamma \leq 3 - 2\sqrt{2}$.

Entonces, el método de Newton definido por (4.1) converge a una solución x^* tal que $f(x) = 0$.

Demostración. Dado el conjunto $\{x_n\}$, se demostrará que $|x_{n+1} - x_n| \leq t_{n+1} - t_n$, donde $\{t_n\}$ es una sucesión real obtenida al aplicar el método de Newton a la función mayorante $\phi(t)$. Se considera la función

$$\phi(t) = \beta + t + \sum_{k \geq 2} \lambda^{k-1} t^k = \beta - t + \frac{\gamma t^2}{1 - \gamma t}, \quad \text{para } 0 \leq t < \frac{1}{\gamma}, \quad (4.23)$$

donde se cumple que $\phi(t) = 0$. Entonces,

$$\phi(t) = 2\gamma t^2 - t(\alpha + 1) + \beta = 0,$$

de donde

$$t^*, t^{**} = \frac{(\alpha + 1) \pm \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 8\alpha}}{4\gamma}. \quad (4.24)$$

Para que esta ecuación tenga una raíz en $\mathbb{R}$, se debe cumplir $(\alpha + 1)^2 - 8\alpha \geq 0$, lo que implica $\alpha^2 - 6\alpha + 1 \geq 0$, por lo tanto, $\alpha \leq 3 - 2\sqrt{2}$.

Ahora, sea $\{t_n\}$ la sucesión obtenida al aplicar el método de Newton a (4.23), es decir:

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n - \frac{\varphi(t_n)}{\varphi'(t_n)} = \frac{\beta(1-\gamma t_n)^2 - t_n(1-\gamma t_n)^2 + \gamma t_n^2(1-\gamma t_n)}{-1+2\gamma t_n(2-\gamma t_n)} \\ t_0 = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Al observar que para $n = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} t_1 - t_0 &= \beta, \\ \left| \frac{\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} \right| &\leq \beta, \\ \frac{\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} &= \beta, \\ -\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} &= \beta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Así, sustituyendo $n = 0$ en (4.1) y aplicando la condición (i):

$$|x_1 - x_0| \leq \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \beta = t_1 - t_0, \quad (4.27)$$

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \beta = -\frac{\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \quad (4.28)$$

Por otro lado, notando que

$$\phi'(t) = -1 + \sum_{k \geq 2} k\gamma^{k-1}t^{k-2} \Rightarrow \phi'(t_0) = \phi'(0) = -1. \quad (4.29)$$

Además,

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \sum_{k \geq 2} k(k-1)\gamma^{k-1}t^{k-2}, \\
\varphi'''(t) &= \sum_{k \geq 3} k(k-1)(k-2)\gamma^{k-1}t^{k-3}, \\
&\vdots \\
\varphi^{(j)}(t) &= \sum_{k \geq j} k(k-1)\cdots(k-j+1)\gamma^{k-1}t^{k-j}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Entonces,

$$\phi^{(j)}(t_0) = \phi^{(j)}(0) = k!\gamma^{k-1}. \tag{4.31}$$

De (4.31) y (4.29) se obtiene:

$$\gamma^{k-1} = \frac{\varphi^{(j)}(t_0)}{k!} = -\frac{1}{k!} \frac{\varphi^{(j)}(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{4.32}$$

Aplicando la condición (ii) en (4.32) se sigue:

$$\frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq \gamma^{k-1} = -\frac{1}{k!} \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{\varphi'(t_0)}. \tag{4.33}$$

Esto demuestra que las desigualdades (4.27), (4.28) y (4.33) se cumplen siempre.

En otras palabras, si estas se cumplen, entonces:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x_j)}{f'(x_j)} \right| &\leq -\frac{\varphi(t_j)}{\varphi'(t_j)}, \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \dots, \\
\frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_j)}{f'(x_j)} \right| &\leq -\frac{1}{k!} \frac{\varphi^{(k)}(t_j)}{\varphi'(t_j)}, \quad \text{para } k \geq 2 \text{ y } j = 0, 1, 2, \dots, \\
|x_{j+2} - x_{j+1}| &\leq t_{j+2} - t_{j+1}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

La demostración se realiza por inducción. Para $j = 0$, se verifican (4.27), (4.28) y (4.33). Se comprueba que si son ciertas para j , también lo serán para $j+1$. Aplicando el desarrollo de Taylor a $f(x_{j+1})$ se sigue:

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) + f'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_j)(x_{j+1} - x_j)^k. \tag{4.35}$$

Debido a que

$$(x_{j+1} - x_j) = -\frac{f(x_j)}{f'(x_j)}, \quad (4.36)$$

Sustituyendo en (4.35) se tiene que:

$$f(x_{j+1}) = f(x_j) - f'(x_j) \frac{f(x_j)}{f'(x_j)} + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_j) \left(-\frac{f(x_j)}{f'(x_j)} \right)^k.$$

Así,

$$f(x_{j+1}) = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_j) \left(-\frac{f(x_j)}{f'(x_j)} \right)^k.$$

Luego,

$$\left| \frac{f(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| \leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_j)}{f'(x_j)} \right| \left| \frac{f(x_j)}{f'(x_j)} \right|^k \leq \sum_{k \geq 2} \left[-\frac{1}{k!} \left| \frac{\phi^{(k)}(t_j)}{\phi'(t_j)} \right| \right]^k. \quad (4.37)$$

Si se aplica el desarrollo de Taylor a $\phi(t_{j+1})$ se sigue:

$$\phi(t_{j+1}) = \phi(t_j) + \phi'(t_j)(t_{j+1} - t_j) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \phi^{(k)}(t_j)(t_{j+1} - t_j)^k. \quad (4.38)$$

Pero

$$(t_{j+1} - t_j) = -\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)}, \quad (4.39)$$

Sustituyendo en (4.38) se sigue:

$$\phi(t_{j+1}) = \phi(t_j) - \phi'(t_j) \frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \phi^{(k)}(t_j)(t_{j+1} - t_j)^k. \quad (4.40)$$

Así, se obtiene:

$$\phi(t_{j+1}) = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \phi^{(k)}(t_j)(t_{j+1} - t_j)^k. \quad (4.41)$$

Luego, se establece la siguiente expresión:

$$-\frac{\phi(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \frac{\phi^{(k)}(t_j)}{\phi'(t_j)} (t_{j+1} - t_j)^k = \sum_{k \geq 2} \left[-\frac{1}{k!} \frac{\phi^{(k)}(t_j)}{\phi'(t_j)} \right] \left[-\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right]^k. \quad (4.42)$$

Entonces, (4.37) se transforma en:

$$\left| \frac{f(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| \leq \left| \frac{-\phi(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} \right|. \quad (4.43)$$

Por otra parte, aplicando el desarrollo de Taylor a la derivada de (4.35) se sigue:

$$f'(x_{j+1}) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_j) (x_{j+1} - x_j)^k. \quad (4.44)$$

Luego,

$$\left| 1 - \frac{f'(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| \leq \left| \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \frac{f^{(k+1)}(x_j)}{f'(x_j)} \right| |x_{j+1} - x_j|^k \leq \sum_{k \geq 1} \left| -(k+1) \frac{\phi^{(k+1)}(t_j)}{\phi'(t_j)} \right| \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k. \quad (4.45)$$

Por otro lado,

$$\phi'(t_{j+1}) = \phi'(t_j) + \sum_{k \geq 1} (k+1) \phi^{(k+1)}(t_j) \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k. \quad (4.46)$$

De donde,

$$\begin{aligned} \phi'(t_j) - \phi'(t_{j+1}) &= \sum_{k \geq 1} -(k+1) \phi^{(k+1)}(t_j) \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k, \\ \frac{\phi'(t_j) - \phi'(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} &= \sum_{k \geq 1} -(k+1) \frac{\phi^{(k+1)}(t_j)}{\phi'(t_j)} \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k, \\ 1 - \frac{\phi'(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} &= \sum_{k \geq 1} -(k+1) \frac{\phi^{(k+1)}(t_j)}{\phi'(t_j)} \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Sustituyendo (4.53) en (4.51) se sigue:

$$\left| 1 - \frac{f'(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| \leq \left| 1 - \frac{\phi'(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} \right| < 1, \quad (4.48)$$

pues ϕ es de signo constante en $(0, t^*)$. Entonces, (4.37) se transforma en:

$$\left| \frac{f(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| \leq \left| \frac{-\phi(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} \right|. \quad (4.49)$$

Por otra parte, aplicando el desarrollo de Taylor a la derivada de (4.35) se sigue:

$$f'(x_{j+1}) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_j) (x_{j+1} - x_j)^k. \quad (4.50)$$

Luego,

$$\left| 1 - \frac{f'(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| \leq \left| \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \frac{f^{(k+1)}(x_j)}{f'(x_j)} \right| |x_{j+1} - x_j|^k \leq \sum_{k \geq 1} \left| -(k+1) \frac{\phi^{(k+1)}(t_j)}{\phi'(t_j)} \right| \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k. \quad (4.51)$$

Por otro lado:

$$\phi'(t_{j+1}) = \phi'(t_j) + \sum_{k \geq 1} (k+1) \phi^{(k+1)}(t_j) \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k. \quad (4.52)$$

De donde,

$$\begin{aligned} \phi'(t_j) - \phi'(t_{j+1}) &= \sum_{k \geq 1} -(k+1) \phi^{(k+1)}(t_j) \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k, \\ \frac{\phi'(t_j) - \phi'(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} &= \sum_{k \geq 1} -(k+1) \frac{\phi^{(k+1)}(t_j)}{\phi'(t_j)} \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k, \\ 1 - \frac{\phi'(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} &= \sum_{k \geq 1} -(k+1) \frac{\phi^{(k+1)}(t_j)}{\phi'(t_j)} \left(\frac{\phi(t_j)}{\phi'(t_j)} \right)^k. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Sustituyendo (4.53) y (4.51) se sigue:

$$\left| 1 - \frac{f'(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| \leq \left| 1 - \frac{\phi'(t_{j+1})}{\phi'(t_j)} \right| < 1, \quad (4.54)$$

pues ϕ es de signo constante en $(0, t^*)$.

Así,

$$\left| \frac{f'(x_j)}{f'(x_{j+1})} \right| \leq \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{\phi'(t_j)}{\phi'(t_{j+1})} \right]} = \frac{\phi'(t_j)}{\phi'(t_{j+1})}. \quad (4.55)$$

Aplicando el desarrollo de Taylor a $f^{(k)}(x_{j+1})$ se sigue:

$$f^{(k)}(x_{j+1}) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} f^{(k+i)}(x_j) (x_{j+1} - x_j)^i. \quad (4.56)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| &\leq \sum_{i \geq 0} \frac{(k+1)!}{k! i!} \frac{1}{(k+1)!} \left| \frac{f^{(k+1)}(x_j)}{f'(x_j)} \right| |x_{j+1} - x_j|^i \\
&\leq \sum_{i \geq 0} \binom{k+i}{i} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{-1}{\phi'(t_j)} \right) \phi^{(k+1)}(t_j) (t_{j+1} - t_j)^i \\
&= \frac{-1}{k!} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{\phi^{(k+1)}(t_j)}{\phi'(t_j)} (t_{j+1} - t_j)^i = \frac{-1}{k!} \frac{\phi^{(k)}(t_{j+1})}{\phi'(t_j)}.
\end{aligned}$$

Además

$$\frac{1}{k!} \frac{\varphi^{(k)}(t_{j+1})}{\varphi'(t_j)} = \frac{1}{k!} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \frac{\varphi^{(k+1)}(t_j)}{\varphi'(t_j)} (t_{j+1} - t_j)^i.$$

Así que

$$\frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right| \leq \frac{1}{k!} \left| \frac{\varphi^{(k)}(t_{j+1})}{\varphi'(t_j)} \right|. \quad (4.57)$$

Entonces

$$\left| \frac{f(x_{j+1})}{f'(x_{j+1})} \right| \leq \left| \frac{f'(x_j)}{f'(x_{j+1})} \right| \left| \frac{f(x_{j+1})}{f'(x_j)} \right|. \quad (4.58)$$

Sustituyendo (4.55) y (4.49) en (4.58) se sigue

$$\left| \frac{f(x_{j+1})}{f'(x_{j+1})} \right| \leq \frac{1}{j!} \left| \frac{\phi^{(j)}(t_{j+1})}{\phi'(t_{j+1})} \right| = \frac{\phi^{(j)}(t_{j+1})}{\phi'(t_{j+1})}. \quad (4.59)$$

Asimismo

$$\frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_{j+1})}{f'(x_{j+1})} \right| \leq \frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_j)}{f'(x_j)} \right|. \quad (4.60)$$

Sustituyendo (4.55) y (4.57) en (4.60) sigue

$$\frac{1}{k!} \left| \frac{f^{(k)}(x_{j+1})}{f'(x_{j+1})} \right| \leq \frac{1}{k!} \frac{\phi^{(k)}(t_{j+1})}{\phi'(t_{j+1})} = \frac{1}{k!} \frac{\phi^{(k)}(t_j)}{\phi'(t_j)}. \quad (4.61)$$

Por último

$$|x_{j+2} - x_{j+1}| \leq \left| \frac{f(x_{j+1})}{f'(x_{j+1})} \right| \leq \frac{\phi(t_{j+1})}{\phi'(t_{j+1})} = t_{j+2} - t_{j+1}. \quad (4.62)$$

Luego, se ha probado que

$$|x_{k+1} - x_k| \leq t_{k+1} - t_k. \quad (4.63)$$

Además $\{t_k\}$ es convergente a t^* , por tanto $\{t_k\}$ es de Cauchy, lo cual implica que $\{x_k\}$ también es de Cauchy y que $\{x_k\}$ converge a x^* . Por otra parte, notar que de (4.34) se deduce que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x_j)}{f'(x_j)} \right| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{-\phi(x_j)}{\phi'(x_j)} = \frac{-\phi(t^*)}{\phi'(t^*)} = 0.$$

Entonces $f(x^*) = 0$, luego x^* es la solución de $f(x)$.

4.2. Orden e índice de eficiencia computacional del método de Newton aplicado a la resolución de ecuaciones de orden superior

En esta sección, se emplea el método de Newton para resolver distintos casos de ecuaciones de orden superior, con el objetivo de determinar la cantidad de iteraciones requeridas y posteriormente analizar el orden de convergencia y el índice de eficiencia computacional en la solución de estas ecuaciones.

4.2.1. Índice de eficiencia

Teorema 4.6 Sea x^* una raíz simple, es decir, $f(x^*) = 0$ y $f'(x^*) \neq 0$. Entonces el método de Newton definido por (4.1) es de segundo orden de convergencia cuadrática.

Demostración. Para probar lo anteriormente mencionado, se demostrará que $N'_f(x^*) = L_f(x^*) = 0$ y $N''_f(x^*) = L'_f(x^*) \neq 0$. En efecto

$$N'_f(x^*) = L_f(x^*) = \frac{f'(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = 0, \quad \text{pues } f(x^*) = 0 \text{ y } f'(x^*) \neq 0.$$

Además

$$N''_f(x^*) = L'_f(x^*) = \frac{f'(x^*)f''(x^*)}{f'(x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \neq 0, \quad \text{ya que } f'(x^*) \neq 0 \text{ y } f''(x^*) \neq 0.$$

Por lo tanto, el orden de convergencia es cuadrático. $\square$

Dado que la eficiencia de un método iterativo $\mathcal{M}$ se define como:

$$I = \frac{p}{d}$$

Para el método de Newton, donde $p = 2$ (orden de convergencia cuadrática) y $d = 2$ (en cada iteración se calculan la función f y su derivada f'), se obtiene:

$$I = \frac{2}{2} = 1$$

El índice de eficiencia está dado por:

$$EI = p^{1/d} = 2^{1/2} \approx 1.4142$$

El método de Newton, con una eficiencia de 1 y un índice de eficiencia de aproximadamente 1.4142, cumple con la condición de ser menor que 2 según la conjetura de Kung y Traub (1974). Esto indica que el método de Newton es eficiente, aunque no alcanza la eficiencia máxima posible de 2 para ser considerado óptimo.

4.2.2. Orden de convergencia computacional

En este apartado, se calcula el orden de convergencia computacional establecido en Petkovic y Neta (2012), y que plantea que dado α la raíz de una ecuación $f(x) = 0$ y asumiendo que x_{k+1} , x_k y x_{k-1} son tres iteraciones consecutivas que aproximan el valor de α , entonces se define el orden de convergencia computacional de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{\ln |(x_{k+1} - \alpha) / (x_k - \alpha)|}{\ln |(x_k - \alpha) / (x_{k-1} - \alpha)|} \quad (4.64)$$

Según Weerakoon y Fernando (2000) denota ρ como OCC_W y lo expresan mediante la fórmula:

$$OCC_W = \frac{\ln \left| \frac{(x_{n+1}-x^*)}{(x_n-x^*)} \right|}{\ln \left| \frac{(x_n-x^*)}{(x_{n-1}-x^*)} \right|} \quad (4.65)$$

donde x^* es una raíz de la función $f(x)$, y x_{n+1} , x_n , y x_{n-1} son tres iteraciones consecutivas próximas a la raíz x^* .

Por su parte, Grau-Sánchez (2011) define el OCC_G mediante la expresión:

$$OCC_G = \frac{\ln \left| \frac{(x_{n+1}-x_n)}{(x_n-x_{n-1})} \right|}{\ln \left| \frac{(x_n-x_{n-1})}{(x_{n-1}-x_{n-2})} \right|} \quad (4.66)$$

donde x_{n+1} , x_n , x_{n-1} y x_{n-2} son cuatro iteraciones consecutivas próximas a la raíz x^* .

Ahora se establecen algunos resultados numéricos de la aplicación del método de Newton para solucionar ecuaciones de orden superior, y así, posteriormente calcular el índice de eficiencia computacional.

Ejemplo 4.1 Aproximar una raíz de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[1, 2]$.

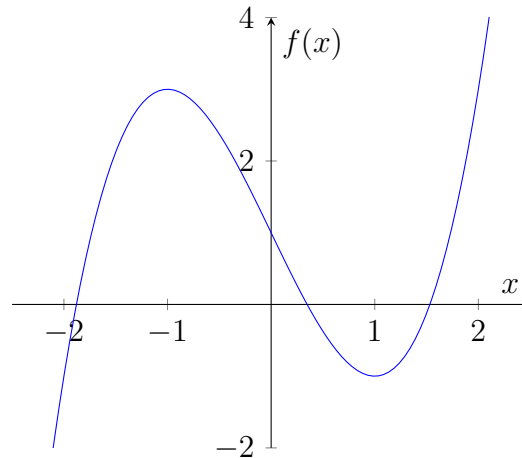


Figura 4.1: Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Tal como se muestra en la figura 4.1, f tiene una raíz en el intervalo $[1, 2]$. Por lo tanto, $x_0 = 2$ parece ser una primera aproximación razonable. Dado que $f(x) =$

$x^3 - 3x + 1$, la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$. Para encontrar la siguiente aproximación, se utiliza la ecuación (4.1) con $n = 1$, de la que se obtiene

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{3}{9} \approx 1.666666667.$$

Para encontrar la siguiente aproximación, x_2 , se utiliza nuevamente la ecuación (4.1) con $n = 2$ y el valor de x_1 . Se obtiene que,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1.548611111.$$

Continuando de esta manera, se obtienen los siguientes resultados:

Iteración (n)	Aproximación x_n
1	1.666666667
2	1.548611111
3	1.532390162
4	1.532088989
5	1.532088886
6	1.532088886

Cuadro 4.1: Estimaciones para la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Se observa que se obtuvo el mismo valor para x_5 y x_6 . Por lo tanto, cualquier aplicación posterior del método de Newton probablemente dará el mismo valor para x_n .

Para calcular los órdenes de convergencia computacional utilizando las fórmulas provistas por Petkovic y Neta (2012), Weerakoon y Fernando (2000), y Grau-Sánchez (2011), Se procederá de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{\ln \left| \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} \right|}{\ln \left| \frac{x_k - \alpha}{x_{k-1} - \alpha} \right|} = \frac{\ln \left| \frac{1.532088989 - 1.532088886}{1.532390162 - 1.532088886} \right|}{\ln \left| \frac{1.532390162 - 1.532088886}{1.548611111 - 1.532088886} \right|} \approx \frac{\ln \left| \frac{0.000000103}{0.000301276} \right|}{\ln \left| \frac{0.000301276}{0.016522225} \right|} \approx 1.993$$

$$OCC_W = \frac{\ln \left| \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \right|}{\ln \left| \frac{x_n - x^*}{x_{n-1} - x^*} \right|} = \frac{\ln \left| \frac{1.532088989 - 1.532088886}{1.532390162 - 1.532088886} \right|}{\ln \left| \frac{1.532390162 - 1.532088886}{1.548611111 - 1.532088886} \right|} \approx \frac{\ln \left| \frac{0.000000103}{0.000301276} \right|}{\ln \left| \frac{0.000301276}{0.016522225} \right|} \approx 1.993$$

$$OCC_G = \frac{\ln \left| \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} \right|}{\ln \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \right|} = \frac{\ln \left| \frac{1.532088886 - 1.532088989}{1.532088989 - 1.532390162} \right|}{\ln \left| \frac{1.532088989 - 1.532390162}{1.532390162 - 1.548611111} \right|} \approx \frac{\ln \left| \frac{-0.000000103}{-0.000301173} \right|}{\ln \left| \frac{-0.000301173}{-0.016220949} \right|} \approx 2.002$$

Estos cálculos muestran que el método de Newton aplicado a la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[1,2]$ presenta un orden de convergencia cercano a 2, lo que es consistente con la convergencia cuadrática típica de este método.

Ahora se presenta una tabla comparativa de los diferentes ordenes de convergencia computacional del método de Newton aplicado a distintas funciones según el procedimiento anterior. Los valores iniciales se tomaron de forma optimizada, es decir, lo más próximo a la solución.

Función $f(x)$	x_0	OCC_G	OCC_W	ρ	Raíz (x^*)
$x^3 - 3x + 1$	2.0	2.002	1.993	1.993	1.532089
$x^3 + 4x^2 - 10$	1.0	2.00564	1.99957	1.9804	1.365230
$x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 12x + 2$	2.0	2.02567	1.99878	1.98423	1.000000
$x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$	-1.0	2.04523	2.00213	2.00345	-1.000000
$x^7 - 4x^6 + 5x^5 - 2x^4 + x^2 - 6x + 2$	0.7	2.07334	2.00045	2.01434	0.543689
$x^2 - e^x - 3x + 2$	1.0	1.99794	1.99825	1.94079	0.257530
$(x - 1)^3 - 1$	1.8	2.0099	1.99939	1.97686	2.000000
$x^3 - 10$	1.5	2.00299	1.99986	1.9937	2.154434
$x^3 + \log(x)$	0.5	2.00976	2.00067	2.00067	0.704709
$\frac{1}{x} - \sin(x) + 1$	-1.0	2.36985	2.00069	2.00326	-0.629446
Promedio		2.0542	1.9993	1.9891	

Cuadro 4.2: Orden de convergencia computacional promedio del método de Newton.

La tabla 4.2 presenta la convergencia del método de Newton para diversas funciones no lineales, destacando diferentes valores iniciales (x_0) y los resultados obtenidos. Se observa que el orden de convergencia computacional (OCC), tanto general (OCC_G)

como según Weerakoon-Fernando ($\text{OCC}_{\mathbf{W}}$), se aproxima consistentemente a 2, con promedios de 2.0542 y 1.9993, respectivamente, lo que confirma la convergencia cuadrática esperada del método. La tasa de convergencia promedio (ρ) también se acerca a 2, con un promedio de 1.9891, indicando una rápida aproximación a la raíz verdadera para la mayoría de las funciones.

4.3. Eficacia y limitaciones del Método de Newton según la naturaleza de las soluciones de ecuaciones de orden superior

Para evaluar la eficacia del método de Newton se analiza el comportamiento de error que tiene este método iterativo, y se establecerán algunos resultados teóricos y numéricos que muestran situaciones donde el método podría fallar o no aproximar correctamente la solución buscada.

4.3.1. Eficacia

El método de Newton suele funcionar de manera espectacular, siempre que la suposición inicial esté lo suficientemente cerca de una solución de $f(x) = 0$. Una forma adecuada de seleccionar esta suposición inicial es trazar el gráfico de $y = f(x)$. Por lo que el método de Newton suele funcionar de manera espectacular, siempre que la suposición inicial esté lo suficientemente cerca de una solución de $f(x) = 0$.

Sea r cualquier solución de $f(x) = 0$. Entonces, $f(r) = 0$. Suponiendo que ya se ha calculado x_n . El error en x_n se denota por $|x_n - r|$. A continuación, se deriva una fórmula que relaciona el error después del próximo paso, $|x_{n+1} - r|$, con $|x_n - r|$.

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(c)(x - x_n)^2$$

para algún c entre x_n y x . En particular, al elegir $x = r$,

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{1}{2}f''(c)(r - x_n)^2$$

Mediante la definición de x_{n+1} ,

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

De hecho, se define x_{n+1} como la solución de $0 = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$.

$$\begin{aligned} 0 = f'(x_n)(r - x_{n+1}) + \frac{1}{2}f''(c)(r - x_n)^2 &\Rightarrow x_{n+1} - r = \frac{f''(c)}{2f'(x_n)}(x_n - r)^2 \\ &\Rightarrow |x_{n+1} - r| = \frac{|f''(c)|}{2|f'(x_n)|}|x_n - r|^2 \end{aligned}$$

Si la suposición x_n está cerca de r , entonces c , que debe estar entre x_n y r , también está cerca de r y $|x_{n+1} - r| \approx \frac{|f''(r)|}{2|f'(r)|}|x_n - r|^2$. Incluso cuando x_n no está cerca de r , si se sabe que hay dos números $L, M > 0$ tales que f cumple:

1. $|f'(x_n)| \geq L$
2. $|f''(c)| \leq M$

De ahí que,

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2L}|x_n - r|^2$$

Denotando por ε_1 el error $|x_1 - r|$ de la suposición inicial. De hecho, denotando por ε_n el error $|x_n - r|$ en x_n . Entonces,

$$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{M}{2L}\varepsilon_n^2$$

En particular

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &\leq \frac{M}{2L}\varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_3 &\leq \frac{M}{2L}\varepsilon_2^2 \leq \frac{M}{2L}\left(\frac{M}{2L}\varepsilon_1^2\right)^2 = \left(\frac{M}{2L}\right)^3\varepsilon_1^4 \\ \varepsilon_4 &\leq \frac{M}{2L}\varepsilon_3^2 \leq \frac{M}{2L}\left(\left(\frac{M}{2L}\right)^3\varepsilon_1^4\right)^2 = \left(\frac{M}{2L}\right)^7\varepsilon_1^8 \\ \varepsilon_5 &\leq \frac{M}{2L}\varepsilon_4^2 \leq \frac{M}{2L}\left(\left(\frac{M}{2L}\right)^7\varepsilon_1^8\right)^2 = \left(\frac{M}{2L}\right)^{15}\varepsilon_1^{16} \end{aligned}$$

Ahora se verifica un patrón que se puede generalizar por inducción,

$$\varepsilon_n \leq \left(\frac{M}{2L}\right)^{2^{n-1}-1}\varepsilon_1^{2^{n-1}} = \frac{2L}{M}\left(\frac{M}{2L}\varepsilon_1\right)^{2^{n-1}}$$

Siempre que $\frac{M}{2L}\varepsilon_1 < 1$ (lo que indica cuán buena debe ser la primera suposición para que el método de Newton converja), esto tiende rápidamente a cero a medida que n aumenta. Por ejemplo, asumiendo que $\frac{M}{2L}\varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}$. Entonces

$$\varepsilon_n \leq \frac{2L}{M} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} \leq \frac{2L}{M} \begin{cases} 0.25 & \text{si } n = 2 \\ 0.0625 & \text{si } n = 3 \\ 0.0039 = 3.9 \times 10^{-3} & \text{si } n = 4 \\ 0.000015 = 1.5 \times 10^{-5} & \text{si } n = 5 \\ 0.00000000023 = 2.3 \times 10^{-10} & \text{si } n = 6 \\ 0.00000000000000000054 = 5.4 \times 10^{-20} & \text{si } n = 7 \end{cases}$$

Cada vez que aumenta n en uno, la cantidad de ceros después del punto decimal se duplica aproximadamente.

Ejemplo 4.2 Considerese $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, comenzando con $x_1 = \frac{5}{2}$. Entonces

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 \quad f''(x) = 12x^2 - 24x + 12$$

Se puede tomar con seguridad $M = 12$ y si $x_n \geq 1$ para todo n , se puede tomar también $L = 4$. Aunque no se sabe qué valor tiene r , sí se tiene que $1 \leq r \leq 3$ (ya que $f(1) = 1^4 - 4(1)^3 + 6(1)^2 - 4(1) + 1 = 0$ y $f(3) = 3^4 - 4(3)^3 + 6(3)^2 - 4(3) + 1 = 0$). Dado que se toma $x_1 = \frac{5}{2}$, se tiene $\varepsilon_1 = |x_1 - r| \leq \frac{1}{2}$, lo que da $\frac{M}{2L}\varepsilon_1 \leq \frac{3}{8}$ y

$$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{2L}{M} \left(\frac{M}{2L}\varepsilon_1\right)^{2^{n-1}} \leq \frac{8}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^{2^{n-1}}$$

4.3.2. Limitaciones

El método de Newton se utiliza habitualmente para encontrar raíces con rapidez. No obstante, existen situaciones en las que este método puede no ser efectivo. Algunas de las razones por las cuales el método de Newton podría fallar incluyen:

1. Si en una de las iteraciones x_n , la derivada f' se anula en x_n pero $f(x_n) \neq 0$,

la tangente a f en x_n no cortará el eje x . En consecuencia, el proceso iterativo no puede continuar.

2. Las aproximaciones $x_0, x_1, x_2, \dots$ podrían acercarse a una raíz distinta. Si la función f posee múltiples raíces, es posible que las iteraciones no converjan hacia la raíz deseada, sino hacia otra diferente. Esto es más probable cuando la aproximación inicial x_0 no se elige lo suficientemente cercana a la raíz buscada.
3. Las iteraciones pueden no converger a ninguna raíz. Se presenta un caso en el que las sucesivas iteraciones nunca se aproximan a una raíz, ya que los valores sucesivos se alternan entre dos puntos.

Ejemplo 4.3 Considere la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Sea $x_0 = 0$. Se demuestra que la sucesión $x_1, x_2, \dots$ no se acerca a una raíz de f .

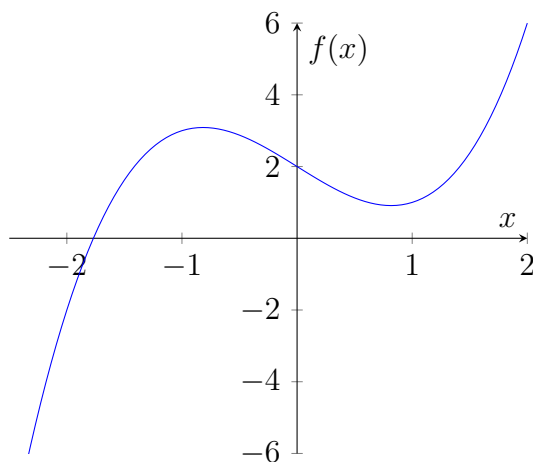


Figura 4.2: Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$

Para $f(x) = x^3 - 2x + 2$, la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 2$. Por lo tanto,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

En el siguiente paso,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

Consecuentemente, los números $x_0, x_1, x_2, \dots$ continúan alternando entre 0 y 1 y nunca se acercan a la raíz de f que se encuentra en el intervalo $[-2, -1]$ como se muestra en la gráfica (4.2). Afortunadamente, si se elige una aproximación inicial x_0 más cercana a la raíz real, se puede evitar esta situación.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se analiza los resultados presentados sobre el método de Newton para la solución de ecuaciones de orden superior. Además, se dan las conclusiones derivadas de este estudio y se sugieren posibles líneas para futuras investigaciones.

5.1. Análisis de los resultados

De acuerdo a lo establecido en el objetivo 1, para evaluar la convergencia del método de Newton para resolución ecuaciones de orden superior, se establecen tres tipos de convergencia: local, semilocal y global, cada una dependiendo de distintas condiciones sobre la función $f(x)$, el punto inicial x_0 o el intervalo en consideración. Para la convergencia local, se demuestra que bajo ciertas condiciones de continuidad y derivabilidad de $f(x)$ alrededor de la raíz, la secuencia generada por el método converge a x^* . En cuanto a la convergencia global, se introducen condiciones más amplias que permiten garantizar la convergencia en un intervalo completo, utilizando el concepto de funciones contractivas y la condición de Lipschitz.

En cuanto a la convergencia semilocal, se establecen criterios más específicos para asegurar la convergencia del método a una raíz en un intervalo abierto, considerando restricciones sobre las derivadas sucesivas de $f(x)$ y la definición de una función mayorante que permite acotar la secuencia generada.

Según lo planteado en el objetivo 2 tendente a probar mediante funciones test el índice de eficiencia computacional del método de Newton aplicado a la resolución de ecuaciones de orden superior, se establece que el método de Newton tiene un orden de convergencia cuadrático, lo que significa que la aproximación a la raíz mejora significativamente con cada iteración. Además, se calcula el índice de eficiencia del método, determinado por la razón entre el orden de convergencia y la cantidad de operaciones necesarias por iteración. Para el método de Newton, este índice es apro-

ximadamente 1.4142, lo que sugiere una alta eficiencia, aunque no la máxima posible según la conjetura de Kung y Traub.

Además, utilizando diversas fórmulas, se demuestra que el orden de convergencia computacional se aproxima a 2 en la mayoría de los casos. Esto se evidencia en la tabla 4.2, donde se muestran los resultados obtenidos para distintas funciones, confirmando que el método de Newton, en general, tiene una convergencia cuadrática en la resolución de ecuaciones no lineales.

Conforme al objetivo 3, de determinar la eficacia y las limitaciones del Método de Newton según la naturaleza de las soluciones, se determinó que es muy eficaz para encontrar soluciones de ecuaciones de orden superior, siempre y cuando la suposición inicial esté lo suficientemente cerca de la solución real. Se demuestra que el error entre la aproximación iterativa y la solución real disminuye de manera cuadrática cuando la suposición inicial está cerca de la raíz deseada, siempre que se cumplan ciertas condiciones sobre la función y su derivada. Este comportamiento es uno de los aspectos que hace al Método de Newton particularmente eficaz en problemas de raíces múltiples, donde otras técnicas podrían no ser tan eficientes.

A pesar de su eficacia, el Método de Newton también presenta limitaciones importantes, en donde puede fallar o no converger a la solución deseada. Si la derivada de la función en una de las iteraciones es cero, el proceso iterativo se interrumpe porque no se puede calcular la siguiente aproximación, además, si la suposición inicial no está lo suficientemente cerca de la raíz deseada, las iteraciones pueden acercarse a una raíz diferente o, en el peor de los casos, no acercarse a ninguna raíz, como se ejemplifica en el caso de funciones con comportamientos oscilatorios.

5.2. Conclusiones

En correspondencia con los objetivos planteados en esta investigación, a continuación se plantean las conclusiones más relevantes según los resultados presentados:

1. El método de Newton demuestra una convergencia efectiva en la resolución de

ecuaciones de orden superior. La convergencia local está garantizada cuando $f(x)$ es continua y derivable en las proximidades de la raíz. Sin embargo, para asegurar la convergencia global, se requieren condiciones más estrictas, como la continuidad de Lipschitz, lo que permite garantizar la convergencia en todo un intervalo. La convergencia semilocal se obtiene bajo ciertos criterios relacionados con las derivadas de $f(x)$, y el uso de una función mayorante, lo que asegura la convergencia dentro de un intervalo abierto específico.

2. El método de Newton posee un orden de convergencia cuadrático, con un índice de eficiencia de aproximadamente 1.4142. Esto indica una alta eficiencia en comparación con otros métodos, aunque no alcanza la eficiencia máxima teórica. El orden de convergencia computacional promedio calculado en términos de operaciones realizadas, también se confirma cercano a 2, confirmando su convergencia cuadrática.
3. Este método es eficaz para resolver ecuaciones de orden superior cuando la suposición inicial está cerca de la solución, con un error que disminuye cuadráticamente. No obstante, enfrenta limitaciones si la derivada se anula durante una iteración o si la suposición inicial es inadecuada, lo que puede llevar a la divergencia o a converger hacia una raíz incorrecta, especialmente en funciones con comportamientos oscilatorios.

En respuesta al objetivo general de esta investigación, se determinó que el método de Newton es efectivo para resolver ecuaciones de orden superior, posee un orden de convergencia cuadrático y un índice de eficiencia de 1.4142. Sin embargo, su eficacia depende de una suposición inicial adecuada, ya que puede fallar si la derivada se anula o si la función presenta comportamientos oscilatorios, lo que puede llevar a la divergencia o a una raíz incorrecta.

5.3. Líneas futuras de investigación

Tomando como base los hallazgos de este trabajo donde se analizó el método de Newton en la solución de ecuaciones de orden superior, se proponen las siguientes líneas de investigación:

1. Desarrollo de variantes del método de Newton que mejoren la convergencia en funciones no Lipschitz.
2. Análisis del método de Newton en la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales de orden superior.
3. Convergencia semilocal del método de Newton en funciones con singularidades.

Referencias

- Asencio, E. N., García, E. J., Redondo, S. R., & Ruano, B. T. (2017). Fundamentos de la investigación y la innovación educativa. La Rioja, Spain: UNIR editorial.
- Chanu, W. H., & Panday, S. (2022). Excellent higher order iterative scheme for solving non-linear equations. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 52(1), 1-7.
- Espinoza, R. (2020). Métodos de investigación: Enfoques y aplicaciones. Editorial Académica Española.
- Fernández, J., y Jiménez, J. (2001). El método de halley: posiblemente, el método más redescubierto del mundo. En *Margarita mathematica: en memoria de josé javier (chicho) guadalupe hernández* (pp. 205–220).
- Grau-Sánchez, M., Grau, À., & Noguera, M. (2011). On the computational efficiency index and some iterative methods for solving systems of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(6), 1259-1266.
- Grau-Sánchez, M., & Díaz-Barrero, J. L. (2011). A technique to composite a modified Newton's method for solving nonlinear equations. *arXiv preprint arXiv:1106.0996*.
- Guicciardini, N. (2018). Isaac Newton y la filosofía natural. Libros de reacción.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. McGraw-Hill.
- Hernández, I. (2020). El método de Newton para la determinación de raíces múltiples. Proyecto Fin de Carrera / Trabajo Fin de Grado, ETS de Ingenieros Informáticos (UPM), Madrid, España.
- Kansal, M., Cordero, A., Bhalla, S., & Torregrosa, J. R. (2021). New fourth- and sixth-order classes of iterative methods for solving systems of nonlinear equations and their stability analysis. *Numerical Algorithms*, 87, 1017–1060.
- Kelley, C. (2003). Solving Nonlinear Equations with Newton's Method. SIAM.

- Kou, J., Li, Y., & Wang, X. (2007). Some modification of Newton's method with fifth-order convergence. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 209, 146–152.
- Narang, M., Bhatia, S., Alshomrani, A., & Kanwar, V. (2019). General efficient class of Steffensen type methods with memory for solving systems of nonlinear equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 352, 23–39.
- Ortega, J. (2018). *Enfoques cualitativos en la investigación social*. Ediciones Universidad de Salamanca.
- Plaza, S., y Gutiérrez, J. M. (2013). *Dinámica del método de newton*. Iberus. Campos de Excelencia Internacional, Universidad de la Rioja.
- Ramos Galarza, C. (2020). Alcances y limitaciones de la investigación explicativa-descriptiva. *Revista de Métodos de Investigación*, 12(3), 45-60.
- Romero Gómez, F. L. (2016). Análisis comparativo entre los métodos iterativos de newton y halley y su aplicación para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales.
- Silva, C. C., y Martins, R. d. A. (2003). A teoria das cores de newton: um exemplo do uso da história da ciência em sala de aula. *Ciência Educação*, 9(01), 53–65.
- Terán-Tarapués, J. A., & Rúa-Álvarez, C. M. (2018). El Método de Newton para raíces complejas. *Fractales en el problema de Cayley*. *Revista EIA*, 15(29), 97-108.
- Weerakoon, S., & Fernando, T. (2000). A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics Letters*, 13(8), 87-93.
- Westfall, R. (2021). Isaac Newton: Facts, Biography Laws. HISTORY. Enciclopedia británica.
- Xiao, X. Y. (2022). Nuevas técnicas para desarrollar métodos iterativos de orden superior para sistemas de ecuaciones no lineales. *Matemática Computacional y Aplicada*, 41(6), 243.

ANEXOS

Anexo 1. Convergencia del método de Newton

Teorema 5.1 El método de Newton no es generalmente convergente.

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{j=0}^d a_j z^j$ un polinomio de grado $d \geq 3$. Fíjese $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ y $a_2 = 0$. Entonces, se tiene que $p(z) = 1 - z + a_3 z^3 + \dots + a_d z^d$. Por lo tanto,

$$p'(z) = -1 + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \dots + da_d z^{d-1}$$

y

$$p''(z) = 6a_3 z + 12a_4 z^2 + \dots + d(d-1)a_d z^{d-2}.$$

Como $p(0) = 1$, $p'(0) = -1$ y $p''(0) = 0$, se obtiene que $N_p(0) = 1$ y $N_p(1) = 0$. Además, si $N_p^1(1) \neq \infty$, entonces $N_p^2(0) = N_p^1(1)$ y $N_p^1(0) = 0$.

Como $N_p^2(z) = \frac{p'(z) - \frac{p''(z)p(z)}{2p'(z)}}{p'(z)}$, se tiene que $N_p(0) = 1$ y $N_p'(0) = 0$. Dado que $N_p^1(1) \neq \infty$, entonces $N_p^2(0) = N_p^1(1)$ y $N_p^1(0) = N_p(0)$. Luego, dado que $N_p'(1) \neq \infty$, se tiene que 0 es un punto periódico, de período 2, superatractor para N_p .

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$N_p(z) = z - \frac{1 - z + a_3 z^3 + \dots + a_d z^d}{-1 + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \dots + da_d z^{d-1}},$$

se obtiene que $N_p(1) = 0$ si, y solo si

$$1 + 2a_3 + 4a_4 + \dots + (d-1)a_d = 0.$$

La condición $N_p^1(1) \neq \infty$ se satisface si $p'(1) \neq 0$, es decir, si

$$-1 + 3a_3 + 4a_4 + \dots + da_d \neq 0.$$

Estas condiciones se satisfacen en un conjunto abierto y denso de un hiperplano de $\{(a_3, a_4, \dots, a_d) : a_i \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^{d-2}$. Lo que termina la prueba.

Anexo 2. Cronograma de trabajo de la investigación.

Este apartado detalla las diversas fases del desarrollo de esta investigación, junto con las fechas previstas para su ejecución.

Actividades	Fechas de ejecución
Solicitud del título	Marzo, 2024
Aprobación del título	Mayo, 2024
Elaboración y entrega del anteproyecto	Mayo-junio, 2024
Revisión del anteproyecto	Julio, 2024
Desarrollo de los capítulos IV y V	Julio-agosto, 2024
Defensa ante el comité evaluador	Septiembre, 2024
Entrega del proyecto completo a la Facultad	Septiembre, 2024
Ceremonia de graduación	Octubre, 2024